

P. L. CIRODDE

Problèmes proposés aux examens

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 1
(1842), p. 97-117

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__97_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1842, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PROBLÈMES PROPOSÉS AUX EXAMENS.

1. *Déterminer les dimensions d'un segment sphérique dont le volume et l'aire soient respectivement égaux à ceux d'une sphère et d'un cercle donnés.*

Soient a et b les rayons de la sphère et du cercle donnés ;
 r et h le rayon de la base et la hauteur du segment demandé ;
on trouvera facilement que les équations du problème sont :

$$r^2 + h^2 = b^2 \quad (1)$$

$$h(h^2 + 3r^2) = 8a^3 \quad (2)$$

Éliminant r^2 entre ces deux équations, il viendra :

$$2h^3 - 3b^2h + 8a^3 = 0 \quad (3)$$

équation qui fera connaître h . La hauteur du segment étant ainsi déterminée, on en déduira la valeur du rayon de sa base au moyen de l'équation (1), et le problème sera résolu.

Discutez l'équation (3). — Cette équation a une racine réelle négative, puisqu'elle est de degré impair et que son dernier terme est positif; mais cette racine est étrangère à la question, car la hauteur du segment ne peut être une quantité négative. Quant aux deux autres racines, elles peuvent être imaginaires : on sent, en effet, que le volume donné peut être trop grand pour pouvoir être contenu dans la surface πb^2 . Si ces deux autres racines sont réelles, elles seront positives, conformément à la règle des signes de Descartes. *Pourriez-vous le reconnaître d'après la loi de composition des coefficients?* — Oui, car le produit des trois racines de l'équation (3) est négatif, et comme l'une d'elles est négative, il faut que le produit des deux autres soit positif, et que par conséquent elles soient de même signe; mais elles ne peuvent être négatives, car la somme des trois racines est nulle : donc, elles sont positives.

Quelle est donc la relation qui doit exister entre a et b pour que le problème soit possible? — La condition de réalité des racines de l'équation (3) est, d'après la règle connue,

$$b > a\sqrt[6]{32}. \quad (4)$$

qui est aussi la condition nécessaire pour que le problème soit possible.

Si la condition 4) est remplie, y aura-t-il deux solutions? — Il faut encore, pour cela, que les valeurs positives de h soient moindres que b , en vertu de l'équation (1), et que par conséquent b soit une limite supérieure des racines positives de l'équation (3). Substituons donc b à h dans le premier membre de cette équation et dans ses dérivées, et nous trouverons pour résultats :

$$-b^3 + 8a^3, \quad +3b^2, \quad +12b.$$

Donc, b sera une limite si l'on a :

$$-b^3 + 8a^3 > 0 \quad \text{ou bien} \quad b < 2a.$$

On voit ainsi que si b est compris entre $a\sqrt[6]{32}$ et $2a$, le problème admettra deux solutions, qui se réduiront à une seule, si $b = a\sqrt[6]{32}$, car c'est là la condition d'égalité de deux racines de l'équation (3).

Si $b = 2a$, on trouve $h = 2a$ et $r = 0$, de sorte qu'au lieu d'un segment sphérique, on a une sphère dont le diamètre est $2a$. L'autre valeur positive de h est $a(\sqrt{3}-1)$: elle est moindre que $2a = b$, et fournit par conséquent une 2^e solution de la question.

Si $b > 2a$, la condition (4) étant nécessairement remplie, les trois racines de l'équation (3) sont encore réelles, mais il n'y a cependant qu'une seule solution, parce qu'alors $-b^3 + 8a^3 < 0$, et qu'ainsi l'une des racines positives de cette équation est moindre que b , et l'autre est plus grande que b .

Dans quel cas le volume du segment sphérique sera-t-il le plus grand possible ? — La condition (4) revient à

$$a < \frac{b}{\sqrt[6]{32}} ;$$

de sorte que le segment sera maximum quand on aura

$$a = \frac{b}{\sqrt[6]{32}}.$$

Pouvez-vous construire ce segment maximum ? — Oui, car l'équation (3) ayant alors deux racines égales, l'une d'elles doit satisfaire à sa dérivée

$$6h^2 - 3b^2 = 0,$$

et comme cette équation n'a qu'une racine positive $\frac{b}{\sqrt{2}}$, c'est

celle-ci qui entre deux fois dans la proposée. La valeur correspondante de r est aussi $\frac{b}{\sqrt{2}}$, de sorte que le segment maximum est un hémisphère dont le rayon est la moitié du côté du carré inscrit dans le cercle donné.

