LOUIS YVON

Démonstration du théorème 36. Propriétés des rayons vecteurs dans l'ellipse et l'hyperbole

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 237-239

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__237_1>

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 36 (tome I, p. 395).

Propriétés des rayons vecteurs dans l'ellipse et l'hyperbole.

PAR M YVON (LOUIS),
Eleve du College royal Charlemagne.

Un demi-diamètre d'une ellipse ou d'une hyperbole est moyen proportionnel entre les rayons vecteurs menés des foyers à l'extrémité du demi-diamètre conjugué.

Soient OD, OD′ (*fig.* 44), deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse ; x', y', les coordonnées du point D. L'équation de OD′ sera $y = -\dfrac{b^2x'}{a^2y'}x$, en nommant a, b, les demi-axes de l'ellipse que l'on suppose rapportée à ses axes. On aura les coordonnées y, x, du point D′, en résolvant les équations

$$y = -\frac{b^2x'}{a^2y'}x, \text{ et } a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Ce qui donne

$$x = \sqrt{a^2 - x'^2}, \quad \text{et} \quad y = -\frac{bx'}{a}.$$

Par suite :

$$\overline{OD'}^2 = x^2 + y^2 = a^2 - \frac{c^2x'^2}{a^2} = \left(a - \frac{cx'}{a}\right)\left(a + \frac{cx'}{a}\right).$$

Mais $\left(a - \dfrac{cx'}{a}\right), \left(a + \dfrac{cx'}{a}\right)$ sont les rayons vecteurs DF′, DF, menés du point D, aux foyers F′, F. Donc $\overline{OD'}^2 = \overline{DF'} \times \overline{DF}$.

Cette propriété, qui est également vraie pour l'hyperbole, se démontrerait de la même manière ; elle conduit à une démonstration très-simple du théorème suivant : *la normale et la tangente menées par un point d'une conique interceptent sur un axe principal, une longueur égale au produit des rayons vecteurs, passant par ce point, divisé par la distance du point au second axe. Dans la parabole, cette longueur est égale au double du rayon vecteur* (tome I, p. 395).

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une ellipse (*fig.* 44). Soit DH, la normale menée par le point D ; PDK la tangente ; et DG une perpendiculaire sur l'axe OC. Je dis qu'on aura DG × HK = FD × F′D. En effet, les deux triangles semblables PDG, HDK donnent la proportion DG : DK :: PD : HK ; d'où DG × HK = DK × PD. Mais, d'après une propriété connue, on a $DK \times PD = \overline{OD'}^2$; le demi-diamètre OD' étant supposé parallèle à la tangente PDK. Donc,

$$DG \times HK = \overline{OD'}^2 = FD \times F'D.$$

Cette propriété, qui se démontrerait de même pour l'hyperbole, serait facile à modifier, si la perpendiculaire DG, était abaissée sur l'autre axe.

Passons maintenant à la parabole (*fig.* 45).

Je dis que $HK = 2FD$; le point D est un point quelconque de la parabole, F le foyer, EDK la tangente au point D, DH la normale, et KH l'axe.

En effet, on sait que $DF = KF$. Par le point D je mène le diamètre DA. Alors, l'angle $EDA = KDF$; donc,

$$FDH = HDA = DHF.$$

Par conséquent, le triangle DHF est isocèle, et $FD = FH$. Ce qui donne $KH = 2FD$. Le principe est donc démontré.