NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GERONO

Note sur les différentes manières d'exprimer qu'une équation admet un nombre donné de racines égales entre elles

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 90-95

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__90_1>

NOTE

Sur les différentes manières d'exprimer qu'une équation admet un nombre donné de racines égales entre elles.

Il existe, comme on sait, plusieurs méthodes pour trouver les conditions auxquelles les coefficients d'une équation, $f(x)=0$, doivent satisfaire pour que l'équation ait un certain nombre, n, de racines égales entre elles. La première, celle qu'on applique le plus ordinairement, consiste à exprimer que le premier membre $f(x)$, de l'équation proposée, admet un diviseur de la forme $(x-a)^n$; a représentant la valeur indéterminée des n racines égales. A cet effet, on divise $f(x)$, par $(x-a)^n$; le reste de la division est un polynôme, $Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots+R$, du degré $(n-1)$ par rapport à x, et dont les coefficients A, B,...R, sont des fonctions de l'inconnue a, et des coefficients de l'équation proposée, $f(x)=0$. Ce polynôme devant être nul, indépendamment de toute valeur attribuée à x, la valeur de a doit annuler à la fois les coefficients A, B,...R; il faut donc exprimer que les n équations $A=0$, $B=0$,...$R=0$, ont une racine commune : ce qui conduit à $(n-1)$ équations de conditions entre les coefficients du premier membre, $f(x)$, de l'équation proposée.

Un second moyen d'obtenir les conditions demandées, est pris dans la théorie même des racines égales. Pour que l'équation $f(x)=0$, ait n racines égales entre elles, il faut et il suffit que cette équation, et ses $(n-1)$ dérivées successives $f'(x)=0, f''(x)=0, \ldots, f_{n-1}(x)=0$, admettent une racine commune. En exprimant que les n équations $f(x)=0, f'(x)=0, \ldots f_{n-1}(x)=0$, ont une racine commune, on trouvera $(n-1)$ conditions entre les coefficients de $f(x)$.

Les conditions obtenues de cette manière sont précisément celles que donnent les équations $A=0$, $B=0, \ldots R=0$. Car le système des équations $A=0$, $B=0, \ldots R=0$, se ramène au système des équations $f(a)=0$, $f'(a)=0, \ldots f_{n-1}(a)=0$.

En effet, on a :

$$f(x)=f[a+(x-a)]=f(a)+f'(a).(x-a)+\frac{f''(a).(x-a)^2}{1.2}$$
$$+\ldots+\frac{f_{n-1}(a).(x-a)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}+\frac{f_n(a).(x-a)^n}{1.2.3\ldots n}+\text{etc.}$$

Par conséquent, le reste obtenu en divisant $f(x)$ par $(x-a)^n$, est

$$f(a)+f'(a).(x-a)+\frac{f''(a).(x-a)^2}{1.2}+\ldots+\frac{f_{n-1}(a).(x-a)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}.$$

Ce dernier polynôme, ordonné suivant les puissances décroissantes de x, devient :

$$\frac{f_{n-1}(a)}{1.2.3\ldots(n-1)}.x^{n-1}+\frac{[f_{n-2}(a)-a.f_{n-1}(a)]}{1.2.3\ldots n-2}.x^{n-2}+\text{etc.}$$

On a donc :

$$A=\frac{f_{n-1}(a)}{1.2.3\ldots n-1}, \quad B=\frac{f_{n-2}(a)-af_{n-1}(a)}{1.2.3\ldots(n-2)}, \text{ etc.}$$

De sorte que les équations $A=0$, $B=0, \ldots$ reviennent à

$$f_{n-1}(a)=0, \quad f_{n-2}(a)-af_{n-1}(a)=0, \ldots$$

Et, ce dernier système se réduit à :

$$f_{n-1}(a)=0, f_{n-2}(a)=0, \ldots\ldots\ldots f_2(a)=0, f(a)=0.$$

On obtient donc simplement par les dérivations successives les équations auxquelles conduit la division de $f(x)$ par $(x-a)^n$; et, c'est pourquoi le second moyen d'obtenir les conditions demandées, nous paraît préférable au premier.

On trouve encore, dans la théorie des racines égales, l'indication d'une autre méthode pour parvenir aux conditions cherchées. Il résulte, en effet, du principe fondamental de cette théorie que, si l'équation $f(x)=0$, a n racines égales entre elles, le premier membre $f(x)$, de l'équation, et sa dérivée $f'(x)$, doivent avoir un commun diviseur du degré $(n-1)$ en x, et qui soit une puissance exacte de ce degré. Et la réciproque est vraie. On parviendra donc aux conditions cherchées, en exprimant, d'abord, que les polynômes $f(x)$, $f'(x)$, ont un commun diviseur du degré $(n-1)$, et, en second lieu, que ce commun diviseur est une puissance exacte du $(n-1)^{ième}$ degré. L'application de cette règle conduit à une espèce de paradoxe qu'il s'agit d'examiner.

Afin d'exprimer que les polynômes $f(x)$, $f'(x)$, ont un commun diviseur du degré $(n-1)$, on divise $f(x)$ par $f'(x)$; puis $f'(x)$ par le reste de la première division, et ainsi de suite jusqu'à ce que, dans ces divisions successives, on soit parvenu à un diviseur d, du degré $(n-1)$. Le reste, r, de cette dernière division est du degré $(n-2)$; il doit être nul, quelle que soit la valeur attribuée à x. On trouvera donc $(n-1)$ équations de conditions, pour établir que $f(x)$ et $f'(x)$, ont un commun diviseur du degré $(n-1)$.

