Nouvelles annales de mathématiques

C. E. Page

Mémoire sur les courbes du second ordre à branches infinies

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 61-74

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__61_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1842, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

MÉMOIRE

SUR LES

COURBES DU SECOND ORDRE A BRANCHES INFINIES.

PAR C. E. PAGE,
Professeur à l'École royale d'artillerie de La Fère.

SECONDE ET DERNIÈRE PARTIE (*).

DE L'HYPERBOLE.

16. Dans l'équation A (page 22), posons $b''=b$ et $a''=a'$; ce qui revient à supposer que les deux points P et P'' sont sur une même droite parallèle à l'axe des x, et les deux points P' et P'' sur une même droite parallèle à l'axe des y; cette équation se réduit à

$$(ab'-a'b)xy+aa'(b-b')y+bb'(a'-a)x=0.$$

C'est l'équation d'une hyperbole rapportée à deux axes parallèles à ses asymptotes. On en conclut ce théorème :

Soit un triangle variable ABC (fig. 17) *dont les trois côtés sont assujettis à tourner autour de trois points fixes* P, P' *et* P''; *si le sommet* A *est assujetti à glisser sur une droite fixe* OX, *parallèle à la droite qui joint le point* P'' *au point* P, *autour duquel tourne le côté opposé* BC; *si le sommet* B *est assujetti à glisser sur une droite fixe* OY, *parallèle à la droite qui joint le point* P'' *au point* P', *autour duquel tourne le côté opposé* CA : *le troisième sommet* C *décrira une hyperbole*

(*) Pour la 1re partie de ce Mémoire, voyez la page 20.

dont les asymptotes seront parallèles aux deux droites fixes OX *et* OY.

17. En joignant les quatre points O, P, P′, C, on forme un quadrilatère OPP′C (*fig.* 18) inscrit à la courbe; les deux côtés opposés P′C et PO, rencontrent en F, et en E, les droites PK et P′H, menées par les points P et P′, parallèlement aux asymptotes. Et, à cause des parallèles, on a :

$$\frac{PF}{PG}=\frac{QA}{QO}, \quad \frac{QA}{QO}=\frac{PP''}{PK}, \quad \text{et enfin} \quad \frac{PP''}{PK}=\frac{PE}{PO},$$

d'où,

$$\frac{PF}{PG}=\frac{PE}{PO}.$$

Ce qui fait voir que la ligne EF, qui joint les points d'intersection des côtés P′C et PO, avec les parallèles aux asymptotes menées par les points P et P′, est parallèle au quatrième côté OC; on conclut de là ce théorème :

Un quadrilatère étant inscrit à une hyperbole, si, par deux sommets adjacents à un même côté, on mène deux droites parallèles aux asymptotes, et qu'on les prolonge jusqu'à la rencontre des côtés qui passent par les mêmes sommets, la ligne qui joindra ces points d'intersection, sera parallèle au quatrième côté.

Ainsi, le quadrilatère OPP′C, (*fig.* 19), étant inscrit à une hyperbole, si, par les deux sommets P et P′, on mène, parallèlement aux asymptotes, des droites qui aillent rencontrer les côtés P′C et PO, aux points F et E, la ligne EF sera parallèle au quatrième côté CO.

18. Les deux sommets, C et O, peuvent se réunir en un seul C (*fig.* 20), dans ce cas le côté CO devient une tangente à la courbe; on a donc ce théorème :

Un triangle étant inscrit à une hyperbole, si par deux sommets on mène deux droites parallèles aux asymptotes jusqu'à *la rencontre des côtés opposés, la ligne qui joindra ces deux points d'intersection, sera parallèle à la tangente menée par le troisième sommet.*

Ce théorème donne un moyen facile de résoudre le problème suivant :

Construire la tangente en un point d'une hyperbole, quand on connaît deux autres points de la courbe, et les directions des asymptotes.

19. Lorsque le côté AB du triangle variable ABC (*fig.* 17), vient rencontrer la droite fixe OX, au même point que la droite PP′ prolongée (*fig.* 21), le point C se confond avec le point P, et par conséquent, la droite BP se confond avec la tangente à la courbe en ce point.

Par les deux points P′ et O, menons une transversale qui rencontre la ligne PP″ au point D. La droite qui joindra le point B au point D sera parallèle à la droite PP′. En effet, la droite BD prolongée rencontre P P″ en F ; les parallèles donnent :

$$\frac{P'P''}{P''F}=\frac{MO}{MB}=\frac{P''A}{P''B},$$

donc BF est parallèle à P′A.

