Nouvelles annales de mathématiques

L. Wantzel

Classification des nombres incommensurables d'origine algébrique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 117-127

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__117_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1843, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

CLASSIFICATION

DES

NOMBRES INCOMMENSURABLES D'ORIGINE ALGÉBRIQUE.

PAR M. L. WANTZEL,
Repétiteur à l'École polytechnique.

—

Ce travail a pour but de montrer que l'extraction des racines des divers degrés donne naissance à des nombres incommensurables essentiellement différents, et que, par la résolution des équations numériques de degré supérieur au second, on obtient de nouvelles quantités irrationnelles qui ne peuvent s'exprimer par des radicaux. Nous avons reproduit quelques principes que nous avions démontrés antérieurement (*).

I. *Principes.*

1. On appelle équation *irréductible* celle qui n'a pas de racines communes avec une équation de degré plus simple et à coefficients rationnels. Il résulte de cette définition que, si une équation quelconque admet une ou plusieurs racines d'une équation irréductible, elle les admettra toutes : car autrement les racines communes pourraient être données par une équation de degré moindre. De plus, quand ces racines communes sont multiples dans la première équation, elles y entrent toutes au même degré de multiplicité. Il est presque superflu de faire remarquer que les équations irréductibles n'ont jamais de racines égales.

2. Soit $f(x)=0$ une équation irréductible de degré m, et a une de ses racines. Si une fonction rationnelle $\varphi\,(a)$ satisfait à une équation $\mathrm{F}(x)=0$, elle satisfera encore en remplaçant la racine a par chacune des m racines de $f(x)=0$, puisque $\mathrm{F}\,\big(\varphi(x)\big)=0$ doit admettre toutes les racines de cette équation. On peut toujours former une équation $\mathrm{F}\,(x)=0$, de degré m, qui ait pour racines les valeurs de $\varphi\,(a)$. Comme elle peut bien, lorsque ces valeurs ne sont pas toutes différentes, n'être pas irréductible, supposons que $\varphi\,(a)$ soit racine d'une équation irréductible de degré $n<m$. Il faudra que les racines de cette équation entrent le même nombre de fois dans $\mathrm{F}\,(x)=0$, et par suite que n soit un diviseur de m, puisque celle-ci n'a pas d'autres racines. Si m

(*) *Journal de l'École polytechnique*, cahier XXV, p. 151, 1837.

est premier, on en conclut que $n=m$ ou $n=1$; mais dans ce dernier cas $\varphi(a)$ se réduirait à un nombre et ne serait plus fonction de a. Donc, quand m *est un nombre premier, toute fonction rationnelle d'une racine de l'équation* f (x) $=0$ *est racine d'une équation irréductible de même degré.*

3. Un radical est *irréductible* quand on ne peut obtenir une quantité rationnelle en l'élevant à une puissance moindre que son indice.

Les radicaux dont l'indice est un nombre premier sont irréductibles, à moins qu'ils ne soient commensurables.

On pourrait regarder ce principe comme une conséquence de la manière dont on simplifie un radical ; mais il est plus convenable de le démontrer directement. Soit donc $(\sqrt[m]{a})^n=b$, m étant un nombre premier et plus grand que n ; les équations $x^m=a$, $x^n=b$ admettront une racine commune, et elles n'en admettront pas plus d'une, sans quoi deux nombres auraient à la fois la même puissance m^e et la même puissance n^e, ce qui est impossible quand m est premier avec n · alors la racine commune $\sqrt[m]{a}$ doit être commensurable.

4. Quand le radical $\sqrt[m]{a}$ est irréductible, l'équation binôme $x^m-a=0$ l'est également.

En effet, si n racines de cette équation pouvaient satisfaire à une équation de degré moindre, il faudrait que leur produit fût rationnel. Or chaque racine de $x^m-a=0$ est égale à $\sqrt[m]{a}$, multiplié par une racine m^e de l'unité, en sorte que le produit de n racines sera $(\sqrt[m]{a})^n\times\alpha$, en désignant par α un produit de racines de l'unité qui est encore une racine m^e de l'unité Pour que cette expression soit réelle, il faut que α soit égal à ±1 ; et, elle se réduit alors à $(\sqrt[m]{a})^n$ qui ne peut être rationnel quand le radical $\sqrt[m]{a}$ est irréductible.

On appliquerait le même raisonnement à l'équation $x^m + aA^m = 0$.