Aurait-on pu prévoir, d'après la nature géométrique de la question, que le problème n'admettrait deux solutions que dans certains cas, et distinguer ces cas? — Supposons que l'on ait construit un segment dont l'aire soit égale à celle du cercle donné, et opposons-lui par sa base un segment égal, on formera ainsi un corps dont le volume sera maximum quand chaque segment sera un hémisphère, puisque parmi tous les corps qui ont la même aire, la sphère est celui qui a le plus grand volume. Le segment dont l'aire est πb^2 sera donc le plus grand possible quand il sera un hémisphère; donc, le rayon sera $\sqrt{\frac{\pi b^2}{2\pi}} = \frac{b}{\sqrt{2}}$, comme nous l'avons trouvé plus haut. Son volume sera par conséquent $\frac{1}{3}\pi \frac{b^3}{\sqrt{2}}$; de sorte qu'on aura alors $b^3 = 4a^3\sqrt{2}$, ou $b = a\sqrt[6]{32}$, ce qui s'accorde encore avec ce qui précède.

Supposons maintenant que l'on ait construit ce segment maximum et que l'on fasse diminuer le rayon de sa base d'une manière continue, son aire restant constamment égale à πb^2 : sa hauteur devra augmenter, mais seulement jusqu'à ce que le rayon de la base étant réduit à zéro, le segment soit devenu une sphère ayant b pour diamètre et par conséquent $\frac{1}{6}\pi b^3$ pour volume. Donc, si $\frac{4}{3}\pi a^3 > \frac{1}{6}\pi b^3$, d'où $b < 2a$, il y aura eu un instant où le volume du segment aura été égal à celui de la sphère donnée, puisqu'il a varié d'une manière continue à partir de sa plus grande valeur.

Si l'on suppose, au contraire, que le rayon de la base du

segment croisse d'une manière continue depuis $\frac{b}{\sqrt{2}}$, l'aire de ce segment restant toujours égale à πb^2 , sa hauteur h ira en diminuant; mais comme alors r reste constamment moindre que b , le produit $r^2 h$, et par conséquent le volume du segment, décroîtra indéfiniment avec h , de sorte qu'il y aura un instant où ce volume sera égal à $\frac{4}{3}\pi a^3$.

Concluons donc que lorsque le problème sera possible, il aura deux solutions, si $b < 2a$, ou $= 2a$: l'un de ces segments sera alors plus petit qu'un hémisphère, et l'autre sera plus grand; mais si $b > 2a$, il n'y aura qu'une seule solution, et le segment sera moindre qu'un hémisphère.

2. *Étant donnée une équation $\varphi(x)=0$ du degré m à coefficients indéterminés, trouver les relations qui doivent exister entre ces coefficients, pour que deux racines de la proposée satisfassent à l'équation à deux inconnues $py+qz=r$; et déterminer ces racines, lorsque les conditions dont il s'agit seront remplies.*

Soient a et b , deux racines de l'équation $\varphi(x)=0$, qui vérifient l'équation $py+qz=r$. On aura donc :

$$\varphi(a) = 0, \quad \varphi(b) = 0, \quad pa + qb = r.$$

On tire de cette dernière

$$b = \frac{r - pa}{q} \quad \text{et par conséquent} \quad \varphi(b) = \varphi\left(\frac{r - pa}{q}\right) :$$

d'où l'on voit que les deux équations

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi\left(\frac{r - px}{q}\right) = 0,$$

ont la racine commune a ; par conséquent, leurs premiers membres ont un commun diviseur. Ainsi, pour résoudre le problème, on cherchera le P. G. C. diviseur des polynômes

$\varphi(x)$ et $\varphi\left(\frac{r-px}{q}\right)$, on poussera l'opération jusqu'à ce qu'on soit arrivé à un reste indépendant de x , et, en égalant ce reste à zéro, on aura la relation demandée

Si la proposée doit avoir n couples de racines qui vérifient l'équation $py+qz=r$, le P. G. C. diviseur dont il s'agit devra être du $n^{\text{ième}}$ degré, de sorte qu'on arrêtera le calcul, nécessaire pour le déterminer, au reste du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré, lequel sera de la forme

$$A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \dots + A_n.$$

Ce reste devant être nul quelle que soit la valeur de x , il faudra que les coefficients des diverses puissances de cette quantité soient nuls, ce qui donnera les n équations de condition

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \dots \quad A_n = 0.$$

La proposée devra donc avoir au moins n coefficients indéterminés.

Si l'on suppose ces conditions satisfaites, on trouvera nécessairement un P. G. C. diviseur D entre les polynômes $\varphi(x)$ et $\varphi\left(\frac{r-px}{q}\right)$, et, en l'égalant à zéro, on formera une équation dont la résolution fera connaître les racines de $\varphi(x)=0$, qui doivent être mises à la place de y dans l'équation $py+qz=r$; de sorte que, pour avoir leurs conjuguées, il n'y aura qu'à remplacer y par les valeurs trouvées de x , dans la formule $z = \frac{r-px}{q}$.

