H. BERTOT

Note sur les périmètres des polygones réguliers

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 188

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__188_0>

NOTE

SUR LES

PÉRIMÈTRES DES POLYGONES RÉGULIERS,

PAR M. BERTOT (H.),
Elève du Collége royal Louis-le-Grand.

La différence des périmètres des polygones réguliers de 2n *côtés, inscrit et circonscrit à un cercle, est moindre que le quart de la différence des périmètres des polygones réguliers de* n *côtés, inscrit et circonscrit au même cercle.*

Démonstration. Soient AB, A′B′ (*fig.* 30), les côtés des polygones réguliers de n côtés, et AC, DE, ceux des polygones de $2n$ côtés. Je mène AF parallèle à OE. A′F est la demi-différence des côtés A′B′ et AB; donc, $2n$. A′F est la différence des périmètres correspondants. DL est la différence des côtés DE, et AC; donc, $2n$. DL est la différence des périmètres correspondants. Il s'agit de prouver que

$$2n.\,\mathrm{DL} < \tfrac{1}{4}\,2n.\,\mathrm{A'F}. \text{ Ou, } \mathrm{DL} < \tfrac{1}{4}\,\mathrm{A'F}.$$

On a HI<GH (*), et par suite : HI $<\frac{1}{2}$ GI. Menons AN parallèle à OG. Dans le triangle NAC, on aura GI $= \frac{1}{2}$ AN. Donc, HI ou son égal AM $<\frac{1}{4}$ AN. Par conséquent, dans le triangle A′AF, la parallèle à la base A′F, menée par le point M, serait $<\frac{1}{4}$ A′F. Et, *à fortiori* on aura DL $<\frac{1}{4}$ A′F, car le point M étant situé sur la bissectrice AN de l'angle A′AF, la droite DML perpendiculaire à AN, est plus petite que toute autre droite menée par M, et terminée aux côtés de l'angle A′AF.

(*) Car, la corde CH étant bissectrice de l'angle GCI, on a $\frac{\mathrm{HI}}{\mathrm{GH}} = \frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{CG}}$.