VACHETTE

Question d'algèbre, proposée au concours de l'École normale

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 133-137

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__133_1>

QUESTION D'ALGÈBRE

Proposée au concours de l'École normale (p. 393, t. I).

PAR M VACHETTE.

Première solution par l'élimination.

Remarquons que si on cherche l'équation aux quotients de $f(x)=0$, elle contiendra les racines $\frac{x}{x'}$, $\frac{x'}{x}$, elle sera donc réciproque. Mais $z = \frac{x}{x'} + \frac{x'}{x}$ est la somme de deux racines réciproques de cette équation aux quotients, donc, pour avoir l'équation cherchée, il suffira d'abaisser à un degré sous-double, comme on sait le faire, le degré de l'équation réciproque. Cette équation en z contiendra, outre les racines $\frac{x}{x'}+\frac{x'}{x}$, des racines égales à 2 provenant des racines égales à 1 de l'équation réciproque ; pour les faire disparaître de l'équation en z, il suffira de les faire disparaître de l'équation aux quotients. (Pour la recherche de l'équation aux quotients et l'élimination des racines 1 avant le calcul, *voir* Reynaud et Duhamel, *Problèmes et Développements sur certaines parties des Mathématiques.*)

Appliquons le calcul à l'équation

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0,$$

il faudra éliminer x et x' entre

$$f(x) = 0, \quad f(x')=0, \quad y = \frac{x'}{x},$$

$$\text{ou } x \quad \text{entre} \quad f(x) = 0 \quad \text{et} \quad f(yx) = 0,$$

$$\text{ou} \quad \text{entre} \quad f(yx) - f(x) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = 0,$$

ou bien entre

$$(y^3-1)x^3 - 3(y-1)x = 0$$
$$x^3 - 3x + 1 = 0.$$

Mais

$$(y^3-1)x^3 - 3(y-1)x = (y-1)\left\{(y^2+y+1)x^3 - 3x\right\};$$

si on ôte le facteur $y-1=0$, on supprime dans l'équation finale trois racines égales à 1, et l'on a à éliminer entre

$$(y^2+y+1)x^3 - 3x = 0,$$
$$x^3 - 3x + 1 = 0;$$

si on supprime $x=0$, on n'altère pas l'équation finale, car $x=0$ ne peut convenir à la deuxième équation.

On a seulement à traiter

$$(y^2+y+1)x^2 - 3 = 0, \qquad x^3 - 3x + 1 = 0,$$

d'où

$$x^2 = \frac{3}{y^2+y+1}, \quad \frac{3x}{y^2+y+1} - 3x + 1 = 0, \quad x = \frac{y^2+y+1}{3y(y+1)}$$

Égalant les deux valeurs de x^2, on a l'équation finale en y

$$\frac{3}{y^2+y+1}=\frac{(y^2+y+1)^2}{9y^2(y+1)^2},$$

et enfin

$$y^6+3y^5-21y^4-47y^3-21y^2+3y+1=0,$$

cette équation étant réciproque, on a pour l'équation cherchée

$$z^3+3z^2-24z-53=0.$$

Deuxieme solution par les fonctions symétriques.

Soit m le degré de $f(x)=0$, le degré de l'équation en z est $\frac{m(m-1)}{1.2}$, nombre des combinaisons de m choses 2 à 2. Il suffit d'avoir l'expression générale des sommes $S'_1, S'_2 \ldots S'_n$, de $\varphi(z)=0$.

Or

$$S'_n=\Sigma\left(\frac{x}{x'}+\frac{x'}{x}\right)^n=\Sigma\left\{\frac{x^n}{x'^n}+\frac{n}{1}\cdot\frac{x^{n-1}}{x'^{n-1}}\cdot\frac{x'}{x}+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{x^{n-2}}{x'^{n-2}}\cdot\frac{x'^2}{x^2}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{x^2}{x'^2}\cdot\frac{x'^{n-2}}{x^{n-2}}+\frac{n}{1}\cdot\frac{x}{x'}\cdot\frac{x'^{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{x'^n}{x^n}\right\},$$

$$=\Sigma\left\{\left(\frac{x^n}{x'^n}+\frac{x'^n}{x^n}\right)+\frac{n}{1}\left(\frac{x^{n-2}}{x'^{n-2}}+\frac{x'^{n-2}}{x^{n-2}}\right)+\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{x^{n-4}}{x'^{n-4}}+\frac{x'^{n-4}}{x^{n-4}}\right)+\ldots\right\};$$

Il faut distinguer deux cas :

1° $n=2p$

$$S'_{2p}=\Sigma\left\{\left(\frac{x^{2p}}{x'^{2p}}+\frac{x'^{2p}}{x^{2p}}\right)+\frac{2p}{1}\left(\frac{x^{2p-2}}{x'^{2p-2}}\right)+\ldots\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\ldots+\frac{2p(2p-1)\ldots\ldots(p+2)}{1.2\ldots\ldots(p-1)}\left(\frac{x^2}{x'^2}+\frac{x'^2}{x^2}\right)+\frac{2p(2p-1)\ldots(p+1)}{1.2\ldots\ldots p}\right\};$$

en remarquant que

$$\Sigma\frac{2p(2p-1)\ldots(p+1)}{1.2\ldots\ldots p}=\frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{2p(2p-1)\ldots\ldots p+1)}{1.2\ldots\ldots p};$$