On voit donc que si le P. G. C. diviseur D est d'un degré supérieur au 1^{er}, il y aura en général autant de couples de racines de l'équation $\varphi(x)=0$, qui satisferont à l'équation $py+qz=r$, qu'il est marqué par le degré de ce P. G. C. diviseur. Toutefois, cette conséquence serait inexacte si la proposée avait une racine c telle que $\frac{r-pc}{q}$ fût égale à c , ou, ce qui revient au même, si elle avait une racine $c = \frac{r}{p+q}$.

En effet, cette racine vérifie l'équation $\varphi\left(\frac{r-px}{q}\right)=0$, puisque, d'après notre hypothèse, faire $x=c$ dans cette équation, c'est faire $x=c$ dans la proposée. Donc c est racine de $D=0$, de sorte que cette équation détermine non-seulement les racines de $\varphi(x)=0$, qui, conjointement avec une autre racine de cette dernière équation, vérifient $py+qz=r$, mais encore celle des racines de $\varphi(x)=0$ qui est égale à $\frac{r}{p+q}$, si l'équation en a une pareille, et elle la donne autant de fois que cette racine entre dans la proposée.

Ainsi, avant de s'occuper de la recherche des racines de $\varphi(x)=0$ qui satisfont à $py+qz=r$, on commencera par examiner si $\frac{r}{p+q}$ est racine de cette équation, et on devra la débarrasser de toutes les racines égales à $\frac{r}{p+q}$ qu'elle pourra contenir, ce qui ne saurait présenter de difficulté.

3. Si $p=q$, les deux équations $\varphi(x)=0$ et $\varphi\left(\frac{r-px}{q}\right)=0$ seront également vérifiées par $x=a$ et par $x=b$, de sorte que ces quantités seront racines de $D=0$: et en effet les trois équations

$$\varphi(a)=0, \quad \varphi(b)=0, \quad p(a+b)=r,$$

étant symétriques par rapport à a et à b , le calcul qui déterminera l'une de ces quantités devra aussi déterminer l'autre. Donc, l'équation $D=0$ nous donnera tous les couples de racines de $\varphi(x)=0$, dont la somme est $\frac{r}{p}$; mais elle devra donner, en outre, toutes les racines de la proposée qui sont égales à $\frac{r}{2p}$.

Si aucune des racines de la proposée n'est égale à $\frac{r}{2p}$, et

que chacune ajoutée avec une autre forme une somme égale à $\frac{r}{p}$, on voit que l'équation $D=0$ aura les mêmes racines que la proposée, de sorte que notre méthode deviendra illusoire. Mais alors on observera que si l'on choisit une inconnue auxiliaire t qui soit une fonction symétrique quelconque des deux racines conjuguées a et b , comme $t=ab$, ou $t=a^2+b^2$, etc., cette inconnue aura autant de valeurs qu'il y a de racines dans la proposée; mais comme ces racines sont égales 2 à 2, l'équation en t s'abaissera à une équation de degré sous-double, en extrayant la racine carrée de ses deux membres. Il en sera encore de même si les valeurs de t sont égales et de signes contraires, ce qui arrivera si l'on pose $t=a-b$. Mais, dans le cas actuel, on n'aura qu'à faire évanouir le second terme pour ramener l'équation proposée à une autre de degré sous-double; car, en désignant par $2n$ le nombre de ses racines, on diminuera chacune d'elles de $\frac{nr}{2np} = \frac{r}{2p}$, de sorte que les deux racines conjuguées a et b deviendront $a - \frac{r}{2p}$ et $\frac{r}{p} - a - \frac{r}{2p} = -a + \frac{r}{2p}$; ainsi l'équation transformée aura ses racines égales 2 à 2 et de signes contraires, donc elle sera réductible à une équation de degré sous-double.

4. Examinons actuellement quelques cas particuliers du problème que nous venons de développer, et spécialement ceux que l'on considère le plus souvent dans les examens.

L'équation $\varphi(x)=0$ a deux racines égales et de signes contraires : trouver ces racines.

Ici $r=0$ et $q=+p$, de sorte que l'on résoudra le problème en cherchant le P G C. diviseur entre les premiers membres des équations

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(-x) = 0^{(*)}.$$

Mais j'observe qu'au système de ces deux équations on peut substituer le système formé de leur somme et de leur différence : or, si la proposée est de degré pair, la somme ne renfermera que des termes de degré pair, et la différence ne renfermant, au contraire, que des termes de degré impair, on pourra la diviser par x , ce qui ramènera à une équation dont tous les termes auront des exposants pairs. Il en serait de même si la proposée était de degré impair ; donc, on pourra substituer ainsi au système des équations $\varphi(x) = 0$ et $\varphi(-x) = 0$, le système de deux autres équations dont tous les termes seront de degré pair, de sorte que les restes que l'on obtiendra en cherchant le plus grand commun diviseur de leurs premiers membres seront aussi de cette même forme. Le nombre des solutions de la question sera ainsi marqué par la moitié du degré du plus grand commun diviseur trouvé.

