NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MOURGUES

Théorèmes sur les polygones réguliers inscrits et circonscrits

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 229-231

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__229_1>

THÉORÈMES

Sur les polygones réguliers inscrits et circonscrits.

PAR M. MOURGUES,
Professeur au college de Rhodez.

Theorème 1. *Les lignes polygonales régulières inscrites dans un arc de cercle augmentent en périmètre avec le nombre des côtés.* Il en est de même des *aires comprises entre ces lignes et la corde qui joint les extrémités de l'arc.*

Theorème 2. *Les lignes polygonales régulières circonscrites à un arc de cercle et terminées aux prolongements des rayons passant par les extrémités de cet arc, diminuent en périmètre avec le nombre des côtés.* Il en est de même *des aires comprises entre ces lignes et les rayons prolongés qui passent par les extrémités de l'arc.*

Les deux théorèmes précédents peuvent se déduire comme corollaires de deux autres théorèmes dont les énoncés suivent ·

Theorème 3. *Parmi les lignes polygonales d'un même nombre de côtés, inscrites dans un même arc de cercle, la plus grande est celle qui est régulière.*

Theorème 4. *Parmi les lignes polygonales d'un même nombre de côtés, circonscrites à un même arc de cercle* *et terminées aux prolongements des rayons extrêmes, la plus petite est celle qui est régulière.*

Admettons pour un instant ces deux théorèmes.

Conséquence du troisième Théorème. Soit inscrite dans un arc de cercle une ligne polygonale régulière de n côtés. Si l'on remplace l'un des côtés par deux cordes, on aura une ligne polygonale irrégulière de $n+1$ côtés, laquelle sera évidemment plus grande que la précédente, et sera plus petite, en vertu du théorème troisième, que la ligne polygonale régulière de $n+1$ côtés. Donc, la ligne polygonale régulière de $n+1$ côtés est plus grande que celle de n côtés.

Conséquence du quatrième Théorème. Soit circonscrite à un arc de cercle et terminée aux prolongements des rayons extrêmes une ligne polygonale régulière de n côtés. Soient (fig. 38) AB, BC deux de ses côtés. Si dans l'angle ABC on mène une tangente EF et qu'on supprime les parties EB, BF, on aura une ligne de $n+1$ côtés, laquelle sera évidemment plus petite que la précédente; et sera plus grande, en vertu du quatrième théorème, que la ligne polygonale régulière de $n+1$ côtés; ce qui conduit à l'énoncé du deuxième théorème.

Démonstration du troisième Théorème. Soit (*fig.* 39) AB un arc de cercle dans lequel on inscrit deux cordes quelconques, AC, CB, qui font un angle constant indépendant de la position du point C. Si l'on prolonge AC d'une quantité $CD=CB$, et qu'on joigne DB, il résultera du triangle isocèle CBD que l'angle D est constant. Le lieu géométrique des points D est donc un segment de cercle AD'DB dont le centre est en O, point milieu de l'arc, car $OD'=OB=OA$. Par suite, le diamètre AD' est plus grand que la corde AD, ce qui donne

$$AO+OB>AC+CB,$$

inégalité qui démontre le théorème pour un polygone de deux côtés.

Cela posé, soit inscrite dans un arc de cercle une ligne polygonale de n côtés. Si elle n'est pas régulière, il y aura nécessairement quelque part deux côtés consécutifs inégaux ; en leur substituant deux côtés égaux, la ligne augmentera de périmètre. Toute ligne irrégulière de n côtés peut donc être augmentée sans changer le nombre des côtés. Or, parmi toutes ces lignes, il y a un *maximum* : c'est donc la ligne polygonale régulière.

Démonstration du quatrième Théorème. Soit (*fig.* 40) AB un arc de cercle auquel je circonscris deux cordes quelconques ac, cb, terminées aux prolongements des rayons extrêmes. On sait que parmi les droites inscrites dans un angle, tangentiellement à l'arc intercepté, la plus petite est celle dont le point de contact coïncide avec le milieu de l'arc. Or, si, comme on le suppose, on n'a pas $ac = cb$, les points de tangence I et I' ne sont pas les milieux des arcs AC, CB. Donc, la ligne continue acb de la *fig.* 40 est plus grande que la ligne discontinue formée (*fig.* 41) des longueurs ac, $c'b$, M et M' étant les milieux des arcs AC, CB. Si, en second lieu, je prolonge ac en d, le triangle $cc'd$, dans lequel l'angle c est évidemment plus grand que c', donne $c'd > cd$; et si, à la somme $ac + c'd$, j'ajoute cd et que j'en retranche $c'd$, il viendra

$$ad + db < ac + c'b.$$

La ligne continue adb se trouve dans le même cas que la ligne acb de la fig. 40. Si donc C n'est pas le milieu de AB, c'est-à-dire si adb n'est pas une ligne régulière, on pourra trouver une ligne discontinue plus petite, et puis une ligne continue encore plus petite. Or, il y a un *minimum* parmi ces lignes continues et discontinues : c'est donc la ligne régulière ; ce qui démontre le théorème pour le cas d'une ligne de deux côtés. Ce théorème se généralise absolument comme celui qui précède.