NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GÉRONO

Normales et cercles osculateurs aux courbes du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 170-186

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__170_0>

NORMALES ET CERCLES OSCULATEURS

AUX COURBES DU SECOND ORDRE.

(Voy. pages 72, ..., 79, t. II.)

—

7. Les propriétés des normales conduisent à la solution de ce problème : *trouver la plus courte distance d'un point à l'ellipse.*

La plus petite et la plus grande des droites menées d'un point au contour d'une ellipse, sont des normales. C'est ce qu'il est facile de voir en décrivant des circonférences tangentes à l'ellipse ; on peut encore le reconnaître en déterminant, par le calcul, le point de la courbe auquel il faut mener la droite pour qu'elle soit un *minimum* ou bien un *maximum* (*).

(*) Soient x, y les coordonnées d'un point de l'ellipse, et α, β celles du point donné ; la distance δ de ces deux points sera déterminée par la formule

$$\delta^2 = (y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2.$$

Il s'agit de rendre *maximum* ou *minimum* la fonction δ^2 par des valeurs de x, y, satisfaisant à l'équation $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$. Or, si l'on pose $y=b\sin\gamma$, et $x=a\cos\gamma$, l'équation de l'ellipse sera satisfaite, quelle que soit la valeur attribuée à la variable γ. D'ailleurs, par cette substitution on a

$$\delta^2 = (b\sin\gamma-\beta)^2 + (a\cos\gamma-\alpha)^2.$$

Il faut donc trouver pour la variable indépendante γ, une valeur qui annule la dérivée de la fonction $(b\sin\gamma-\beta)^2+(a\cos\gamma-\alpha)^2$, ce qui donne

$$(b\sin\gamma-\beta)b\cos\gamma - (a\cos\gamma-\alpha)a\sin\gamma = 0 ;$$

d'où

$$c^2\sin\gamma\cos\gamma + b\beta\cos\gamma - a\alpha\sin\gamma = 0.$$

Et, en remplaçant $\sin\gamma$, $\cos\gamma$ par leurs valeurs $\frac{y}{b}$, $\frac{x}{a}$, on obtient

$$c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0 ;$$

c'est-à-dire que la question revient à mener, par le point que l'on donne, des normales à l'ellipse.

Mais, afin de présenter avec plus de précision la discussion du problème nous indiquerons d'abord quelques remarques sur la situation relative des circonférences tangentes à une ellipse en un point déterminé.

Par un point, R, d'une ellipse (*fig.* 26), menons la tangente SRS′ qui rencontre les prolongements des axes aux points S, et S′. Puis, d'un point quelconque M de la normale RM, décrivons une circonférence dont le centre soit M, et le rayon, MR. Cette circonférence touchera la droite SRS′ au point R, et pour ce motif nous dirons qu'elle est tangente à l'ellipse en ce point. Si, maintenant, on considère sur cette circonférence deux points contigus de R, et de différents côtés de ce dernier point, il peut arriver qu'ils soient tous deux extérieurs à l'ellipse, ou tous deux intérieurs; ou bien encore, l'un d'eux peut être extérieur, et l'autre, intérieur. Dans le premier cas, la circonférence est dite tangente extérieure à l'ellipse, au point R; dans le second, elle est tangente intérieurement; et enfin, le troisième cas se distingue des deux autres, en ce que la circonférence est à la fois sécante et tangente à l'ellipse au point R.

Pour montrer quelle est, dans ces différents cas, la position du centre de la circonference décrite, je mène à l'ellipse les tangentes ST, S′T′, qui seront parallèles, et le diamètre TOT′, dont la direction divise en parties égales chacune des cordes CD, RE, C′D′, parallèles aux tangentes ST, S′T′. Par les points T, T′, j'élève sur les tangentes, les perpendiculaires T L, T′N, qui rencontreront la normale RM, en des points L, N, situés sur les axes OX, OY; et, aux milieux I, K, I′ des cordes CD, RE, C′D′, j'élève encore des perpendiculaires IH, KP, I′M, dont les directions coupent la normale RM, aux points H, P, M.