5. *Trouver les relations qui doivent exister entre les coefficients indéterminés d'une équation $\varphi(x) = 0$ pour que deux de ses racines soient dans le rapport de 1 à q .*

Il suffira de supposer $r = 0$ et $p = -1$ dans la question du n° 2, ce qui conduira à chercher le P. G. C. diviseur des deux polynômes $\varphi(x)$ et $\varphi\left(\frac{x}{q}\right)$, et à égaliser à zéro le reste indépendant de x (**).

(*) Pour traiter la question directement, et c'est ce qu'il faut *toujours* faire dans un examen, on dira : Si je transforme la proposée en une autre dont les racines soient égales et de signes contraires aux siennes, j'obtiendrai une équation $\varphi(-x) = 0$ qui aura deux racines communes avec la proposée $\varphi(x) = 0$, de sorte que leurs premiers membres auront un commun diviseur du 2^e degré, qui, égalé à zéro, fournira une équation dont les racines résoudreont le problème.

(**) Pour traiter cette question à priori, nous dirons : Si nous transformons la proposée en une autre dont les racines soient q fois plus grandes, nous obtenons une équation $\varphi\left(\frac{x}{q}\right) = 0$ qui aura une racine commune avec la proposée $\varphi(x) = 0$, de sorte que leurs premiers membres auront un commun diviseur du 1^{er} degré, etc.

6. Si l'on voulait qu'il y eût n couples de racines, dont le rapport fût q , on observerait que le P. G. C. diviseur des polynômes $\varphi(x)$ et $\varphi\left(\frac{x}{q}\right)$ devrait être alors du $n^{\text{ième}}$ degré, de sorte qu'il faudrait éгалer à zéro les coefficients des diverses puissances de x dans le reste correspondant,

$$A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \dots + A_n,$$

ce qui donnerait les n équations de condition,

$$A_1 = 0, A_2 = 0, \dots, A_n = 0.$$

Mais si le rapport q n'est pas donné, ce qui arrivera si l'on demande seulement que $2n$ racines de $\varphi(x) = 0$ forment une suite de rapports égaux, on observera que les n équations précédentes devront être vérifiées par une même valeur de q , de sorte que leurs premiers membres doivent avoir un commun diviseur; on cherchera donc le P. G. C. diviseur entre deux de ces premiers membres, et on poussera l'opération jusqu'à un reste indépendant de q , que l'on égalera à zéro; puis on exprimera que le reste du 1^{er} degré, que l'on aura ainsi trouvé, divise les premiers membres de toutes les autres équations, et l'on obtiendra ainsi $(n-1)$ équations de condition qui répondront à la question. Elles résultent comme on voit de l'élimination de q entre les n équations $A_1=0, A_2=0, \dots, A_n=0$.

7. Veut-on que toutes les racines de l'équation $\varphi(x) = 0$ forment une progression par quotient? on observera qu'en supposant cette équation du degré m , si l'on groupe chaque terme de la progression avec le suivant, on formera $(m-1)$ couples de racines dont le rapport est une certaine quantité q , de sorte que le P. G. C. diviseur entre $\varphi(x)$ et $\varphi\left(\frac{x}{q}\right)$ sera du degré $(m-1)$: on égalera donc à zéro les coefficients des diverses puissances de x dans le reste du degré $(m-2)$, et si q

est connu, on aura ainsi $(m-1)$ équations de condition. Mais si la raison n'est pas donnée, il faudra, comme on l'a vu tout à l'heure, éliminer q entre ces $(m-1)$ équations, ce qui réduira à $(m-2)$ le nombre des équations de condition.

8. La méthode que nous venons d'indiquer a toute la généralité possible, mais elle a l'inconvénient, qui, d'ailleurs, est inhérent à la nature de la question, d'exiger des calculs très-laborieux. Cependant on propose quelquefois dans les examens de déterminer la valeur qu'il faut donner à un coefficient indéterminé pour que l'équation résultante ait ses racines en progression géométrique, et, dans ce cas, on peut obtenir cette valeur assez vite de la manière suivante : soit, par exemple, l'équation

$$2x^4 - 15x^3 + Cx^2 - 30x + 8 = 0,$$

qui doit avoir ses racines en progression par quotient au moyen d'une détermination convenable de C . Soit q la raison, les quatre racines seront de la forme

$$a, \quad aq, \quad aq^2, \quad aq^3;$$

et on aura ainsi

$$a^4 q^6 = \frac{8}{2} = 4, \quad \text{d'où} \quad aq^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2};$$

donc, en transformant la proposée en une autre dont les racines soient égales aux siennes divisées par $\sqrt{2}$, les racines de cette nouvelle équation

$$4y^4 - 15\sqrt{2}y^3 + Cy^2 - 15\sqrt{2}y + 4 = 0,$$

seront

$$q^{-\frac{3}{2}}, \quad q^{-\frac{1}{2}}, \quad q^{\frac{1}{2}}, \quad q^{\frac{3}{2}},$$

c'est-à-dire réciproques et en progression par quotient. Si donc le coefficient indéterminé ne portait pas sur le terme du milieu, il serait immédiatement déterminé, en écrivant que cette équation est réciproque. Comment donc faire dans le

cas actuel ? Posons $y + \frac{1}{y} = z$, et l'équation résultante

$$4z^2 - 15\sqrt{2}z + C - 8 = 0,$$

aura pour racines

$$q^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{q^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{et} \quad q^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{q^{\frac{3}{2}}}.$$

