NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MIDY

Question d'examen. Discussion d'une courbe

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 232-237

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__232_0>

QUESTION D'EXAMEN.

Discussion d'une courbe.

PAR M. MIDY,
Ancien professeur dans les Colléges royaux.

On nomme points d'inflexion d'une courbe ceux où sa courbure change de sens et devient contraire. En ces points la tangente traverse la courbe et les deux parties voisines du point de contact ont par rapport à la tangente des convexités opposées. D'où il suit que si par le point d'inflexion on mène une sécante qui fasse avec la tangente un angle suffisamment petit, elle coupera ces deux parties chacune en un point, et si l'on fait tourner cette sécante sur le point de contact pour la ramener sur la tangente, à l'instant où l'un des deux points d'intersection se confondra avec le point de contact, l'autre point coïncidera pareillement avec lui.

On peut donc considérer ces points comme étant ceux où trois points d'intersection d'une droite avec une courbe se confondent en un seul. Il suit de là qu'une courbe doit être au moins du troisième degré pour avoir des points d'inflexion.

La recherche de ces points étant en général délicate et laborieuse, surtout quand on n'emploie que l'algèbre proprement dite ; nous allons appliquer à un exemple remarquable quelques-unes des méthodes dont on peut faire usage pour les trouver.

Soit l'équation

$$x^4 - x^2 - y^3 = 0. \qquad (1)$$

C'est le lieu des points que l'on obtient (*fig.* 42), en projetant continuellement l'intersection d'une tangente variable TP au cercle AB, avec l'axe AX, par une perpendiculaire à cet axe, sur le prolongement du rayon AT qui passe par le point de contact, le rayon du cercle étant pris pour unité.

Il est facile de voir que cette courbe symétrique par rapport aux deux axes AX, AY est composée de deux branches qui touchent le cercle donné aux extrémités du diamètre BB' et qui s'éloignent ensuite indéfiniment de l'axe des y.

En nommant φ l'inclinaison d'une tangente à cette courbe sur l'axe des x, on aura, par la méthode connue,

$$\tang \varphi = \frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}. \qquad (2)$$

Cette tangente toujours positive pour des valeurs de $x > 1$, devient infinie pour $x = 1$ et pour $x = \infty$.

Il suit de là que la tangente à la branche QBR, d'abord parallèle en B à l'axe des y, s'incline ensuite du côté des x positifs, pour redevenir à la limite perpendiculaire sur cet axe. Il y a donc inflexion sur cette branche entre le point B et les points extrêmes Q et R.

Une autre considération, qui d'ailleurs va servir à la détermination de ces points, nous conduira à la même conclusion.

Cherchons les points d'intersection de cette courbe avec une droite quelconque

$$y = ax + b, \qquad (3)$$

située dans son plan.

L'élimination de y conduit à l'équation suivante :

$$x^4 - (1+a^2)\,x^2 - 2abx - b^2 = 0. \qquad (4)$$

Supposons que l'on ait pris sur la branche QBR deux points arbitraires M et N ayant des abscisses différentes ; le produit de ces abscisses sera positif. Mais on sait que l'équation (4) a au moins une racine réelle négative. Donc il y aura une quatrième racine réelle, qui sera positive, puisque le produit des quatre racines est négatif. La sécante MN aura donc un troisième point commun avec la première branche et un point seulement sur la seconde. Il y aura donc un point d'inflexion entre B et Q, et par suite il y en aura quatre symétriquement placés sur la courbe entière.

Pour chacun de ces points trois des racines de l'équation (4) sont égales. Déterminons a et b de manière que cette condition soit remplie.

Dans cette hypothèse, le polynôme (4) et son dérivé ont un diviseur commun du second degré, et en divisant le second par ce diviseur le reste devra être nul.