Lorsque le centre de la circonference tangente a l'ellipse au point R, sera situe entre les points P, N, par exemple, en M, la circonférence coupera l'ellipse aux deux points C′, D′ (page 75, t. II); elle sera tangente extérieurement en R; l'arc D′T′C′ de l'ellipse sera extérieur au cercle, et l'arc D′TC′, intérieur. La normale MR est alors plus grande que chacune des droites menées du point M aux points de l'ellipse contigus à R; ainsi, par rapport à ces droites la normale est un *maximum*. Il faut toutefois observer qu'elle n'est pas la plus grande des droites menées de M à tous les points de l'ellipse, car toute droite menée de M à un point de l'arc D′T′C′ est plus grande que le rayon RM de la circonférence décrite.

Si le centre de la circonférence est situé entre P et L, par exemple en H, la corde d'intersection des deux courbes sera la droite CD; la circonférence est tangente intérieurement à l'ellipse au point R; l'arc d'ellipse DT′C est extérieur au cercle, et l'arc DTC, intérieur. La normale HR devient alors un *minimum*, par rapport aux droites menées de H aux points de l'ellipse, voisins de R. Mais, elle n'est pas la plus courte distance du point H à l'ellipse, car toute droite menée du point H à l'arc DTC, est moindre que le rayon HR.

En prenant pour centre le point P, la corde d'intersection sera la droite RE. La circonférence décrite sera à la fois sécante et tangente à l'ellipse au point R. L'arc ET′R de l'ellipse est extérieur au cercle, et l'arc ETR, intérieur. La normale PR est plus petite que les droites menées du point P à l'arc ET′R; et elle est au contraire plus grande que les droites menées à l'arc ETR. Ainsi, elle ne représente plus un *maximum* ni un *minimum* (*).

On voit de même qu'en plaçant le centre au point L, où

(*) Cette circonstance est encore indiquée par le calcul. Car, les coordonnées α, β du point P satisfaisant à l'égalité $(a\alpha)^{\frac{2}{3}} + (b\beta)^{\frac{2}{3}} = (c^2)^{\frac{2}{3}}$, celles du point R annulent à la fois les deux premières dérivées de la fonction $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2$, qui représente le carré de la distance du point P à un point de l'ellipse.

la normale coupe le grand axe de l'ellipse, la corde d'intersection des deux courbes se confond avec la tangente TS. La circonférence décrite est alors tangente à l'ellipse aux deux points R, T; et tous les autres points de l'ellipse sont extérieurs au cercle. Que si le centre est au point N, où la normale coupe le second axe, la circonférence touchera l'ellipse aux deux points R, T′; et tous les autres points de l'ellipse sont intérieurs au cercle.

Enfin, si l'on place le centre, en G, dans l'intérieur de l'angle Y′OX des axes, où se trouve le point R, les deux courbes n'auront qu'un seul point commun, R. Le cercle sera entièrement situé dans l'intérieur de l'ellipse, et alors la normale GR est la plus petite de toutes les droites menées du centre G, au contour de l'ellipse. Il en serait de même de la normale G″R. Mais, le contraire a lieu lorsque le centre de la circonférence est en G′ dans l'angle YOX′ opposé au sommet à l'angle Y′OX. L'ellipse est intérieure au cercle, et la normale G′R est la plus grande de toutes les droites menées de G′ au contour de l'ellipse.

Au moyen de ces observations il est facile de reconnaître parmi les normales, la plus grande et la plus petite des droites menées d'un point à l'ellipse.

Supposons que le point donné M (*fig.* 19) soit dans l'angle YOX, et intérieur à la développée de l'ellipse. Il y aura quatre normales. L'une d'elles est tangente à la branche HG′ de la développée, une seconde touche la branche GH′; et les deux autres, la branche GH. La première est la plus grande des droites menées du point M à l'ellipse; car elle est normale en un point de l'arc A′B′, situé dans l'angle des axes, Y′OX′ opposé au sommet à l'angle YOX où se trouve le point donné M. La seconde est la plus courte distance du point M à l'ellipse, puisqu'elle est normale à l'arc AB, situé avec M dans le même angle des axes, YOX. Les deux autres ont des longueurs moyennes. Celle qui touche la développée au point P, entre M et R, est un maximum relatif aux droites menées de M aux points de l'ellipse contigus à R. Et la dernière, dont le prolongement est tangent à l'arc HG de la développée, est un minimum.