Il faut, de plus, que ce commun diviseur soit une puissance exacte. Par conséquent, le polynôme d doit être divisible par sa dérivée d'; ce qui donne encore lieu à $(n-2)$ équations de conditions, entre les coefficients de $f(x)$. En les ajoutant aux $(n-1)$ premières, on a $(2n-3)$ conditions. Si toutes ces conditions sont distinctes les unes des autres, on en trouve par cette dernière méthode $(n-2)$ de plus que par les précédentes. C'est ce qu'il faut examiner.

Nous allons d'abord démontrer que ces $(2n-3)$ conditions obtenues ne sont pas *toujours* différentes. Car, en vertu des $(n-1)$ équations de conditions qui annulent le reste r, le polynôme d devient diviseur exact de $f(x)$ et $f'(x)$. De sorte qu'en désignant par q et p les quotients des divisions de $f(x)$, $f'(x)$, par d, on a les égalités :

$$(1) \quad f(x)=dq. \qquad (2) \quad f'(x)=dp.$$

Soient q' la dérivée de q et d' celle de d, l'égalité (1) donnera : $f'(x)=dq'+qd'$; et, en remplaçant $f'(x)$ par sa valeur dp, on aura : $dp=dq'+qd'$;

d'où l'on tire $$d(p-q') = d'q. \qquad (3)$$

On voit, par cette dernière égalité, que d est divisible par d', lorsque le polynôme q est divisible par $p-q'$. D'où il suit que d sera une puissance exacte du degré $(n-1)$, lorsque le quotient $\dfrac{q}{p-q'}$ sera une fonction entière

Cela posé, nommons m le degré de l'équation proposée $f(x)=0$. Le degré du polynôme q sera $(m-n+1)$; celui de $(p-q')$, sera $(m-n)$. Supposons $(2n-3)>(m-1)$; on aura $(n-1)>(m-n+1)$, le degré de d sera plus grand que celui de q. Alors, d ne peut être premier avec d' ; car l'égalité (3) montre que d divise le produit qd', et si d était premier avec d', il faudrait que d fût diviseur du polynôme q, ce qui est impossible, puisque le degré de d est supérieur à celui de q. Il en résulte que le nombre des conditions de la divisibilité de d par d', se réduit en devenant égal au nombre des conditions de la divisibilité de q par $p-q'$, qui est au plus égal à $(m-n)$. En ajoutant à $(m-n)$, le nombre $(n-1)$ des conditions nécessaires pour que d soit diviseur des polynômes $f(x)$, $f'(x)$, on aura, au plus, $(m-1)$ conditions. Par conséquent, si l'on suppose $(2n-3)>(m-1)$, les $(2n-3)$

égalités de conditions obtenues, ne seront pas toutes distinctes les unes des autres.

D'ailleurs, on n'obtient $(m-n)$ conditions pour la divisibilité de q par $p-q'$, que si q et $p-q'$ sont premiers entre eux. Et, dans ce cas, il est facile d'expliquer pourquoi le nombre total des conditions est $(m-1)$.

En effet, l'égalité $d(p-q')=d'q$, mise sous la forme $\frac{d(p-q')}{q}=d'$, montre que le polynôme q, divise le produit $d(p-q')$ Et, puisqu'il est premier avec $p-q'$, il doit diviser d. Or, lorsqu'au moyen des $(m-n)$ nouvelles conditions, on aura exprimé que d devient une puissance exacte $(x-\alpha)^{n-1}$, le polynôme q diviseur de d prendra la forme $(x-\alpha)^{m-n+1}$. En reportant ces valeurs de d et de q, dans l'égalité $f(x)=dq$, il en résultera $f(x)=(x-\alpha)^m$.

Ainsi, on aura exprimé que toutes les racines de la proposée sont égales entre elles, et c'est ce qui explique pourquoi l'on trouve $(m-1)$ équations de conditions.

Lorsque $(2n-3)$ est moindre que $(m-1)$, le degré de d est moindre que celui du polynôme q. Dans ce cas, si d et d' sont premiers entre eux, on aura $n-2$ conditions pour exprimer que d est une puissance exacte. Et par suite, le nombre total des conditions peut être $(2n-3)$. Mais l'égalité $d(p-q')=d'q$, fait voir que d est diviseur de $d'q$; et, puisque d est premier avec d', il faut que d divise exactement le polynôme q. On aura donc, $q=dh$, le quotient h étant un polynôme entier du degré $(m-2n+2)$. Substituant à q le produit dh, dans l'égalité $f(x)=dq$, il en résultera $f(x)=d^2h$. Les $(n-2)$ conditions qui rendent d égal à une puissance $(x-\alpha)^{n-1}$ du degré $(n-1)$, donnent $f(x)=(x-\alpha)^{2n-2}h$; d'où il suit que si l'on trouve $(2n-3)$ conditions, c'est parce qu'on a exprimé que l'équation $f(x)=0$, a $2n-2$ racines égales.

En terminant cette discussion, je ferai observer que les $(n-1)$ équations de conditions nécessaires pour qu'il existe un commun diviseur du degré $(n-1)$, entre $f(x)$ et $f'(x)$, peuvent être satisfaites de plusieurs manières différentes. Parmi leurs solutions, on trouve celles du système obtenu, en éliminant x entre les n équations $f(x)=0$, $f'(x)=0$,... $f_{n-1}(x)=0$. En choisissant ces dernières solutions pour les $(n-1)$ premières équations dont il s'agit, le polynôme d deviendra divisible par sa dérivée d', sans aucune condition nouvelle; et par conséquent, on aura seulement $(n-1)$ relations entre les coefficients de l'équation $f(x)=0$, pour exprimer que cette équation a n racines égales entre elles.

G.