La transversale P′O rencontre la tangente BP au point K, et, à cause de BD parallèle à PP′, on a :

$$\frac{KP'}{KD}=\frac{KP}{KB}.$$

Par le point P, menons parallèlement à l'axe OY une droite qui rencontre la transversale P′O en E, nous aurons :

$$\frac{KP}{KB}=\frac{KE}{KO}, \quad \text{d'où} \quad \frac{KP'}{KD}=\frac{KE}{KO} \quad \text{ou} \quad KP'.KO=KE.KD.$$

Les deux points P′ et O sont les intersections de la transversale avec la courbe, et les deux points E et D, sont les intersections de cette même transversale avec les droites menées parallèlement aux asymptotes par le point de contact P ; on a donc ce théorème :

Si, par le point de contact d'une tangente à l'hyperbole, on mène deux droites parallèles aux asymptotes, et que, d'un point quelconque pris sur cette tangente, on mène une transversale qui coupe la courbe en deux points, et les deux parallèles aux asymptotes également en deux points : le produit des segments interceptés sur cette transversale entre la tangente et les deux points d'intersection avec la courbe, sera égal au produit des segments interceptés sur cette même transversale, entre la tangente et les deux points d'intersection avec les parallèles aux asymptotes.

Ainsi, par exemple, si, par le point de contact A de la tangente CO (*fig.* 22), on mène deux droites parallèles aux asymptotes, et que, d'un point O pris sur la tangente, on mène une transversale qui rencontre ces deux parallèles, en M et N, et la courbe en P et Q ; on aura :

$$\mathrm{OM.ON}=\mathrm{OP.OQ}.$$

20. Par les deux points P et Q, menons deux droites respectivement parallèles aux deux asymptotes, et qui rencontrent la tangente en B et C, on aura :

$$\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}=\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OM}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}}=\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{ON}},$$

multipliant membre à membre, il viendra :

$$\frac{\mathrm{OB.OC}}{\mathrm{OA}^2}=\frac{\mathrm{OP.OQ}}{\mathrm{OM.ON}} \quad \text{d'où} \quad \mathrm{OA}^2=\mathrm{OB.OC};$$

d'où l'on conclut ce théorème :

Si par un point pris dans le plan d'une hyperbole, on mène une tangente, et une transversale qui rencontre la courbe en deux points, et que par ces deux points on mène deux droites respectivement parallèles aux asymptotes, le segment compris *entre le point donné et le point de contact, sera moyen proportionnel entre les deux segments compris entre le point donné, et les deux points d'intersection de la tangente avec les deux parallèles aux asymptotes.*

Il est facile de voir que la démonstration resterait la même en menant par le point P une parallèle à AN, et par le point Q, une parallèle à AM.

21. Les trois côtés d'un triangle variable ABC étant assujettis à tourner autour des trois points fixes P, P′, P″, (*fig.* 17), et les deux sommets A et B étant assujettis à glisser sur les deux droites fixes OX et OY respectivement parallèles aux droites PP″ et P′P″; si la droite mobile AB rencontre l'axe OX au même point que la droite fixe PP′, la droite qui joint le point B au point P est une tangente à la courbe en ce point (nº 19); de même, si la droite mobile AB dans une seconde position A′B′ (*fig.* 23), rencontre l'axe OY au même point que la droite fixe PP′, la droite menée du point A′ au point P′ sera tangente à la courbe au point P′; et il est facile de voir qu'on aura

$$\frac{OA}{FP''}=\frac{ON}{FP}, \quad \text{et} \quad \frac{OA}{FP}=\frac{OA'}{FP''}; \quad \text{d'où} \quad OA^2=ON.OA'.$$

On démontrerait de la même manière qu'on a $OB'^2=OM.OB$; on conclut de là ce théorème :

Étant données deux tangentes à l'hyperbole et leur corde de contact, si par un point quelconque de la courbe, on mène une transversale parallèle à l'une des asymptotes, le segment compris sur cette transversale, entre la courbe et la corde de contact, sera moyen proportionnel entre les deux segments compris sur cette même transversale entre la courbe et les deux tangentes.