8. Les différentes remarques que nous avons faites au sujet des normales à l'ellipse s'appliquent aux normales à l'hyperbole, en ayant toutefois égard à quelques modifications généralement indiquées par le calcul, et qui résultent de ce que l'on passe de l'équation de l'ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ à celle de l'hyperbole $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$ en remplaçant b^2 par $-b^2$.

Si l'on nomme α, β les coordonnées du point M (*fig.* 27), par lequel il faut mener une normale à l'hyperbole ; et x, y les coordonnées du point R, auquel cette droite, MR, est normale à la courbe, on aura, pour déterminer les valeurs des inconnues x, y, les deux équations.

(1)..... $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$, et (2).... $c^2xy-b^2\beta x-a^2\alpha y=0$.

Un calcul absolument semblable à celui qui a été fait (pages 17... 24, nos 1 ...4) donnera l'équation $(ax)^{\frac{2}{3}}-(by)^{\frac{2}{3}}=(c^2)^{\frac{2}{3}}$, ou

$$(3)\ldots\ldots\ \sqrt[3]{a^2x^2}-\sqrt[3]{b^2y^2}=\sqrt[3]{c^4},$$

pour le lieu géométrique des points par lesquels on peut mener trois normales à l'hyperbole. Et, suivant qu'on aura $(a\alpha)^{\frac{2}{3}}-(b\beta)^{\frac{2}{3}}-(c^2)^{\frac{2}{3}}>0$, ou <0, le nombre des normales demandées, sera *quatre* ou *deux*.

La tangente, PD, (*fig.* 27) menée à la courbe que l'équation (3) représente, forme avec l'axe des x, un angle PDX dont la tangente trigonométrique est $\sqrt[3]{\frac{a^2y}{b^2x}}$, les coordonnées du point de contact, P, étant y, x. Si, par un point quelconque M, dont les coordonnées sont α, β, on veut mener une tangente MP à la courbe, on aura pour déterminer y et x, les équations :

$$(3) \qquad \sqrt[3]{a^2x^2}-\sqrt[3]{b^2y^2}=\sqrt[3]{c^4},$$

et

$$(4)\ldots \quad \sqrt[3]{c^4xy}+\beta\sqrt[3]{b^2x}-\alpha\sqrt[3]{a^2y}=0.$$

Et, en posant $x=\dfrac{c^2x'^3}{a^4}$, $y=-\dfrac{c^2y'^3}{b^4}$, il viendra $a^2y'^2-b^2x'^2=-a^2b^2$, et $c^2x'y'-b^2\beta x'-a^2\alpha y'=0$, (pages 72, 73 ; n° 5). Ces deux dernières équations étant précisément celles qu'il faut résoudre pour mener du point M une normale MR à l'hyperbole, lorsque x', y', représentent les coordonnées du point R, on en conclura que les coordonnées des points P, R, sont liées entre elles, par les relations : $x=\dfrac{c^2x'^3}{a^4}$, $y=-\dfrac{c^2y'^3}{b^4}$. Ces relations donnent

$$\frac{y}{x}=-\frac{a^4y'^3}{b^4x'^3}, \text{ ou } \sqrt[3]{\frac{a^2y}{b^2x}}=-\frac{a^2y'}{b^2x'}.$$

C'est-à-dire que les droites MP, MR, forment des angles égaux avec l'axe des x, et par conséquent elles coïncident, puisqu'elles ont un point commun. Donc, *les tangentes à la courbe*

$$\sqrt[3]{a^2x^2}-\sqrt[3]{b^2y^2}=\sqrt[3]{c^4},$$

sont normales à l'hyperbole $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$; et réciproquement.

9. La courbe représentée par l'équation

$$\sqrt[3]{a^2x^2}-\sqrt[3]{b^2y^2}=\sqrt[3]{c^4},$$

se compose de quatre branches GH, GL, G'H', G'L', (*fig.* 27) indéfinies, symétriquement placées par rapport à chacun des axes de l'hyberbole, et qui tournent leurs convexités vers l'axe focal. Elle a pour centre le point O, centre de l'hyperbole. Elle coupe l'axe transverse en des points G, G', dont les distances au point O sont égales à $\frac{c^2}{a}$. On sait d'ailleurs que cette courbe est la *développée* de l'hyperbole.