Le dérivé, égalé à zéro, donne

$$2x^3 - (1 + a^2)\,x - ab = 0. \qquad (5).$$

Si de (5) multipliée par x, on soustrait (4) multipliée par 2, on trouve

$$(1 + a^2)\,x^2 + 3\,ab\,x + 2b^2 = 0. \qquad (6).$$

Le premier membre de cette équation est donc le diviseur cherché, et en effectuant la division de (5) par (6), le reste du premier degré, égalé à zéro, donne les deux relations suivantes,

$$b^2\,(14\,a^2 - 4) - (1 + a^2)^3 = 0. \qquad (7)$$

$$12b^2 - (1 + a^2)^2 = 0. \qquad (8)$$

L'élimination de b^2 conduit à

$$a^2 = 8 \quad \text{et par suite} \quad b^2 = \frac{27}{4},$$

d'où $\qquad a = \pm 2\sqrt{2} \quad \text{et} \quad b = \pm \frac{3}{2}\sqrt{3}.$

En substituant ces valeurs dans l'équation (6), celle-ci devient

$$x^2 \pm x\sqrt{6} + \frac{3}{2} = 0,$$

ou $$\left(x \pm \frac{1}{2}\sqrt{6}\right)^2 = 0,$$

d'où $$x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{6}.$$

Il est aisé de s'assurer que cette racine est triple dans (4), et que la quatrième racine est $\mp\frac{3}{2}\sqrt{6}$, égale en signe contraire à la somme des trois autres, comme le veut l'équation. Les valeurs trouvées de x, substituées dans (1) donnent

$$y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Les quantités

$$a = 2\sqrt{2},\ b = \frac{3}{2}\sqrt{3},\ y = \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ et } x = \frac{1}{2}\sqrt{6} \text{ ou } = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

sont toutes faciles à construire géométriquement au moyen du rayon AB du cercle donné et déterminent complétement les points d'inflexion cherchés.

Deuxième méthode. Supposons que l'on ait transporté l'origine au point d'inflexion en laissant les axes parallèles à leurs directions primitives. Désignons par x' et y' les coordonnées de ce point, et cherchons les points d'intersection de la courbe avec une droite quelconque

$$y = mx, \qquad (2)$$

passant par le même point.

Représentons l'équation résultante par

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 = 0. \qquad (3)$$

L'on aura d'abord,

$$A_0 = 0,$$

puisque la nouvelle origine est un point de la courbe, et si l'on détermine m de manière que la droite (2) soit tangente, l'on aura de plus

$$A_1 = 0,\quad A_2 = 0,$$

puisque trois racines de l'équation (3) doivent être nulles à la fois.

Or la transformation que nous avons fait subir à l'équation (1) (page 232) revient à y changer simultanément x en $x' + x$ et y en $y' + m\,x$.

Il suit de ce qui précéde que A_0 sera égal à

$$x'^4 - x'^2 - y'^2\ ;$$

que A_1, sera la somme de la dérivée de ce polynôme prise par rapport à x et de la dérivée, prise par rapport à y et multipliée par m, et que A_2 se déduira de A_1, suivant la même loi.

L'on aura donc les deux équations suivantes :

$$2x'^3 - x' - y'm = 0, \qquad (4)$$
$$6x'^2 - 1 - m^2 = 0. \qquad (5)$$

En éliminant m, il viendra

$$2x'^4 - 3x'^2 = 0,$$

ou, omettant le facteur x'^2,

$$2x'^2 - 3 = 0,$$

d'où $$x' = \pm \frac{1}{2} \sqrt{6}.$$

comme on l'a trouvé précédemment.

L'équation (4) conduit à $m = \dfrac{2x'^3 - x'}{y'}$,

ou bien $$m = \frac{2x'^2 - 1}{\sqrt{x'^2 - 1}}; \qquad (6)$$

valeur indiquée précédemment.

L'abscisse correspondante à la valeur minimum de ce coefficient angulaire sera celle du point d'inflexion cherché.

Pour trouver cette valeur minimum, élevons au carré les deux membres de l'équation (6) et chassons le dénominateur, il viendra

$$4x^4 - (4 + m^2)x^2 + m^2 + 1 = 0. \qquad (7)$$

Considérant x comme l'inconnue et résolvant, la quantité sous le signe radical, sera

$$m^2 - 8.$$

En l'égalant à zéro, l'on aura

$$m^2 = 8,$$

valeur qui s'accorde avec le résultat

$$a^2 = 8,$$

donné par la première méthode.

En le portant dans (7) l'équation résultante

$$4x^4 - 12x^2 + 9 = 0,$$

pourra se mettre sous la forme

$$(2x^2 - 3)^2 = 0,$$

et donnera encore

$$x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{6},$$

pour l'abscisse des points cherchés.