2° $n=2p+1$

$$S'_{2p+1}=\Sigma\left\{\left(\frac{x^{2p+1}}{x'^{2p+1}}+\frac{x'^{2p+1}}{x^{2p+1}}\right)+\frac{2p+1}{1}\left(\frac{x^{2p-1}}{x'^{2p-1}}+\frac{x'^{2p-1}}{x^{2p-1}}\right)+\ldots\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\ldots+\frac{(2p+1)2p(2p-1)\ldots(p+2)}{1.2\ldots\ldots p}\left(\frac{x}{x'}+\frac{x'}{x}\right)\right\}.$$

Il suffit d'avoir généralement $\Sigma\left(\frac{x^n}{x'^n}+\frac{x'^n}{x^n}\right)$. Rappelons-nous la forme générale d'une équation

$$x^m-A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}-A_3x^{m-3}\ldots\ldots\pm A_m=0,$$

et les valeurs de A_1, A_2, $A_3\ldots.A_m$ en fonction des racines. On a

$$\Sigma\left(\frac{x^n}{x'^n}+\frac{x'^n}{x^n}\right)=\Sigma\,\frac{x^{2n}+x'^{2n}}{x^nx'^n}=\frac{1}{A^n_m}\,\Sigma(x^{2n}+x'^{2n})x''^nx'''^nx^{\mathrm{iv}n}\ldots\ldots$$

$$\Sigma(x^{2n}+x'^{2n})x''^nx'''^n\ldots\ldots\ldots$$

$$=\Sigma\left\{x^n\,(x^nx''^nx'''^n\ldots+x^nx'^nx'''^n\ldots+x^nx'^nx''^n\ldots+)+x'^n(\ldots)+\ldots\right\}$$

Dans la parenthèse qui multiplie x^n, on a la somme des produits $m-1$ à $m-1$ des $n^{\text{èmes}}$ puissances des racines de $f(x)=0$, diminuée du produit $x'^nx''^nx'''^n\ldots.$, où n'entre pas le facteur x^n ; il en sera de même pour la parenthèse qui multiplie x'^n, pour $x''^n\ldots\ldots$, donc on a, en désignant par $P_{m-1,n}$ la somme de ces produits

$$\Sigma(x^{2n}+x'^{2n})\,x''^nx'''^n\ldots\ldots\ldots$$

$$=\Sigma\left\{x^nP_{m-1,n}-A^n{}_m+x'^nP_{m-1,n}-A^n{}_m+x''^nP_{m-1,n}-A^n{}_m+\ldots\right\}$$

$$=\Sigma x^nP_{m-1,n}-\Sigma A^n{}_m=P_{m-1,n}S_n-mA^n{}_m;$$

donc

$$\Sigma\left(\frac{x^n}{x'^n}+\frac{x'^n}{x^n}\right)=\frac{P_{m-1,n}S_n}{A^n_m}-m.$$

Pour avoir $P_{m-1,n}$, on cherche l'équation $\varphi(t)=0$, telle que $t=x^n$; l'équation en t sera du degré m, une somme quelconque Σ_p des racines de $\varphi(t)=0$, sera

$$\Sigma_p=(x^n)^p+(x'^n)^p+\ldots\ldots\ldots\ldots=S_{pn},$$

somme de l'équation de $f(x)=0$, que l'on obtient à l'aide des coefficients.

La question est donc résolue.

Appliquons à $f(x)=x^3-3x+1$; il faut chercher S'_1, S'_2, S'_3 :

$$S'_1=\Sigma\left(\frac{x}{x'}+\frac{x'}{x}\right)=\frac{P_{2,1}S_1}{A_3}-3,$$

$$S'_2=\Sigma\left(\frac{x^2}{x'^2}+\frac{x'^2}{x^2}\right)+\frac{3.2}{1.2}\cdot\frac{2}{1}=\frac{P_{2,2}S_2}{A^2_3}-3+6,$$

$$S'_3=\Sigma\left(\frac{x^3}{x'^3}+\frac{x'^3}{x^3}\right)+3\Sigma\left(\frac{x}{x'}+\frac{x'}{x}\right)=\frac{P_{2,3}S_3}{A^3_3}-3+3S'_1$$

On trouve

$$\begin{array}{ll} S_1=0 & P_{2,2}=9, \\ S_2=6 & P_{2,3}=-24, \\ S_3=-3, & \\ S_4=18, & \\ S_5=-15, & \\ S_6=57, & \end{array}$$

$$S'_1=-3 \qquad\qquad A'_1=-3,$$

$$S'_2=\frac{9.6}{(-1)^2}+3=57, \qquad \text{d'ou} \qquad A'_2=-24,$$

$$S'_3=\frac{-24.-3}{(-1)^3}-3+3.-3=-84 \qquad\qquad A'_3=+53.$$

L'équation en z est, comme par la première méthode,

$$z^3+3z^2-24z-53=0.$$