Les tangentes menées aux différents points de la branche GH, forment avec l'axe OX, des angles aigus dont les valeurs sont d'autant plus grandes que le point de contact est plus éloigné de l'axe OY. C'est ce que l'on voit facilement au moyen de la formule tang PDX $=\sqrt[3]{\frac{a^2y}{b^2x}}$, en observant que l'équation de la courbe $\sqrt[3]{a^2x^2}-\sqrt[3]{b^2y^2}=\sqrt[3]{c^4}$, donne : $\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}=\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}-\sqrt[3]{\frac{c^4}{b^2x^2}}$. Lorsqu'on suppose $x=\infty$, il vient $\frac{y}{x}=\frac{a}{b}$, et par suite : tang PDX$=\frac{a}{b}$. Ce qui montre que la tangente PDR est alors perpendiculaire sur l'asymptote OC à l'hyperbole. Ce résultat pouvait être prévu, car le point P étant à l'infini, il en est de même du point R, et la tangente RS à l'hyperbole se confond avec l'asymptote OC. La tangente PDR passant entièrement à l'infini, pour une valeur infinie de x, nous en conclurons que la courbe GH n'a pas d'asymptote

Les coordonnées α, β d'un point M (*fig.* 27) situé entre les deux branches GH, GL, donnent évidemment $\sqrt[3]{a^2\alpha^2}-\sqrt[3]{b^2\beta^2}-\sqrt[3]{c^4}>0$; et, il en est de même pour tout point situé entre les branches G'H', G'L'. Si le point considéré est en M', hors de la partie du plan de la courbe comprise entre GH, GL, ou bien entre G'H', G'L', les coordonnées α, β, satisferont, au contraire, à l'inégalité $\sqrt[3]{a^2\alpha^2}-\sqrt[3]{b^2\beta^2}-\sqrt[3]{c^4}<0$.

Dans le premier cas, on pourra mener du point M quatre normales à l'hyperbole (n° 8); et dans le second, seulement deux normales.

Pour chaque position du point considéré, il sera facile de reconnaître comment les normales sont dirigées, et à quelles branches de l'hyperbole, elles sont normales. En effet, supposons que les coordonnées α, β, soient positives et satisfassent à l'inégalité $\sqrt[3]{a^2\alpha^2}-\sqrt[3]{b^2\beta^2}-\sqrt[3]{c^4}>0$. Le point donné se trouvera dans l'angle YOX, entre les branches GH, GL. Il y aura quatre normales. Deux seront des tangentes MP, MQ, à la branche GH de la développée; la troisième coïncidera avec la tangente ML à la branche GL, et la quatrième touchera G'L' au point N. Or, les relations $x=\frac{c^2x'^3}{a^4}$, $y=-\frac{c^2y'^3}{b^4}$, qui existent entre les coordonnées x, y, x', y', des points P, R (n° 8), montrent que ces points sont toujours situés d'un même côté de l'axe des y, et de différents côtés de l'axe des x. Donc, les tangentes MP, MQ, seront normales à l'hyperbole en des points R, T de la branche AR. La tangente ML sera normale en un point E de la branche AE; et la quatrième MN, est normale en un point I de A'E'. Les quatre points R, T, E, I, sont les intersections des hyperboles $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$, et $c^2xy-b^2\beta x-a^2\alpha y=0$.

Si les coordonnées α, β, sont positives, et satisfont à l'équation $\sqrt[3]{a^2x^2}-\sqrt[3]{b^2y^2}=\sqrt[3]{c^4}$, le point donné se trouvera sur l'arc GH de la développée, les normales MR, MT se confondront, et alors l'hyperbole $c^2xy-b^2\beta x-a^2\alpha y=0$, touchera au point R l'hyperbole $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$, et de plus, elle la coupera en deux autres points appartenant aux branches AE, A'E'. Enfin, lorsque les coordonnées positives, α, β, donneront $\sqrt[3]{a^2\alpha^2}-\sqrt[3]{b^2\beta^2}-\sqrt[3]{c^4}<0$, le point donné sera en M′ extérieur à la partie du plan comprise entre GL, GH. Il y aura seulement deux normales. L'une d'elles sera tangente à GL; et l'autre, à G′L′. Elles rencontreront l'hyperbole en des points situés sur les branches AE, A′E′. Dans ce dernier cas, les hyperboles $a^2y-b^2x^2=-a^2b^2$, et $c^2xy-b^2\beta x-a^2\alpha y=0$, se coupent seulement en deux points.