Ainsi, d'après ce qui précède (3), *toute équation binôme de degré* m *est toujours irréductible, lorsque* m *est un nombre premier, à moins qu'elle n'admette une racine commensurable.*

II. *Classification des radicaux incommensurables.*

5. Deux radicaux sont *semblables* quand leur rapport est rationnel.

Il résulte de là que deux radicaux irréductibles et dissemblables $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, ne peuvent se réduire de manière que $A\sqrt[m]{a} + B\sqrt[n]{b} = 0$. On n'aura pas non plus $A\sqrt[m]{a} + B\sqrt[n]{b} = H$. en désignant par A, B, H des quantités rationnelles positives ou négatives. L'impossibilité de cette dernière relation se démontre sans peine quand le plus petit indice n est égal à 2. On peut encore l'établir facilement pour tous les cas, en élevant les deux membres à la puissance n^e, après avoir isolé le second radical ; car il vient alors :

$$A^m(\sqrt[m]{a})^n - nA^{m-1}H(\sqrt[m]{a})^{n-1} + \ldots\ldots = B^n b;$$

ce qui est impossible puisqu'une racine de l'équation irréductible $x^m = a$ ne peut satisfaire à une équation de degré $n < m$. Si n était égal à m, l'équation ci-dessus deviendrait de degré $n-1$ en remplaçant $(\sqrt[m]{a})^n$ par a, et le résultat serait le même.

Il serait difficile de faire voir par ce mode de raisonnement que des radicaux en nombre quelconque ne peuvent se réduire à une quantité rationnelle. Ce théorème général peut se démontrer immédiatement par un procédé différent.

6. *La somme de plusieurs radicaux irréductibles et dissem-*

blables multipliés respectivement par des quantités rationnelles positives ou négatives, ne peut être égale à zéro ni à un nombre commensurable.

Ainsi, il est impossible que l'on ait la relation suivante :

$$A\sqrt[m]{a}+B\sqrt[n]{b}+C\sqrt[p]{c}+\ldots\ldots=H,$$

où A, B, C,.... H désignent des quantités rationnelles quelconques, et a, b, c... des nombres positifs.

Écartons tout d'abord le cas où H serait nul. Car s'il se présentait, on diviserait par $\sqrt[m]{a}$, et l'on obtiendrait :

$$B\frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[m]{a}}+C\frac{\sqrt[p]{c}}{\sqrt[m]{a}}+\ldots\ldots=-A;$$

relation de même forme que la première, puisque les quotients de $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[p]{c}$... par $\sqrt[m]{a}$ sont des radicaux dissemblables (5).

Faisons le produit des valeurs que prend la somme $Ax+By+Cz+\ldots.-H$, lorsqu'on y remplace y, z.... par toutes les racines des équations $y^n-b=0$, $z^p-c=0$.... Ce produit sera une fonction symétrique des racines de ces équations, et se réduira à un polynôme à coefficients rationnels F (x).

Comme l'un des facteurs devient nul quand on remplace x par $\sqrt[m]{a}$, l'équation F $(x)=0$ est satisfaite par une racine de l'équation irréductible $x^m-a=0$, et par conséquent par toutes les autres. Il y a donc m facteurs de la forme

$$Ax+By+Cz+\ldots.-H,$$

qui sont nuls pour des valeurs convenables de y, z...., en mettant successivement à la place de x toutes les racines de l'équation $x^m-a=0$. Si parmi les facteurs de F (x) il y en a plus de m qui deviennent nuls par cette substitution, leur nombre N sera un multiple de m, puisque l'équation F $(x)=0$ admet chaque racine de $x^m - a = 0$ un même nombre de fois.

Alors il y aurait précisément N quantités, et pas davantage, de la forme :

$$Ax + By + Cz + \ldots - H$$

qui seront nulles en remplaçant x, y, z.... par certaines racines des équations $x^m - a = 0$, $y^n - b = 0$, $z^p - c = 0$.... et ces quantités présenteront le même nombre de fois chacune des racines de $x^m - a = 0$.

D'ailleurs si l'on répète sur y, z.... les mêmes raisonnements que nous avons faits relativement à x, on trouvera également que ces N quantités doivent offrir le même nombre de fois chacune des racines de $y^n - b = 0$, $z^p - c = 0$... ; en sorte que N sera un multiple des indices n, p....

Faisons actuellement la somme de ces N quantités nulles le nombre A sera multiplié par $\frac{N}{m}$ fois la somme des racines de $x^m - a = 0$, de même le multiplicateur de B sera $\frac{N}{n}$ fois la somme des racines de $y^n - b = 0$, et ainsi de suite. Comme toutes ces sommes de racines sont nulles, il faut que $NH = 0$; ce qui est contradictoire avec l'hypothèse que H est différent de zéro.

Donc la relation supposée entre les radicaux est impossible.

On peut remarquer que la démonstration précédente s'appliquerait aux racines de plusieurs équations irréductibles quelconques qui ne seraient pas binômes, pourvu que la somme des racines fût nulle pour chacune d'elles.

7. Il résulte du théorème précédent que l'on ne peut reproduire la valeur d'un radical incommensurable, en com-

binant d'autres radicaux avec des quantités rationnelles par voie d'addition et de soustraction.