Mais si l'on représente $q^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{q^{\frac{1}{2}}}$ par γ , on trouve facilement

que $q^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{q^{\frac{3}{2}}} = \gamma^3 - 3\gamma$, de sorte que

$$\gamma^3 - 3\gamma + \gamma = \frac{15\sqrt{2}}{4}.$$

Donc les équations

$$4z^2 - 15\sqrt{2}z + C - 8 = 0,$$

$$z^3 - 2z - \frac{15\sqrt{2}}{4} = 0,$$

ont la racine commune γ ; donc, leurs premiers membres doivent avoir un facteur commun, ce qui déterminera C. Si l'on cherche ce facteur commun on trouvera facilement que le reste indépendant de z donne :

$$C^3 - 8C^2 + 450C - 225.217 = 0,$$

équation qui a 35 pour seule racine réelle. Veut-on maintenant résoudre l'équation

$$2x^4 - 15x^3 + 35x^2 - 30x + 8 = 0.$$

On résoudra l'équation $4z^2 - 15\sqrt{2}z + 35 - 8 = 0$, ce qui donnera $z = \frac{9}{2\sqrt{2}}$ et $z = \frac{3}{\sqrt{2}}$; puis on substituera succes-

sivement ces valeurs dans l'équation $y + \frac{1}{y} = z$, et on trouvera ainsi

$$y = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad = 2\sqrt{2}, \quad = \sqrt{2}, \quad = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

et enfin, en multipliant ces quatre valeurs par $\sqrt[3]{2}$, on obtiendra les racines de la proposée $\frac{1}{2}, 1, 2, 4$.

9. On sait qu'une équation du degré m a ses racines en progression par quotient : on propose de déterminer ces racines.

Nous distinguerons deux cas, suivant que la raison sera ou ne sera pas donnée.

1^{er} cas. Soit q la raison, les m racines de la proposée pourront être représentées par

$$a, aq, aq^2, aq^3, \dots aq^{m-1}.$$

Cela posé, si l'on en fait le produit, on trouvera qu'il est égal à $a^m q^{\frac{m(m-1)}{2}}$; mais ce produit est égal au dernier terme de l'équation proposée, pris avec son signe, ou avec un signe contraire, suivant qu'elle est de degré pair, ou impair; donc, en appelant U ce produit qui nous est connu, nous aurons :

$$a^m q^{\frac{m(m-1)}{2}} = U, \text{ d'où } aq^{\frac{m-1}{2}} = \sqrt[m]{\frac{U}{q^{m-1}}}, \text{ et partant } a = \frac{\sqrt[m]{U}}{\sqrt[q^{m-1}]};$$

ce qui fera connaître une des racines extrêmes, et par suite toutes les autres. On trouvera m valeurs pour a , mais il sera facile de distinguer parmi ces m valeurs celle qui vérifie la proposée.

Remarquons que si m est impair et égal à $2n+1$, la quantité $aq^{\frac{m-1}{2}}$ devient aq^n ; donc, on obtiendra la racine moyenne, en extrayant la racine $m^{\text{ième}}$ du dernier terme de l'équation, pris en signe contraire.

Cette remarque fournit le moyen le plus simple d'exprimer que les trois racines de l'équation

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$$

sont en progression par quotient. En effet, la racine moyenne

devant être égale à la racine cubique du produit des trois racines, il faudra que $\sqrt[3]{C}$ vérifie cette équation : ainsi, on devra avoir

$$C - A\sqrt[3]{C^2} + B\sqrt[3]{C} - C = 0,$$

ou ce qui revient au même :

$$\sqrt[3]{C}(B - A\sqrt[3]{C}) = 0.$$

Or C n'est pas nul, sans quoi la racine moyenne étant zéro, les deux autres seraient aussi égales à zéro ; donc, il faut que

$$B - A\sqrt[3]{C} = 0, \quad \text{ou bien que} \quad B^3 - A^3C = 0.$$

Cette condition est suffisante, car si l'on désigne les racines de la proposée par a, b, c , elle exprime que $\sqrt[3]{abc}$ est une de ces racines, et est par conséquent égale à b , par exemple ; donc $\sqrt[3]{abc} = b$, d'où $b^2 = ac$, et par suite $\therefore a : b : c$.