22. Il peut arriver que les deux points P et P′ (*fig.* 17), autour desquels tournent les côtés BC et AC du triangle ABC, soient situés à l'infini; dans ce cas les deux côtés BC et AC

doivent se mouvoir en restant constamment parallèles aux deux droites fixes OX et OY ; on a donc un triangle variable ABC (*fig.* 24), dans lequel deux sommets A et B glissent sur les deux droites fixes OX et OY ; le côté AB tourne autour du point fixe P″ ; enfin, les deux côtés BC et AC, se meuvent en restant parallèles aux deux droites fixes OX et OY. Il est facile de voir que la courbe engendrée par le troisième sommet C est une hyperbole dont les asymptotes sont justement les deux droites menées par le point P″, parallèlement aux deux droites fixes OX et OY.

En effet, on a

$$\frac{CH}{DO}=\frac{CE}{OE}=\frac{BP''}{P''A}=\frac{DP''}{P''H},\quad \text{d'où}\quad CH.P''H=DP''.DO.$$

On a encore $OE=AP''$ et $AP''=CF$, donc $OE=CF$;

On conclut de là ces deux théorèmes :

Si dans le plan d'une hyperbole, on mène une transversale qui rencontre la courbe en deux points, et les asymptotes également en deux points; les deux segments interceptés sur cette transversale, entre la courbe et les asymptotes, seront toujours égaux.

En supposant que les deux points d'intersection avec la courbe se réunissent en un seul, la transversale devient une tangente, d'où l'on conclut que : *la portion d'une tangente à l'hyperbole interceptée entre les deux asymptotes, est toujours divisée en deux parties égales au point de contact.*

23. Considérons l'hexagone circonscrit (*fig.* 2). Si les deux points P et P′, autour desquels tournent les droites P′A et PB, sont situés sur les axes OX et OY, la droite QQ′, sur laquelle ces droites sont assujetties à se couper, devient la corde de contact des deux tangentes OX et OY. Si l'on suppose que cette corde de contact passe tout entière à l'infini, les points de contact des tangentes OX et OY s'éloignent à l'infini ; par

conséquent, ces droites sont les asymptotes d'une hyperbole à laquelle la droite AB doit rester constamment tangente.

Mais quand la droite sur laquelle les deux droites mobiles sont assujetties à se couper, passe tout entière à l'infini, ces deux droites doivent rester constamment parallèles entre elles; on voit donc que si deux droites PB et P'A (*fig.* 25), tournant autour de deux points fixes, P et P', respectivement placés sur les axes OX et OY, sont assujetties à rester parallèles entre elles; la droite AB, qui joindra les points d'intersection de ces droites avec les axes, restera constamment tangente à une hyperbole dont les deux droites OX et OY sont les asymptotes.

Il est facile de voir que la droite mobile BA doit venir occuper la position de la droite PP'; par conséquent, cette dernière droite est une des tangentes de l'hyperbole.

Les deux points E et F, milieux de PP' et de BA, sont les points de contact de ces deux tangentes; la corde de contact EF est évidemment parallèle aux droites AP' et BP, et vient rencontrer les asymptotes aux points C et D, milieux des segments AP et BP'. On a donc ce théorème :

Dans l'hyperbole, la corde de contact de deux tangentes divise en deux parties égales la portion d'asymptote comprise entre ces deux tangentes.

24. Par un point quelconque, M, pris sur l'une des tangentes, menons une droite parallèle à la corde de contact, qui rencontre l'autre tangente en N; et deux droites parallèles aux asymptotes qui rencontrent l'autre tangente en G et H; il est facile de voir qu'on aura :

$$\frac{KG}{KA}=\frac{KM}{KP}=\frac{KN}{KB} \quad \text{et} \quad \frac{KH}{KB}=\frac{KM}{KP'}=\frac{KN}{KA},$$

d'où

$$KG.KH=\overline{KN}^2.$$

On en conclut ce théorème :

Étant données deux tangentes à l'hyperbole, si d'un point *quelconque pris sur l'une de ces tangentes, on mène deux droites parallèles aux asymptotes et une droite parallèle à la corde de contact qui aillent couper la seconde tangente en trois points, le segment compris entre le point d'intersection des deux tangentes et la parallèle à la corde de contact, sera moyen proportionnel entre les deux segments compris entre le même point et les deux parallèles aux asymptotes.*

25. Soit CX (*fig.* 26) une asymptote de l'hyperbole ; par deux points fixes, P et P', pris sur la courbe, menons deux tangentes qui viennent rencontrer l'asymptote en deux points fixes B et A ; par un troisième point variable, Q, pris sur la courbe, menons une tangente qui rencontre l'asymptote CX en un point variable C : la différence des distances du point variable C aux deux points fixes A et B sera constante et égale à AB.

