ROGUET

Note sur les centres

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 210-216

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__210_0>

NOTE

SUR LES CENTRES,

PAR M. ROGUET,
Professeur de mathématiques.

On nomme *centre* d'une courbe, un point qui jouit de la propriété de diviser en deux parties égales, les cordes qui passent par ce point.

De là résulte, que lorsque l'origine des axes est le centre de la courbe, l'équation ne doit pas changer lorsqu'on y remplace à la fois x et y par $-x$ et $-y$. En effet, supposons que l'origine O, (*fig.* 34), soit le centre de la courbe, les triangles OMP, OM'P' seront égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux : savoir OM = OM' et MOP = M'OP', OMP = OM'P' ; donc MP = M'P' et OP = OP' ; donc les coordonnées de l'un des points M, M' sont respectivement égales et de signes contraires à celles de l'autre ; d'ou résulte que s'il y a sur la courbe un point dont les coordonnées soient x', y', il y a nécessairement, aussi sur la courbe un autre point dont les coordonnées sont $-x'$, $-y'$. Réciproquement si l'équation de la courbe ne change pas lorsqu'on y remplace à la fois x et y par $-x$ et $-y$, la courbe a un centre, et ce centre c'est l'origine. En effet (*fig.* 34), les coordonnées du point M, étant x', y', ces coordonnées prises en signe contraire appartiendront à un autre point de la courbe. Soit M' le point dont les coordonnées sont égales et de signes contraires à celles du point M ; les triangles OMP, OM'P' seront égaux comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux, savoir : P = P',

$OP = OP'$, $PM = P'M'$. Donc l'angle $MOP = M'OP'$, et par suite MO et $M'O$ sont en ligne droite; et de plus $MO = MO'$; donc l'origine O est un centre de la courbe.

Il résulte de là, que le centre d'une courbe algébrique de degré impair, est situé sur la courbe, puisqu'en y transportant l'origine, l'équation de la courbe ne doit renfermer que des termes de même parité, et par suite ne doit pas renfermer de terme indépendant des variables. Cette équation est donc satisfaite alors par les coordonnées du centre $x = 0$, $y = 0$.

Le centre d'une courbe de degré pair peut être situé ou non situé sur la courbe.

Théorème 1. Lorsqu'une courbe a plus d'un centre, elle en a une infinité; car, soient O, O' (fig. 35) deux centres d'une même courbe; si l'on prend à droite de O' un point O'' sur la droite OO' à une distance $O'O'' = OO'$; le point O'' sera un centre; en effet, soit M un point de la courbe; tirons la droite MO'' et prolongeons-la d'une longueur $O''M' = O''M$. Il suffit de prouver que le point M' est sur la courbe. Pour cela, tirons MO' et prolongeons d'une longueur $O'P = O'M$, P sera un point de la courbe; tirons PO et prolongeons d'une longueur $ON = OP$, le point N sera un point de la courbe. Tirons enfin les droites $O'N$ et $O'M'$.

Les triangles $O''O'M$ et $OO'P$ sont égaux comme ayant un angle égal $MO'O'' = OO'P$ compris entre côtés égaux, savoir: $OO' = O'O''$, $O'M = O'P$; donc ils sont égaux, et, par suite, les droites PN et MM' sont parallèles, et $OP = O''M$. Les triangles $O'O''M$ et $O'ON$ sont égaux comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux : $O'' = O$ et $OO' = O'O''$, $O''M' = ON$; puisque $O''M' = O''M$ et $OP = ON$; donc, l'angle $OO'N = O''O'M'$; et, par suite, les segments NO' et $O'M'$ sont en ligne droite; de plus ces segments sont égaux; par conséquent le point M' est sur la courbe. Donc, de l'existence de deux centres résulte celle d'un troisième; et, par suite, celle d'une infinité de centres, placés sur la droite qui joint les deux premiers, et placés deux à deux, à une distance égale à OO′.