10. Pour que la développée $\sqrt[3]{a^2x^2}-\sqrt[3]{b^2y^2}=\sqrt[3]{c^4}$, rencontre l'hyperbole $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$, il faut et il suffit qu'on ait $a>b$. La résolution directe des équations des deux courbes conduit à ce résultat, mais on peut aussi faire le calcul de la manière suivante. Supposons que le point P appartienne aux deux courbes, et menons la tangente PR (*fig.* 27) à la développée; cette droite PR sera normale à l'hyperbole au point R. Soient x, y, les coordonnées de P; et x', y', les coordonnées de R. On aura :

$$x=\frac{c^2x'^3}{a^4},\ y=-\frac{c^2y'^3}{b^4},\ a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2.$$

$$a^2y'^2-b^2x'^2=-a^2b^2.$$

Les trois premières équations donnent :

$$a^{10}c^4y'^6-b^{10}c^4x'^6=-a^{10}b^{10}.$$

De la quatrième, on tire $a^6y'^6=b^6(x'^2-a^2)^3$. Ou,

$$a^{10}c^4y'^6=a^4c^4b^6(x'^2-a^2)^3.$$

Et par suite, on a :

$$c^4(a^4-b^4)x'^6+3c^4a^6(a^2-x'^2)x'^2+a^{10}(b^4-c^4)=0.$$

Si les deux courbes se coupent, cette dernière équation doit admettre une racine plus grande que a, et finie; et cette condition est d'ailleurs suffisante. Or, toute valeur de x' plus grande que a rend négatif le produit $3c^4a^6(a^2-x'^2)x'^2$. De plus, le dernier terme $a^{10}(b^4-c^4)$ est évidemment négatif. Le premier terme $c^4(a^4-b^4)x'^6$, doit par conséquent être positif, pour qu'il soit possible de satisfaire à l'équation proposée, par une valeur finie de x' et plus grande que a. C'est-à-dire qu'on doit avoir $a > b$.

Lorsque $a > b$, le premier terme de l'équation a un coefficient positif. Et, si l'on remplace x' par a le premier membre se réduit à $a^6b^4(a^4 - c^4)$, qui est une quantité négative ; donc, l'équation admet une racine plus grande que a, et finie.

De là, on conclura les corollaires suivants :

1° Si l'axe transverse d'une hyperbole est plus grand que le second axe, il existe sur l'hyperbole quatre points tels que par chacun d'eux, on peut mener trois normales à la courbe. Ces points se trouvent à l'intersection de l'hyperbole et de sa developpée. Par un point pris sur une des branches de l'hyperbole, et plus éloigné du sommet que les intersections dont il s'agit, on pourra mener quatre normales. Mais si, au contraire, ce point est plus rapproché du sommet que les intersections des courbes, il y aura seulement deux normales.

2° Lorsque l'axe transverse est égal au second axe, ou plus petit, on ne peut, par un point de l'hyperbole, mener plus de deux normales à cette courbe.

11. On peut encore démontrer que la courbe

$$\sqrt[3]{a^2x^2} - \sqrt[3]{b^2y^2} = \sqrt[3]{c^4}$$

est le lieu géométrique des centres des cercles *osculateurs* à l'hyperbole (p. 76). En effet, supposons que par un point R de l'hyperbole (*fig.* 28), on conduise la tangente RS, et la normale RMP. Puis, d'un point M de cette normale, comme centre, décrivons une circonférence tangente à la branche EAR en R, et qui coupe la même branche aux deux points D,C. Quelle que soit la position du centre M sur RM, la corde CD restera parallèle à la tangente BN menée à l'hyperbole par le point B, auquel la tangente RS coupe l'axe transverse. La démonstration de ce principe est semblable à celle qui a été donnée pour l'ellipse (p. 75).

Réciproquement, si la corde DC est parallèle à la tangente BN, la circonférence passant par les points C,D,R, sera tangente à la droite BRS, au point R (p. 76). Lorsque la corde DC coïncide avec la corde RE parallèle à BN, trois des points communs à la circonférence et à l'hyperbole se confondent en un seul R, et le quatrième est E. Alors, le cercle est *osculateur* à l'hyperbole au point R. Ainsi, pour trouver le centre P du cercle osculateur à l'hyperbole en un point donné R, il suffit de tirer la corde RE parallèle à BN, et d'élever sur le milieu de cette corde une perpendiculaire HP, qui coupera la normale RM, au centre cherché. En appliquant le calcul à cette construction graphique (p. 76...78), on obtiendra, pour l'équation du lieu géométrique des centres des cercles osculateurs: $\sqrt[3]{a^2x^2}-\sqrt[3]{b^2y^2}=\sqrt[3]{c^4}$.