Joignons les deux points fixes P et P' avec le point variable Q, les deux cordes de contact P'Q et PQ passeront par les deux points E et F, milieux de CA et de CB (n° 23), et la différence des distances du point C aux deux points E et F sera égale à EF moitié de AB ; on tire de là ce théorème :

Si par deux points fixes pris sur le périmètre d'une hyperbole, on fait passer deux droites mobiles assujetties à se couper constamment sur la courbe, la portion d'asymptote comprise entre ces deux droites mobiles sera d'une longueur constante et égale à la moitié de la portion d'asymptote comprise entre les tangentes menées par les deux points fixes.

PROBLÈMES SUR L'HYPERBOLE.

26. 1er Problème. *Construire une hyperbole connaissant trois points de la courbe, et les directions des asymptotes.*

Soient O, P, P' (*fig.* 17) les trois points donnés ; par l'un de ces points, O, par exemple, menons deux droites OX et OY parallèles aux asymptotes ; par le point P menons une droite parallèle à OX, et par le point P' une droite parallèle à OY, ces deux droites se coupent en un point P''.

Supposons qu'une droite tourne autour du point P'', joignons les points A et B, où cette droite rencontre les axes OX et OY, avec les points P' et P ; le point C, intersection des deux droites mobiles AP' et BP, décrira la courbe (nº 16).

On peut construire immédiatement le centre et, par suite, tous les éléments de la courbe. Pour cela, on construira la tangente en chacun des trois points donnés (nº 18) ; la droite menée par le point d'intersection de deux tangentes et le milieu de la corde de contact, sera un diamètre ; l'intersection de deux diamètres déterminera le centre.

27. 2me Problème. *Construire une hyperbole connaissant trois tangentes et les directions des asymptotes.*

Soient AB et PP' (*fig.* 25), deux des trois tangentes données : par un point, M, pris sur la tangente PP', menons deux droites parallèles aux asymptotes, qui rencontrent la tangente AB aux points G et H ; à partir du point K, intersection des deux tangentes, portons sur la tangente AB une longueur KN, moyenne proportionnelle entre KG et KH : la ligne menée du point M au point N sera parallèle à la corde de contact (nº 24) ; par conséquent, la ligne menée par le point K et par le milieu de MN sera un des diamètres de la courbe.

En faisant la même construction, par rapport à la tangente PP' et à la troisième tangente donnée, on aura un second diamètre et, par conséquent, le centre.

La longueur KN peut être portée de part et d'autre du point K, ce qui donne deux diamètres différents passant par le point K. Par la même raison, on aura deux diamètres différents passant par l'intersection de la tangente PP', avec la troisième tangente donnée ; il s'en suit que le problème a quatre solutions.

28. 3^{me} **Problème.** *Construire une hyperbole connaissant deux points, une tangente, et les directions des asymptotes.*

Soient P et Q (*fig.* 22), les deux points donnés; CO, la tangente : le problème serait résolu si l'on connaissait le point de contact.

Joignons les deux points P et Q, et prolongeons la droite PQ jusqu'à la rencontre de la tangente au point O. Par le point P, menons une parallèle à l'une des asymptotes, et par le point Q, une parallèle à l'autre. Ces deux droites iront rencontrer la tangente en deux points B et C. A partir du point O, prenons, sur la tangente, une longueur OA moyenne proportionnelle entre OB et OC : le point A sera le point de contact cherché (n° 20).

La longueur OA pouvant être portée de part et d'autre du point O, le problème a deux solutions.

L'un des deux points donnés pourrait être situé sur la tangente.

Soit OC la tangente; A, son point de contact; Q, le second point donné.

Par le point A, menons deux droites parallèles aux asymptotes; par le point Q menons une droite quelconque qui rencontre la tangente au point O, et les deux parallèles aux asymptotes en M et N Sur cette droite, prenons un point P tel que l'on ait OP.OQ=OM.ON ; le point P sera situé sur la courbe (n° 19).

Le problème n'a qu'une seule solution.

29. 4° **Problème.** *Construire une hyperbole, connaissant deux tangentes, un point, et les directions des asymptotes.*

Soient AB et CD (*fig.* 27) les deux tangentes, et G le point donné : le problème serait résolu si l'on connaissait les points de contact des tangentes.

Par le point G, menons parallèlement à l'une des asymptotes, une droite qui rencontre les tangentes en M et N ; prenons le point F tel que l'on ait :

$$\overline{GF}^2 = GM.GN.$$

La corde de contact devra passer par le point F (n° 21).