Si $A=0$, la condition $B^3 - A^3C=0$ se réduit à $B=0$, de sorte que l'équation proposée est alors

$$x^3 - C = 0,$$

et en effet, en appelant α une des racines cubiques imaginaires de l'unité, les racines de cette équation sont :

$$\sqrt[3]{C}, \quad \sqrt[3]{C}\alpha, \quad \sqrt[3]{C}\alpha^2.$$

2° Cas. Appelons q la raison inconnue de la progression, nous avons vu, (7), que les deux équations

$$\varphi(x) = 0, \quad \varphi\left(\frac{x}{q}\right) = 0,$$

devaient avoir les $(m-1)$ racines communes $aq, aq^2, \dots, aq^{m-1}$, qui sont celles de l'équation formée en égalant leur P. G. C. diviseur à zéro ; on cherchera donc ce P. G. C. diviseur, et on écrira que le reste du $(m-2)$ ième degré,

$$A_1x^{m-2} + A_2x^{m-3} + \dots + A_{m-1},$$

est identiquement nul, ce qui donnera les $(m-1)$ équations de condition

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \dots \quad A_{m-1} = 0,$$

qui devront avoir pour racine commune la raison q de la progression. Mais comme il n'y a pas de motif pour regarder cette progression comme étant croissante plutôt que décroissante, elles auront aussi la racine commune $\frac{1}{q}$; de sorte que leurs premiers membres auront un commun diviseur du deuxième degré, lequel sera le coefficient A_1 de x dans le premier terme du reste $A_1 x^{m-2} + A_2 x^{m-3} + \dots + A_{m-1}$, car ce coefficient est du deuxième degré par rapport à q : on l'égalera donc à zéro, ce qui fournira une équation d'où l'on tirera la valeur de q , et on rentrera ainsi dans le premier cas; mais il sera plus simple de remplacer q par sa valeur, dans l'équation formée, en égalant à zéro le quotient de la division de $\varphi(x)$ par le reste du $(m-1)$ ième degré, car on aura ainsi très-simplement une des racines extrêmes.

J'ai dit que A_1 , est du second degré par rapport à q : en effet, l'équation $\varphi(x) = 0$, étant

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \dots + U = 0,$$

on aura

$$\varphi\left(\frac{x}{q}\right) = x^m + Aqx^{m-1} + Bq^2x^{m-2} + Cq^3x^{m-3} + \dots + Uq^m = 0;$$

donc

$$\varphi\left(\frac{x}{q}\right) - \varphi(x) = 0 = Ax^{m-1} + B(q+1)x^{m-2} + C(q^2+q+1)x^{m-3} + \dots$$

Ce polynôme doit donc diviser $\varphi(x)$, ou, pour éviter les quotients fractionnaires, $A^2 \cdot \varphi(x)$. Le premier terme du quotient de leur division sera Ax , et le reste correspondant

$$A[A^2 - B(q+1)]x^{m-1} + A[AB - C(q^2+q+1)]x^{m-2} + \dots$$

Le second terme de ce quotient sera $A^2 - B(q+1)$, de sorte que le coefficient de x^{m-2} dans le reste sera

$$A_1 = A[AB - C(q^2 + q + 1)] - B(q+1)[A^2 - B(q+1)],$$

c'est-à-dire du second degré par rapport à q .

Exemple. Résoudre l'équation

$$x^4 - 15x^3 + 70x^2 - 120x + 64 = 0,$$

dont les racines sont en progression par quotient.

On aura

$$\varphi\left(\frac{x}{q}\right) = x^4 - 15qx^3 + 70q^2x^2 - 120q^3x + 64q^4 = 0,$$

$$\frac{\varphi\left(\frac{x}{q}\right) - \varphi(x)}{q - 1} = 15x^3 - 70(q+1)x^2 + 120(q^2 + q + 1)x - 64(q^3 + q^2 + q + 1).$$

Le quotient de la division de $\varphi(x)$ par ce polynôme est $x + (14q - 31)$, et le reste a pour coefficient de son premier terme $310(2q^2 - 5q + 2)$. Égalant ce reste à zéro, on en tire $q = 2$ et $q = \frac{1}{2}$; remarquons que comme on a multiplié le second dividende partiel par 3, l'équation $x + \frac{14q - 31}{3} = 0$, donnera la première racine. En faisant $q = 2$, on trouve $x = 1$, et ainsi les quatre racines sont 1, 2, 4, 8.

Cette méthode est générale, et n'exige pas la résolution d'une équation de degré supérieur au second.