Si, au contraire, on combine des radicaux par la multiplication et la division, on obtient un nouveau radical ou même un nombre commensurable. (On peut toujours ne considérer que la multiplication, puisque $\frac{1}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\frac{1}{a}}$. Mais l'indice du produit ramené à la forme la plus simple doit être un diviseur du produit des indices des facteurs. En effet, de $\sqrt[m]{a} = \sqrt[n]{b} \times \sqrt[p]{c}$ on conclut $\left(\sqrt[m]{a}\right)^{np} = b^p c^n$; en sorte que si m ne divisait pas np, il faudrait, en supprimant les facteurs communs, que $\left(\sqrt[m']{a}\right)^{n'}$ fût commensurable quoique m' et n' soient premiers entre eux; ce qui est impossible (3). On voit que m doit même diviser le plus petit multiple de n et de p.

Ainsi, tout radical dont l'indice est premier ne peut être reproduit en multipliant entre eux des radicaux de degré moindre, puisqu'un nombre premier est premier avec tous les nombres qui lui sont inférieurs.

D'ailleurs un radical $\sqrt[mn]{a}$ dont l'indice est le produit de deux nombres premiers entre eux peut toujours être décomposé en deux facteurs; car, si l'on pose $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{a^x}\sqrt[n]{a^y}$, il suffira de satisfaire en nombres entiers à l'équation $nx + my = 1$, ce qui est toujours possible.

On voit qu'un radical quelconque est égal au produit de plusieurs radicaux dont les indices sont des nombres premiers ou des puissances de nombres premiers.

8. On sait que toute fonction rationnelle d'une racine d'une équation algébrique peut toujours se ramener à une fonction entière de cette racine. La même fonction rationnelle des racines de plusieurs équations peut être remplacée

par un polynôme entier relativement à chacune de ces racines. Ainsi une fonction rationnelle de un ou plusieurs radicaux sera toujours égale à une somme de radicaux multipliés respectivement par des quantités rationnelles positives ou négatives. Chacun de ces radicaux sera le produit des puissances de certains radicaux composants.

D'après ce que nous avons vu, un radical quelconque ne peut être une fonction rationnelle d'un autre radical sans être semblable à une de ses puissances. Une fonction rationnelle de plusieurs radicaux ne saurait produire un radical dont l'indice renfermerait des facteurs premiers qui ne se trouvent pas dans les indices des radicaux composants

Par suite *un radical dont l'indice est premier ne peut être obtenu en combinant d'une manière quelconque par les cinq premières opérations de l'arithmétique plusieurs radicaux d'indices différents.*

Ainsi les radicaux de divers indices premiers sont des nombres incommensurables distincts, dont l'un ne peut se déduire des autres sans effectuer une nouvelle extraction de racine. Quant aux radicaux de chaque indice, on pourrait les ramener à ceux dont la quantité soumise est un nombre entier premier absolu.

9. Les radicaux dont l'indice est une puissance d'un nombre premier ne sauraient être égaux à une fonction rationnelle de un ou plusieurs radicaux à indices premiers. Ces radicaux sont donc *d'espèces supérieures.*

Une fonction rationnelle de radicaux à indices premiers est appelée *fonction radicale de première espèce.* La racine de degré premier d'une pareille fonction est un radical de *seconde espèce*, quand on ne peut la ramener à des radicaux simples. Les radicaux de *troisième espèce* s'obtiennent en effectuant une nouvelle extraction de racines sur une fonction rationnelle de plusieurs radicaux d'espèce inférieure, et ainsi de suite. Le nombre des radicaux de la plus haute espèce qui entrent dans une fonction radicale d'espèce n forme le *degré* de cette fonction (*). D'après cela, si m est premier, $\sqrt[m]{a}$ sera de première espèce, $\sqrt[m^2]{a}$ sera de seconde espèce, $\sqrt[m^3]{a}$ de troisième, etc. ; il existe donc des radicaux de toutes les espèces qui ne peuvent se réduire à des fonctions radicales d'espèce moindre.

III. *Racines incommensurables des équations du troisième degré.*

10. Les racines réelles d'une équation numérique du troisième degré peuvent-elles s'obtenir par des extractions de racines effectuées sur des quantités réelles? Cette question revient à celle-ci : Les racines d'une équation irréductible du troisième degré peuvent-elles être égales à des fonctions radicale d'une certaine espèce? Nous allons faire voir que la réponse est négative pour le cas où les trois racines sont réelles (cas irréductible).