Théorème. 2. Une courbe *algébrique* ne peut avoir qu'un seul centre ; car (*fig.* 36) si l'on joint un point de la courbe aux différents centres O,O′,O″,O‴, etc., et qu'on prolonge les droites MO, MO′, MO″, MO‴..... de longueurs égales, ON, ON′, ON″, ON‴..... les points N, N′ N″, N‴, etc. seront autant de points de la courbe, tous situés sur une même parallèle à la ligne des centres ; si l'on joint ensuite un des points N,N′... à tous les centres, et qu'on prolonge ces droites NO, NO′ NO″ .. de longueurs égales, les extrémités M, P, P′, P″... de ces prolongements seront autant de points de la courbe, situés sur une parallèle à la ligne des centres, et les parallèles MP′ et NN‴ seront à égale distance de la droite OO′.

Soit $\varphi(x,y)=0$ l'équation proposée. Si l'on prend un nouveau système d'axes, dont l'axe des x soit la droite NN‴, et $F(x,y)=0$ l'équation nouvelle ; il faudra, pour déterminer les points communs au lieu représenté par l'équation, et à l'axe des x, supposer $y=0$ dans l'équation $F(x,y)=0$, et on obtiendra une équation en x dont les racines seront les abscisses des points N, N′... de rencontre de la courbe avec la droite NN‴, ces points sont en nombre infini ; par conséquent l'équation en x sera satisfaite par des valeurs de x en nombre infini ; ce qui ne peut avoir lieu à moins que les coefficients des différentes puissances de x dans l'équation ne soient tous nuls. L'hypothèse $y=0$ faite dans l'équation $F(x,y)=0$ rend donc nuls les coefficients des diverses puissances de x lorsqu'on ordonne le premier membre de l'équation per rapport à x ; d'où il résulte que y est facteur commun à tous les termes de $F(x,y)$, et, par suite, ce polynôme peut se mettre sous la forme $y.f(x,y)$. Si l'on rapporte la courbe à d'autres axes, son premier membre sera de la forme $(my+nx+p)\psi(x,y)$.

L'équation proposée $\varphi(x,y) = 0$ ne peut pas représenter un arc continu, car on trouverait sur cet arc, quelque petit qu'il fût, une infinité de points inégalement distants de OO' à chacun desquels correspondrait un système de deux droites parallèles à OO', et situées de part et d'autre à égale distance de OO'. Considérant chacune de ces parallèles comme on vient de le faire pour la droite NN'''; pour chacune d'elles, on sera conduit à mettre en évidence un facteur du premier degré dans le premier membre de l'équation $\varphi(x,y) = 0$; d'où il résulterait que le premier membre d'une équation algébrique à deux variables, et d'un degré déterminé, pourrait être décomposé en une infinité de facteurs du premier degré à deux variables.

Pour la même raison, le premier membre de l'équation proposée ne peut pas non plus renfermer de facteurs du premier degré qui, égalé à zéro, représenterait une droite non parallèle à la droite OO'.

Par conséquent, le lieu géométrique représenté par l'équation ne peut être qu'un système de droites parallèles à la ligne OO'.

Si l'on prend pour axe des x, OO' et pour axe des y une droite quelconque, l'équation sera en y seul, et son premier membre sera le produit de n facteurs de la forme $y^2 - a^2$, $y^2 - a'^2$, si l'équation est de degré pair $2n$; et, si l'équation est de degré impair $2n+1$, son premier membre se décomposera en $2n+1$ facteurs, l'un y et les autres $y-a$, $y+a$, $y-b$, $y+b$... etc.

Tout autre facteur qui se trouverait dans le premier membre ne pourrait être qu'un facteur qui, égalé à zéro, fournirait une équation qui ne pourrait être satisfaite que par $x=0$, $y=0$ ou par des valeurs imaginaires des variables.

