NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. DE SAILLY

Démonstration du théorème 33

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 115-117

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__115_1>

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 33 (p. 394, t. I).

PAR H. DE SAILLY,
Ancien elève de l'Ecole polytechnique.

THEORÈME.

Les périmètres et les aires des portions de polygones réguliers inscrits dans le même arc de cercle, augmentent avec le nombre des côtés.

Démonstration.

Fig. 21. Soit OA un rayon et soient BC, DE deux demi-cordes perpendiculaires à OA. Supposons que la première est égale à la moitié d'un côté d'une portion de polygone régulier de m côtés, et la seconde à la moitié d'un côté, portion d'un polygone régulier de $m+n$ côtés, inscrits tous deux dans un même arc.

Menons les rayons OB, OD et prolongeons BD jusqu'à son intersection G avec la direction de OA.

D'après l'énoncé, on doit avoir

$$2\,(m+n)\,\mathrm{DE} > 2m\,.\,\mathrm{BC}\,,$$
$$2\,(m+n)\,\mathrm{DE}\,.\,\mathrm{OE} > 2m\,.\,\mathrm{BC}\ \mathrm{OC}.$$

La seconde inégalité se déduit évidemment de la première

On a $\frac{BC}{DE}=\frac{OBG}{ODG}$; il suffit donc de démontrer l'inégalité

$$\frac{m+n}{m}>\frac{OBG}{ODG}.$$

Le rapport $\frac{OBG}{ODG}$ est plus grand que 1 ; on a donc

$$\frac{OBG}{ODG}<\frac{OBG-ADG}{\text{sect. AOD}} \text{ (*)}.$$

On a aussi $2(m+n)$ arc $AD=2m$ arc AB; d'où

$$\frac{m+n}{m}=\frac{\text{arc } AB}{\text{arc } AD}=\frac{\text{sect. AOB}}{\text{sect. AOD}}.$$

Mais

$$\frac{OBG}{ODG}<\frac{OBG-ADG}{\text{sect. AOD}}<\frac{OBG-ADG+\text{seg. BDK}}{\text{sect. AOD}}<\frac{\text{sect. AOB}}{\text{sect. AOD}}$$

et la relation $\frac{m+n}{m}=\frac{\text{sect. AOB}}{\text{sect. AOD}}$ donne enfin

$$\frac{OBG}{ODG}<\frac{m+n}{m}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On peut démontrer, en suivant une marche analogue, le théorème suivant :

Les périmètres et les aires des portions de polygone régulier circonscrites à un même arc de cercle, diminuent quand le nombre des côtés augmente.

Fig. 22. Soit OA un rayon et soit encore MA une tangente au cercle à l'extrémité du rayon.

Prenons AB égale à la $2m^{me}$ partie du premier contour et AD égale à la $2(m+n)^{me}$ partie du second. Il suffit évidemment, pour la démonstration complète du théorème, de prouver l'inégalité $\frac{BA}{DA}>\frac{m+n}{m}$. Joignons les points B et D

(*) Un nombre fractionnaire augmente en diminuant les deux termes de la même quantité. Tm.

avec le centre O et par le point G, où DO rencontre l'arc de cercle, menons IGK parallèle à la tangente. On a visiblement m arc AF $= (m+n)$ arc AG, ce qui permet de mettre l'inégalité à démontrer sous la forme

$$\frac{\text{BA}}{\text{DA}} > \frac{\text{arc AF}}{\text{arc AG}}.$$

On a aussi sect. AOF : sect. AOG :: arc AF : arc AG et l'inégalité devient

$$\frac{\text{BA}}{\text{DA}} > \frac{\text{sect. AOF}}{\text{sect. AOG}}.$$

Mais $\frac{\text{BA}}{\text{DA}} = \frac{\text{IKO}}{\text{GKO}}$; et, en partant du rapport $\frac{\text{IKO}}{\text{GKO}}$, on a la série d'inégalités

$$\frac{\text{IKO}}{\text{GKO}} > \frac{\text{IKO}+\text{GKA}}{\text{sect. OGA}} > \frac{\text{IKO}+\text{GKA}-\text{GIF}}{\text{sect. OGA}} > \frac{\text{sect. AOF}}{\text{sect. OGA}}$$

et enfin, par suite de la relation $\frac{\text{BA}}{\text{DA}} = \frac{\text{IKO}}{\text{GKO}}$,

$$\frac{\text{BA}}{\text{DA}} > \frac{\text{sect. AOF}}{\text{sect. OGA}}.$$

C. Q. F. D.