11. Soient x, x_1, x_2 les trois racines réelles d'une équation irréductible du troisième degré, et supposons que la racine x puisse être exprimée par une fonction radicale de n^e espèce. Si l'on ordonne cette fonction ramenée à une forme entière par rapport aux puissances d'un des radicaux de n^e espèce qui y entrent, on aura la relation :

$$x = A + Bu + \ldots . + Mu^{m-1}$$

dans laquelle u remplace $\sqrt[m]{a}$, a désigne une fonction radicale de $n-1$ espèce et A, B,.. .. M des fonctions qui peuvent être de n^e espèce, mais qui seraient alors de degré inférieur

(*) Ces dénominations sont à peu près celles qu'Abel a employées dans son mémoire. *Journal de Crelle*, tome I, p. 65.

à celui de la fonction x. On a éliminé de la fonction les puissances supérieures de u au moyen de l'équation $u^m - a = 0$. On peut toujours ramener le coefficient de u dans l'expression de x à la valeur ± 1, lors même qu'il serait nul. En effet, si $\pm \mathrm{H}u^p$ est le premier terme différent de zéro, on fera $t = \mathrm{H}u^p$, d'où $t^m - \mathrm{H}^m a^p = 0$; et toutes les puissances de u s'exprimeront par des puissances de t, puisque, m étant premier, on peut toujours satisfaire à la relation $u^q = u^{pp'm-m'} = u^{pp'} \times a^{-m'}$, d'où $u^q = \frac{1}{\mathrm{H}^{p'} a^{m'}} t^{p'}$.

Ainsi l'on peut écrire : $x = \mathrm{A} \pm u + \ldots\ldots + \mathrm{M}u^{m-1}$.

Si nous traitons comme des quantités rationnelles toutes celles qui sont d'espèce ou de degré inférieur à ceux de la fonction primitive, l'équation $u^m - a = 0$ est irréductible et l'expression de x est racine d'une équation irréductible de degré m (2, 3), sans quoi u serait une fonction rationnelle des autres radicaux qui entrent dans l'expression, et l'on pourrait en éliminer ce radical, ce qui est contre la supposition.

Alors les valeurs que prend l'expression de x quand on y substitue les diverses racines de $u^m - a = 0$ sont toutes deux racines de l'équation proposée du troisième degré; et, comme elles sont au nombre de m, il faut que m ne dépasse pas 3. On ne peut donc supposer que $m = 3$ ou $m = 2$.

12. Soit d'abord $m = 3$, l'expression de x se réduit à $\mathrm{A} \pm u + \mathrm{B}u^2$. Comme les trois racines de $u^3 - a = 0$ sont égales à u multiplié par les trois racines $1, \alpha, \alpha^2$ de l'unité, on aura :

$$x = \mathrm{A} \pm u + \mathrm{B}u^2,\ x_1 = \mathrm{A} \pm u\alpha + \mathrm{B}\alpha^2 u^2,\ x_2 = \mathrm{A} \pm u\alpha^2 + \mathrm{B}\alpha u^2.$$

Si l'on ajoute ces trois valeurs, après avoir multiplié la seconde par α^2 et la troisième par α, en tenant compte de $\alpha^3 = 1$, et de $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$, il vient :

$$x + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 = \pm 3u.$$

Or, α et α^2 sont deux imaginaires conjuguées tandis que toutes les autres quantités sont réelles, il faudrait donc que $x_1 = x$, pour que les imaginaires pussent se détruire; condition incompatible avec la supposition que l'équation est irréductible.

13. Soit actuellement $m=2$; on aura : $x = A + \sqrt{a}$ et par suite $x_1 = A - \sqrt{a}$, d'où l'on tire $2A = x_1 + x$. Il faut donc que $2A$ soit une racine de l'équation aux sommes de la proposee. Mais cette équation transformée est également irréductible, sans quoi elle admettrait une racine commensurable et la troisième racine de la proposée le serait aussi. On répétera sur A ce qui a été dit sur x, et l'on trouvera une série de quantité radicales dont les degrés et les espèces iront en décroissant, qui devront toujours être racines d'une équation irréductible du troisième degré à racines réelles. On finira donc par arriver à une quantité de première espèce et renfermant un seul radical de la forme $A' + \sqrt{a'}$. Or, il est évident que cette quantité est racine d'une équation du deuxième degré et qu'elle ne peut satisfaire à une équation irréductible du troisième.

Donc *il est impossible d'exprimer par des radicaux réels les racines d'une équation du troisième degré, lorsqu'elles sont toutes reelles*

(La suite prochainement.)

Observation. Le théorème fondamental du § 8 a été démontré, pour les fonctions algébriques, d'abord par Abel, dans le mémoire cité ci-dessus, et ensuite d'une manière plus lucide, plus explicite, par M. Liouville, dans un mémoire de 1832 inséré dans le cahier 23 du Journal de l'Ecole polytechnique. On trouve une analyse du mémoire d'Abel dans le tome VI du Bulletin de mathématiques de Férussac.

Tm.