Le *rayon de courbure* de l'hyperbole au point R, est la droite RP. La longueur de cette droite est donnée en fonction de l'abscisse x' de R, par l'égalité $\overline{\mathrm{RP}}^2=\frac{(c^2x'^2-a^4)^3}{a^8b^2}$ (p. 78). La valeur de RP augmente avec x', et devient infinie lorsque $x'=\infty$. Si l'on suppose $x'=a$, il en résultera $\frac{(c^2x'^2-a^4)^3}{a^8b^2}=\frac{b^4}{a^2}$. Donc (*fig.* 27), $\overline{\mathrm{AG}}^2=\frac{b^4}{a^2}$; d'où $\mathrm{AG}=\frac{b^2}{a}$. Pour déterminer le centre G du cercle osculateur au sommet A, de l'hyperbole, il suffit de mener la tangente AK (*fig.* 27.), qui rencontre l'asymptote OB, au point K, et d'élever la perpendiculaire KG à l'asymptote; cette perpendiculaire prolongée rencontrera l'axe transverse au centre G du cercle osculateur. Car, la construction donne $\mathrm{OG}=\frac{c^2}{a}$, d'où $\mathrm{AG}=\frac{c^2}{a}-a=\frac{b^2}{a}$.

12. Lorsque la courbe du second ordre est une parabole $y^2=2px$, on détermine les normales menées par le point M (*fig.* 29), dont les coordonnées sont α,β, au moyen des équations

$$y^2 = 2px,\quad yx-(\alpha-p)\,y-p\beta=0,$$

qui donnent immédiatement

$$y^3-2p(\alpha-p)y-2p^2\beta=0.$$

Le nombre des normales est donc *trois*, *deux*, ou bien *un*, suivant que $27.p\beta^2-8(\alpha-p)^3$ est négatif, nul, ou positif. Par conséquent, le lieu géométrique des points par lesquels on peut mener précisément deux normales, a pour équation: $27.py^2-8(x-p)^3=0$. La courbe, que cette équation représente, se compose de deux branches indéfinies SN,SL(*fig.* 29), qui tournent leur convexité vers l'axe de la parabole; elle est divisée par l'axe en deux parties égales et symétriques. La tangente HM, menée à la branche SL, en un point H dont les coordonnées sont x,y, fait avec l'axe des x un angle qui a pour tangente $\frac{4(x-p)^2}{9.p.y}$, ou $\sqrt[3]{\frac{y}{p}}$. Si l'on observe que $\sqrt[3]{\frac{y}{p}}$ devient $\frac{-y'}{p}$, lorsqu'on remplace y par $\frac{-y'^3}{p^2}$, il sera facile de reconnaître que les tangentes à la courbe

$$27py^2-8(x-p)^3=0,$$

sont normales à la parabole $y^2=2px$, et réciproquement.

En effet, soient y',x' les coordonnées d'un point quelconque, G, de la parabole. Prenons sur SL un point H dont l'ordonnée $y=\frac{-y'^3}{p^2}$. L'abscisse x de H sera donnée par l'équation $27.py^2-8(x-p)^3=0$. Donc, $x-p=\frac{3}{2}\sqrt[3]{py^2}$, ou $x-p=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{y'^6}{p^3}}=\frac{3y'^2}{2p}=3x'$. Ainsi $x=p+3x'$. La tangente de l'angle que la droite GH fait avec l'axe des abscisses est $\frac{y-y'}{x-x'}$. Mais

$$\frac{y-y'}{x-x'}=-\left(\frac{\frac{y'^3}{p^2}+y'}{p+2x'}\right)=-\frac{y'(y'^2+p^2)}{p(p^2+2px')}=\frac{-y'}{p}=\sqrt[3]{\frac{y}{p}}.$$

Par conséquent, la droite GH est, à la fois, normale à la parabole au point G, et tangente à SL au point H. C'est ce qu'il fallait démontrer.