10. *Trouver les relations qui doivent exister entre les coefficients indéterminés de l'équation $\varphi(x) = 0$, pour qu'elle ait n racines en progression par quotient.*

La méthode du n° 7 ne pourrait pas conduire à la solution de ce problème, de même que le principe fondamental de la théorie des racines égales ne peut pas servir à exprimer qu'une

équation à coefficients indéterminés a une racine de l'ordre n ; nous dirons donc : soient $a, aq, aq^2 \dots aq^{n-1}$ les n racines qui doivent être en progression par quotient, si l'on transforme successivement l'équation proposée $\varphi(x)=0$, en $(n-1)$ autres équations dont les racines soient respectivement égales à celles de la proposée multipliées par $q, q^2, q^3, \dots q^{n-1}$, il est clair que les n équations

$$\varphi(x) = 0, \quad \varphi\left(\frac{x}{q}\right) = 0, \quad \varphi\left(\frac{x}{q^2}\right) = 0, \dots, \quad \varphi\left(\frac{x}{q^{n-1}}\right) = 0,$$

auront la racine commune aq^{n-1} ; donc, leurs premiers membres doivent avoir un commun diviseur. En conséquence, on cherchera le P. G. C. diviseur entre $\varphi(x)$ et $\varphi\left(\frac{x}{q}\right)$, on poussera l'opération jusqu'à ce qu'on soit arrivé à un reste R , indépendant de x , et on l'égalera à zéro; puis on exprimera que le reste précédent divise tous les autres polynômes, et on obtiendra ainsi les $(n-1)$ équations de conditions :

$$R_1 = 0, \quad R_2 = 0, \quad R_{n-1} = 0,$$

qui résoudront le problème, si la raison q est donnée; sinon, on éliminera cette inconnue entre elles, et on trouvera ainsi $(n-2)$ équations de conditions.

11. Si l'équation, $\varphi(x)=0$, a n racines en progression par quotient et que l'on veuille déterminer ces racines, on cherchera le plus grand commun diviseur des deux polynômes $\varphi\left(\frac{x}{q^{n-2}}\right)$ et $\varphi\left(\frac{x}{q^{n-1}}\right)$; on en trouvera un du premier degré, si la proposée n'a pas plusieurs systèmes de n racines en progression géométrique, et, en l'égalant à zéro, on formera une équation qui fera connaître l'une des racines extrêmes, et il sera facile d'en déduire les autres, puisque nous supposons que la raison est connue.

Mais si la raison n'est pas donnée, on devra chercher le plus grand commun diviseur des n polynômes

$$\varphi(x), \quad \varphi\left(\frac{x}{q}\right), \quad \varphi\left(\frac{x}{q^2}\right), \dots \quad \varphi\left(\frac{x}{q^{n-1}}\right),$$

et on arrivera ainsi à $(n-1)$ restes

$$R_1, \quad R_2, \dots \quad R_{n-1},$$

lesquels devront être anéantis par la valeur inconnue de q et de $\frac{1}{q}$. En conséquence, on cherchera le plus grand commun diviseur de ces restes, et on en trouvera un du deuxième degré. On l'égalera à zéro et on en tirera la valeur de la raison. Substituant cette valeur dans l'équation formée en égalant à zéro le plus grand commun diviseur de nos n polynômes

$$\varphi(x), \quad \varphi\left(\frac{x}{q}\right), \quad \varphi\left(\frac{x}{q^2}\right), \dots \quad \varphi\left(\frac{x}{q^{n-1}}\right),$$

on en déduira la valeur de la plus grande et de la plus petite des racines cherchées.

12. Il est évident que tout ce que nous avons dit, aux numéros 5, 6, 7, 8, 9, 10 et 11 s'appliquera très-bien aux équations dont les racines seraient en tout ou en partie en proportion ou en progression par différence; nous nous dispenserons donc de parler de ces équations. Toutefois, nous indiquerons la méthode suivante pour résoudre une équation algébrique dont les racines seraient en progression par différence, parce qu'elle offrira une application intéressante de la *méthode des coefficients indéterminés*. Soient

$$x^m + P_1 x^{m-1} + P_2 x^{m-2} + \dots + P_{m-1} x + P_m = 0,$$

l'équation proposée, a la première de ses racines et r la raison : on sait d'abord que

$$-P_1 = \frac{[2a + (m-1)r]m}{2}. \quad (1)$$

D'un autre côté, il est évident que si du carré du coefficient du deuxième terme on retranche le double de celui du troisième, le reste $P_2^2 - 2P_3$, sera égal à la somme des carrés des racines. Cherchons donc comment cette somme est composée en a et en r , car nous obtiendrons de cette manière une seconde équation entre ces deux inconnues. J'observe d'abord que la formule (1) nous montre que la somme des premières puissances des racines de la proposée est une fonction de m de la forme

$$Am^2 + Bm;$$

il est donc naturel de penser que la somme S_2 de leurs secondes puissances est de la forme $Am^3 + Bm^2 + Cm$, de sorte que

