TERQUEM

Démonstration de deux théorèmes sur les triangles inscrits dans des sections coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 186-187

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__186_1>

DÉMONSTRATION DE DEUX THÉORÈMES

sur les triangles inscrits dans des sections coniques (*)

—

THEORÈME 1. *Un triangle rectangle est inscrit dans une section conique, le sommet de l'angle droit est fixe : l'hypoténuse*

*) Ces theorémes sont dus a *M. Fregier.*

coupe la normale menée par le sommet fixe, toujours au même point.

Démonstration. Je prends la normale pour axe des x, et la tangente pour axe des y, l'équation de la conique est alors $Ay^2+Bxy+Cx^2+Ex=0$. Soient $y=ax$, et $y=-\frac{x}{a}$ les équations des deux côtés de l'angle droit, le système de ces deux droites est donné par l'équation $(y-ax)(ay+x)=ay^2+xy(1-a^2)-ax^2=0$. Eliminant y^2 entre cette équation et la proposée, le résultat sera divisible par x et on aura pour quotient $y(A-Aa^2-Ba)-ax(A+C)-Ea=0$; équation de l'hypoténuse. Faisant $y=0$, on a $x=\frac{-E}{A+C}$, expression indépendante de a. C'est ce qu'il fallait démontrer.

THEORÈME 2. *Un triangle inscrit dans une conique est tel qu'une de ses bissectrices intérieures est normale à la courbe : alors, le côté opposé à l'angle divisé passe constamment par le pôle de la normale.*

Démonstration. Je prends le même système d'axes que dans la démonstration du précédent théorème. $y=ax$, et $y=-ax$ sont les équations des côtés de l'angle divisé. Le système de ces deux droites est donné par l'équation $y^2-a^2x^2=0$; éliminant y^2 entre celle-ci et l'équation de la conique, et divisant le résultat par x, il vient $x(Aa^2+C)+By+E=0$, équation du côté opposé à l'angle divisé; cette droite coupe l'axe des y au point $x=0$, $y=\frac{-E}{B}$. Or, ce point est le pôle de l'axe des x, qui est la normale. Donc, le theorème est démontré.

Tm.