13. La relation $y=\frac{-y'^3}{p^2}$ montre que les points H et G sont toujours situés de différents côtés de l'axe AX de la parabole. D'après cela on voit comment sont dirigées les normales menées d'un point donné M, et à quelles branches de la parabole elles sont normales. Supposons que les coordonnées α, 6 de M (*fig.* 29), soient positives et satisfassent à l'inégalité $27p6^2-8(\alpha-p)^3<0$. Il y aura trois normales (n° 12). Les deux premières, dirigées suivant les tangentes MH, ML à SL, sont normales en des points G, I de la parabole, situés au-dessous de l'axe AX. La troisième, dirigée suivant la tangente MN à SN, est normale en un point K, situé avec M au-dessus de l'axe AX. Les trois points G,I,K sont les intersections de la parabole donnée et de l'hyperbole

$$yx-(\alpha-p)y-p6=0.$$

Si les coordonnées α, 6 satisfont à l'égalité

$$27p6^2-8(\alpha-p)^3=0,$$

le point M sera sur SL en H. La droite MI coïncide alors avec MG ; l'hyperbole est tangente à la parabole au point G, et la coupe en un point de la branche AC'. Enfin, lorsque

$$27p6^2-8(\alpha-p)^3>0,$$

le point M a la position M'; les tangentes MG, MI n'existent plus ; la tangente MN passe par M′, et son prolongement est une normale à la branche AC′. Dans ce cas, les deux courbes $y^2 = 2px$, et $yx—(\alpha—p)y—p\delta = 0$, se coupent en un seul point sur AC′.

14. Pour trouver les coordonnées des intersections de la parabole et de la courbe LSN, il faut résoudre le système d'équations $y^2 = 2px$, $27py^2—8(x—p)^3 = 0$. L'élimination de y donne $27.p^2x—4(x—p)^3 = 0$. Cette dernière équation admet évidemment pour racine la valeur $4p$. Il en résulte $y^2 = 8p^2$, d'où $y = \pm\, 2p\sqrt{2}$. Les deux autres racines de

$$27\, p^2x—4(x—p)^3 = 0,$$

sont égales à $\frac{—p}{2}$, et donnent pour y l'expression imaginaire $\pm p\sqrt{—1}$. Ainsi, les points communs à ces deux courbes se trouvent sur une perpendiculaire à l'axe de la parabole, à une distance du *sommet* égale au double du *paramètre*.

15. Si d'un point quelconque de la normale GM, comme centre, on décrit une circonférence tangente à la parabole en G, et qui coupe cette courbe en deux autres points O,C (*fig.* 29); la corde d'intersection OC, fera avec l'axe AX un angle supplémentaire de celui que la tangente GE forme avec le même axe. Ainsi, la corde OC conserve constamment la même direction, quelle que soit la position du centre sur la normale. En effet, prolongeons OC jusqu'à la rencontre de la tangente GE au point E. Puis, menons parallèlement à OC la tangente QB, qui coupe GE en B. On aura, d'après le théorème de *Newton*, $\frac{\overline{QB}^2}{\overline{GB}^2} = \frac{EO\times EC}{\overline{EG}^2} = 1$. Donc, QB=GB ; et par conséquent le point B est sur l'axe de la parabole. Il s'en suit que la direction de OC est invariable.

Réciproquement, si la corde OC est parallèle à la tangente BQ, la circonférence passant par C,O,G touchera la droite BG, au point G. Car $\frac{EO \times EC}{\overline{EG}^2} = \frac{\overline{QB}^2}{\overline{GB}^2} = 1$, donc $EO \times EC = \overline{EG}^2$.

Supposons, maintenant, que la corde OC, en conservant une direction parallèle à BQ, se rapproche de plus en plus du point G. Les circonférences passant par C,O,G seront tangentes à la parabole en G, et couperont cette courbe en deux autres points O,C dont l'un, O, se rapproche continuellement de G. Lorsque OC coïncide avec la corde GC', parallèle à BQ, trois des points communs aux deux courbes se confondent en un seul G, le quatrième est en C'; alors, le cercle est *osculateur* à la parabole au point G, son centre est à l'intersection de la normale GM et d'une perpendiculaire élevée au milieu, D, de la corde GC'.