$$S_2 = Am^3 + Bm^2 + Cm,$$

A, B, C , étant des coefficients indéterminés dont il s'agit de trouver les valeurs. Or, si l'on ajoute un terme de plus $a + mr$ à la progression, il faudra que la somme des carrés des termes de la nouvelle progression se déduise de la formule précédente en y changeant m en $(m + 1)$; donc on aura

$$S_2 + (a + mr)^2 = A(m + 1)^3 + B(m + 1)^2 + C(m + 1).$$

Retranchant de cette équation la précédente, il viendra, toutes réductions faites,

$$a^2 + 2arm + r^2m^2 = A(3m^2 + 3m + 1) + B(2m + 1) + C,$$

équation qui doit être vraie, quelle que soit la valeur que l'on assigne à m ; donc, les coefficients des mêmes puissances de m dans les deux membres doivent être égaux; donc

$$3A = r^2, \quad 3A + 2B = 2ar, \quad A + B + C = a^2;$$

d'où

$$A = \frac{r^2}{3}, \quad B = \frac{2ar - r^2}{2}, \quad C = \frac{6a^2 - 6ar + r^2}{6},$$

et par conséquent

$$S_2 = \frac{2r^2m^3 + (6ar - 3r^2)m^2 + (6a^2 - 6ar + r^2)m}{6} P_1^{(*)}; \dots \quad (2)$$

ainsi, la seconde équation du problème sera

$$P_1^2 - 2P_2 = \frac{(2m^3 - 3m^2 + m)r^2 + (6am^2 - 6am)r + 6a^2m}{6},$$

ou bien

$$a^2 + (m-1)ar + \frac{2m^2 - 3m + 1}{6} r^2 = \frac{P_1^2 - 2P_2}{m}.$$

Retranchons de cette équation le carré de (1) mise sous la forme

$$a + \frac{m-1}{2} r = -\frac{P_1}{m},$$

il viendra

$$\frac{m^2-1}{2^2 \cdot 3} r^2 = \frac{P_1^2(m-1) - 2P_2m}{m^2},$$

d'où

$$r = \pm \frac{2}{m} \sqrt{3 \cdot \frac{P_1^2(m-1) - 2mP_2}{m^2 - 1}},$$

et par conséquent

$$a = -\frac{P_1}{m} \mp \frac{m-1}{m} \sqrt{3 \cdot \frac{P_1^2(m-1) - 2mP_2}{m^2 - 1}}.$$

13. *La méthode des coefficients indéterminés*, que nous avons suivie pour arriver à la formule (2), est une des plus fécondes

(*) Si dans cette formule on suppose $m=2$, elle donne

$$S_2 = r^2 + 2ar + 2a^2 = a^2 + (a+r)^2;$$

donc elle est vraie pour $m=2$; mais il résulte de la méthode même qui nous y a conduit que si elle est vraie pour une certaine valeur de m , elle l'est pour la valeur suivante de cette quantité; donc elle est générale.

Si on suppose a et r égaux à l'unité, on trouvera pour expression de la somme des carrés des m premiers nombres entiers la formule $\frac{m(m+1)(2m+1)}{2 \cdot 3}$.

de l'algèbre, et nous allons l'employer encore pour résoudre la question suivante, que nous avons vu faire dans les examens :
On sait que le volume d'un segment sphérique est une fonction du troisième degré de sa hauteur, déterminer cette fonction.
 Soit h la hauteur du segment ; puisqu'il doit être nul pour $h=0$, la fonction demandée est nécessairement de la forme

$$Ah^3 + Bh^2 + Ch,$$

A, B, C, étant trois coefficients indéterminés dont il s'agit de trouver les valeurs. Il faut donc nous procurer trois équations entre ces trois inconnues. Mais j'observe que suivant que l'on supposera h égal au rayon r , ou au diamètre $2r$ de la sphère à laquelle appartient le segment, la fonction précédente devra se réduire à $\frac{2}{3}\pi r^3$ ou à $\frac{4}{3}\pi r^3$; donc

$$\begin{aligned} Ar^3 + Br^2 + Cr &= \frac{2}{3}\pi r^3, & \text{ou} & & Ar^2 + Br + C &= \frac{2}{3}\pi r^2, \\ 8Ar^3 + 4Br^2 + 2Cr &= \frac{4}{3}\pi r^3, & \text{ou} & & 4Ar^2 + 2Br + C &= \frac{2}{3}\pi r^2. \end{aligned}$$

Enfin, le volume du segment doit être maximum pour $h=2r$, ainsi cette valeur de h doit anéantir la dérivée de la fonction demandée ; donc

$$12Ar^2 + 4Br + C = 0.$$

On tirera facilement de ces trois équations :

$$C = 0, \quad A = -\frac{1}{3}\pi, \quad B = \pi r,$$

de sorte que la fonction demandée est

$$Ah^3 + Bh^2 + Ch = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h),$$

et c'est effectivement là l'expression du volume du segment sphérique,

P. L. CIRODDE.