CADET

Note sur le trapèze

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 189-191

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__189_0>

NOTE

SUR LE TRAPÈZE,

PAR M. CADET,
Enfant de troupe, au 59e.

I. *Dans tout trapèze* ABCD (*fig.* 31) *la différence des carrés des deux diagonales*, AC *et* BD, *est à la différence des carrés des côtés non parallèles*, AB *et* CD, *comme la somme des côtés parallèles*, AD *et* BC, *est à la différence de ces mêmes côtés*, *c'est-à-dire qu'on aura :*

$$\overline{BD}^2 - \overline{AC}^2 : \overline{CD}^2 - \overline{AB}^2 :: AD + BC : AD - BC.$$

Démonstration. Des sommets B et C du trapèze j'abaisse des perpendiculaires BI et CE sur la base AD. Dans le triangle ABD je prends la valeur du carré de la diagonale BD, et j'ai :

$$\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 - 2AD \times AI.$$

De même du triangle ACD, je tire :

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - 2AD \times ED.$$

Retranchant ces deux égalités membre à membre, j'ai ·

$$\overline{BD}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{CD}^2 - 2AD \times AI + 2AD \times ED$$

$$= \overline{AB}^2 - \overline{CD}^2 + 2AD\,(ED - AI).$$

Cela posé, je fais

$BD = s, AC = s', AD = a, BC = b, CD = c, AB = d, ED = x, AI = y.$

D'où $\quad s^2 - s'^2 = d^2 - c^2 + 2a\,(x - y) \ldots\ldots\ldots (1).$

Or, si je mène par le point C la droite CG parallèle à AB, les deux triangles GEC et AIB seront égaux, comme étant rectangles l'un en E, l'autre en I, de plus CE$=$BI et CG$=$AB comme parallèles comprises entre parallèles ; donc

$$GE = AI = y.$$

Or, on a $\quad GE + ED = GD = AD - AG = AD - BC,$

ou $x + y = a - b$; on a aussi en vertu d'un théorème connu

$$\overline{ED}^2 - \overline{EG}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{GC}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{AB}^2$$

ou $x^2 - y^2 = c^2 - d^2$ ou $(x+y)\ (x-y) = c^2 - d^2$. Remplaçant $x + y$ par sa valeur dans la deuxième équation, j'ai

$$(a-b)(x-y) = c^2 - d^2, \text{ d'où } x - y = \frac{c^2 - d^2}{a-b}.$$

Je vais maintenant mettre cette valeur dans l'équation (1).

J'ai : $s^2 - s'^2 = d^2 - c^2 + \dfrac{2a\,(c^2 - d^2)}{a-b}$; additionnant et effectuant dans le deuxième membre, on a :

$$s^2 - s'^2 = \frac{ad^2 - ac^2 - bd^2 + bc^2 + 2ac^2 - 2ad^2}{a-b}$$

et, en réduisant : $s^2 - s'^2 = \dfrac{a\,(c^2 - d^2) + b\,(c^2 - d^2)}{a-b}$; mettant $c^2 - d^2$ en facteur commun, j'ai $s^2 - s'^2 = \dfrac{(c^2 - d^2)\ (a+b)}{a-b}$,

d'où je tire la proportion $s^2 - s'^2 : c^2 - d^2 :: (a+b) : (a-b)$, ou

$$\overline{BD}^2 - \overline{AC}^2 : \overline{CD}^2 - \overline{AB}^2 :: AD + BC : AD - BC.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

II. D'après un théorème connu, on a aussi :

$$s^2 + s'^2 = c^2 + d^2 + 2ab.$$

C'est-à-dire que la somme des carrés des diagonales d'un trapèze est égale à la somme des carrés des côtés non parallèles, plus au double rectangle des côtés parallèles.

Donc, j'ai ainsi, entre les 4 côtés et les 2 diagonales d'un trapèze, deux relations qui permettent, étant données 4 quelconques de ces 6 quantités, de trouver les 2 autres. Ainsi, pour avoir la diagonale s, j'additionne les deux équations et j'obtiens toute réduction faite :

$$s=\sqrt{\frac{a\,(c^2-b^2)+b\,(a^2-d^2)}{a-b}}.$$

Si l'on suppose $b > c$, la formule se mettra sous la forme

$$s=\sqrt{\frac{b\,(a^2-d^2)-a\,(b^2-c^2)}{a-b}}.$$

Ou bien encore,

$$s=\sqrt{\frac{a\,(c+b)\,(c-b)+b\,(a+d)\,(a-d)}{a-b}}.$$

On trouverait de même pour la diagonale s',

$$s'=\sqrt{\frac{a\,(d^2-b^2)+b\,(a^2-c^2)}{a-b}}.$$

Les relations obtenues donnent le moyen de résoudre ce problème : Construire un trapèze connaissant les deux diagonales et les deux côtés non parallèles.

Il faudrait construire le triangle AOB (*fig.* 31). Pour cela, il faut partager chaque diagonale en parties proportionnelles aux bases, on le voit d'après la similitude des triangles BOC et AOD. Or, le théorème démontré ci-dessus fournit le rapport cherché, car on a :

$$s^2-s'^2 : c^2-d^2 :: a+b : a-b.$$

En faisant la proportion par différence, on obtient facilement le rapport de a à b.