On peut démontrer par la forme même d'une équation algébrique que s'il existe sur le plan deux points tels qu'étant pris pour origine, l'équation d'un lieu ne change pas lorsqu'on y remplace à la fois x et y par $-x$ et $-y$, cette équation ne peut représenter qu'un système de droites parallèles. En effet soient o et o' ces deux points : supposons qu'en prenant le premier point o pour origine des coordonnées, Ax^py^q soit le terme de l'équation dans lequel x^p soit la plus haute puissance de x multipliée par y^q ; transportons l'origine en O′ sans changer la direction des axes ; il faudra remplacer y par $y+o$ et x par $x+d$ en appelant d la distance OO′ ; le terme Ax^py^q deviendra $A(x+d)^py^q$ et en développant : $Ax^py^q+p\,Adx^{p-1}y^q+$ etc. ; or le terme $pAdx^{p-1}y^q$ ne doit pas rester dans le premier membre de l'équation puis qu'il n'est pas de même parité que Ax^py^q ; et cependant ce terme $pAdx^{p-1}y^q$ ne peut se réduire avec aucun autre de la nouvelle équation, puisque x^p est la plus haute puissance de x par laquelle soit multiplié y^q dans la première équation. Les autres termes qui contiendront y^q seront au plus du degré $p-2$ en x, d'où l'ont doit conclure que x ne peut pas entrer dans l'équation, si O et O′ sont deux centres ; et, par suite, l'équation étant en y seulement ne peut representer qu'un système de droites parallèles. On suppose que l'équation ne contient aucun facteur qui, égalé à zéro, n'admette que des valeurs nulles ou imaginaires pour les variables, tels que x^2+y^2 ou $x^2+y^2+k^2$.

Détermination du centre. 1° On peut obtenir les coordonnées du centre d'une courbe algébrique par la résolution de deux équations du premier degré à deux inconnues, ou, autrement, on peut déterminer le centre par l'intersection de deux droites. En effet soit m le degré de l'équation, a et b les coordonnées du centre ; a et b doivent avoir des valeurs telles qu'en transportant l'origine au point dont a et b sont les coordonnées, la nouvelle équation ne renferme plus de termes de parité différente à m, et cette condition est suffisante. On substituera donc $x + a$ et $y + b$ à x et y dans l'équation proposée et on égalera à zéro les coefficients des termes de degré $m - 1$, $m - 3$, $m - 5$, — — ce qui fournira autant d'équations entre a et b. Parmi ces équations, il s'en trouvera au moins deux qui seront du premier degré. En effet soit Ax^py^q un terme du degré m, la substitution de $x + a$ pour x et $y + b$ pour y donnera le terme $pAax^{p+1}y^q$; on aura en outre deux autres termes en $x^{p+1}y^q$; savoir : le terme provenant du terme en $x^{p-1}y^{q+1}$ et qui sera de la forme $qA'bx^{p-1}y^q$; et le terme provenant du terme en $x^{p-1}y^q$ lui même, et qui sera de la forme $Bx^{p-1}y^q$; de sorte qu'on aura l'équation.

$$pAa + qA'b + B = 0.$$

On aura de même le terme $qAbx^py^{q-1}$, un terme $pA''ax^py^{q-1}$ fourni par le terme $A''x^{p+1}y^{q-1}$, et enfin un terme $B'x^py^{q-1}$ appartenant déjà à l'équation proposée, et par suite l'équation

$$qAb + pA''a + B' = 0.$$

On formera donc ces deux équations, au moyen desquelles on déterminera a et b, et les valeurs obtenues ainsi pour ces dernières quantités devront satisfaire à toutes les équations formées de la même manière.

Si l'on applique cette méthode aux courbes du second degré, on trouvera deux équations seulement et pour premiers membres les dérivées prises par rapport à x et y du premier membre de l'équation du second degré, y et x représentant b et a.

2° On peut aussi regarder le centre comme un point commun à tous les diamètres de la courbe, puisque le centre est le point milieu de toutes les cordes passant par le centre. De là résulte un autre moyen de déterminer le centre d'une courbe; en effet soit $y = mx + n$ (1) l'équation d'une corde;

$$Am^\alpha + Bm^\beta + Cm^\gamma + .. + K = 0 \ (2)$$

l'équation du diamètre ordonnée par rapport à m ; A,B,C,...K étant des fonctions de x et y ; le centre sera le point dont les coordonnées satisferont à l'équation (2), quelque valeur qu'on attribue à m ; et par conséquent satisferont aux équations $A=0$, $B=0$,.... $K=0$; on cherchera donc les valeurs de x et y qui satisfassent à la fois aux équations $A=0$, $B=0$,.... $K=0$; ces valeurs seront les coordonnées du centre.

L'équation d'un diamètre des courbes du second degré est $Ym+X=0$; Y est le polynôme dérivé par rapport à y, et X le polynôme dérivé par rapport à x du premier membre de l'équation du second degré ; les équations $Y=0$ et $X=0$ auront donc pour solution commune $x=a$, $y=b$, a et b étant les coordonnées du centre.