On peut, au moyen d'un calcul très-simple, démontrer que le lieu géométrique des centres des cercles osculateurs à la parabole, a pour équation $27.py^2 - 8(x-p)^3 = 0$. Car, si l'on nomme x', y' les coordonnées du point G, l'équation de la corde GC', parallèle à BQ, sera $y - y' = -\frac{p}{y'}(x - x')$. D'ailleurs, l'équation du diamètre QD est évidemment $y = -y'$ On a donc, pour déterminer l'abscisse du point D,

$$2y'^2 = p(x - x'), \text{ d'où } x - x' = 4x', \quad x = 5x'.$$

D'après cela, l'équation de la perpendiculaire élevée au milieu de GC', devient $y + y' = \frac{y'}{p}(x - 5x')$; l'équation de la normale GM est $y - y' = \frac{y'}{p}(x' - x)$ additionnant, on trouve $y = \frac{-2y'x'}{p} = \frac{-y'^3}{p^2}$, pour l'ordonnée du centre du cercle osculateur. En retranchant l'une de l'autre les mêmes équations, il vient $2y' = \frac{y'}{p}(2x - 6x')$, d'où $x = p + 3x'$. Cette valeur de x est l'abscisse du centre. L'élimination de y', x' entre les trois équations

$$y = \frac{-y'^3}{p^2}, \qquad x = p+3x', \qquad y'^2 = 2px',$$

donne

$$27.py^2 - 8(x-p)^3 = 0.$$

16. De la relation $x=p+3x'$, on déduit $x+\frac{p}{2}=3\left(x'+\frac{p}{2}\right)$. C'est-à-dire que la distance de la directrice TR au centre H, du cercle osculateur en G, est triple de la distance de cette droite TR au point G. Il en résulte HR=3GR, et HG=2GR. Ainsi, pour déterminer le centre H du cercle osculateur en un point quelconque G de la parabole, il suffit de prolonger la normale GM jusqu'à la rencontre de la directrice au point R, et de prendre GH=2GR (*).

La longueur de la droite GH, *rayon de courbure* de la parabole au point G, s'exprime en fonction de l'abscisse x' par l'égalité

$$\overline{GH}^2 = (y-y')^2+(x-x')^2 = \left(\frac{y'^3}{p^2}+y'\right)^2+(p+2x')^2 =$$
$$= \frac{y'^2}{p^2}(2x'+p)^2+(p+2x')^2.$$

D'où

$$\overline{GH}^2 = (2x'+p)^2\left(\frac{y'^2+p^2}{p^2}\right) = \frac{(2x'+p)^3}{p}.$$

Le rayon de courbure augmente avec l'abscisse x'. Lorsque $x'=0$, on a $\frac{(2x'+p)^3}{p}=p^2$; le rayon AS$=p$. Si $x'=\infty$, on a de même GH $=\infty$.

17. Nous terminerons cet article en indiquant le moyen de

(*) Cette remarque est due à *M. Poncelet*. — La construction indiquée (p. 79), pour trouver les centres des cercles osculateurs aux sommets de l'ellipse, est consignée dans un recueil de *Tables mathématiques*, ouvrage encore inédit de *M. Barre*, officier supérieur d'artillerie en retraite.

trouver les normales à la parabole menées d'un point quelconque M, par les intersections de la parabole et d'une circonférence.

Pour obtenir les coordonnées des points auxquels les normales rencontrent la parabole, il faut résoudre les équations

$$(1)\ldots y^2 = 2px, \qquad yx-(\alpha-p)y-p\beta = 0,\ldots(2),$$

α, β étant les coordonnées de M. Si l'on multiplie par y tous les termes de l'équation (2), il vient $y^2x-(\alpha-p)y^2-p\beta y=0$, ou, (3)....$x^2-(\alpha-p)x-\frac{\beta y}{2}=0$, parce que $y^2=2px$. Ajoutant membre à membre les équations (1), (3), on trouve :

$$y^2+x^2-(\alpha+p)x-\frac{\beta y}{2}=0\ldots(4).$$

L'équation (4) représente une circonférence qui passe par les points communs aux courbes (1) et (2). Cette circonférence coupe aussi la parabole à son sommet ; c'est là une solution étrangère, introduite dans le calcul lorsqu'on a multiplié par y l'équation (2). Si des autres points d'intersection de la circonférence et de la parabole on tire des lignes droites au point donné, M, on aura les normales cherchées. G.