Par le point G, menons parallèlement à la seconde asymptote une droite qui rencontre les tangentes en P et Q ; prenons un point E tel que l'on ait :

$$\overline{GE}^2 = GP.GQ.$$

La corde de contact devra passer par ce second point; les points de contact seront donc donnés par les intersections de la droite FE, avec les tangentes.

Les segments, GE et GF, pouvant être portés de part et d'autre du point G, il s'en suit que le problème a quatre solutions.

Le point donné pourrait être situé sur l'une des deux tangentes données.

Soient AB, CD (*fig.* 29) les deux tangentes, et P le point de contact de la tangente AB. Par le point P, menons parallèlement aux asymptotes, deux droites qui rencontrent la tangente CD, aux points C et E. A partir du point G, intersection des tangentes, portons un segment GQ, moyen proportionnel entre GE et GC. La corde de contact devra passer par le point Q; on aura donc cette corde de contact, en joignant le point P au point Q.

Par le point G menons, parallèlement aux asymptotes, deux droites qui rencontrent la corde de contact aux points M et N. Les points E et F, milieux des segments GM, et GN, appartiendront à la courbe,

Le segment GQ pouvant être porté de part et d'autre du point G, le problème a deux solutions.

30. 5[e] **Problème.** *Construire une hyperbole connaissant une asymptote et trois points.*

Soient A, B, C (*fig.* 31) les trois points donnés ; OX l'asymptote. Joignons le point A au point B, et prolongeons AB jusqu'à la rencontre de l'asymptote en Q. A partir du point A, portons sur AB une longueur AP, égale à BQ. Le point P étant pris entre A et B, ou sur le prolongement, suivant que le point Q est lui-même situé entre A et B ou sur le prolongement, ce point P appartient à la seconde asymptote. On déterminera de la même manière sur AC un second point de la seconde asymptote.

31. 6[e] **Problème.** *Construire une hyperbole connaissant trois tangentes et une asymptote.*

Soient OX l'asymptote (*fig.* 28); AC, BC et DE, les trois tangentes.

Les trois tangentes et l'asymptote forment un quadrilatère complet circonscrit à la courbe ; ce quadrilatère complet se décompose en trois quadrilatères simples ; or, on sait que dans tout quadrilatère simple circonscrit à une courbe du second ordre, la corde de contact des deux côtés opposés passe par le point de croisement des deux diagonales, (Voyez *Complément de géométrie analytique*, p. 241); le point de contact de l'asymptote OX est situé à l'infini, par conséquent, la ligne qui joint ce point de contact, avec le point de contact de l'une des trois autres tangentes, doit être parallèle à cette asymptote.

Par le point G, où se croisent les deux diagonales CD et AF du quadrilatère simple ADFC, faisons passer une droite parallèle à OX, cette droite ira rencontrer le côté opposé CF, en un point H qui sera le point de contact de ce côté.

En considérant successivement les deux autres quadrilatères simples, on déterminerait de la même manière les points de contact des deux autres tangentes.

32. 7^e **Problème.** *Construire une hyperbole, connaissant deux points, une tangente et une asymptote.*

Soient A et B (*fig.* 30) les deux points; CD, la tangente; et OX l'asymptote : menons la ligne AB, et prolongeons la jusqu'à ce qu'elle rencontre la tangente en N, et l'asymptote en M. Construisons les deux points doubles Q et Q′ qui appartiennent au système d'involution déterminé par les quatre points A, B, M, N (Voyez *Complément de géométrie analytique*, 217). La corde de contact de la tangente CD et de l'asymptote OX, devra passer par l'un de ces deux points. Or, cette corde de contact doit être parallèle à l'asymptote; par conséquent, en menant par le point Q, une parallèle à OX, cette parallèle rencontrera la tangente CD en un point E, qui sera le point de contact de cette tangente.

Comme on peut mener cette parallèle par le point Q, ou par le point Q′, le problème a deux solutions.

Dans le cas où l'un des deux points donnés est situé sur la tangente, le problème n'a qu'une seule solution.

33. 8^e **Problème.** *Construire une hyperbole, connaissant deux tangentes, un point et une asymptote.*

Soient AB, CD (*fig.* 32) les deux tangentes; OX l'asymptote; et G, le point donné.

Par le point G menons, parallèlement à l'asymptote, une droite qui rencontre les deux tangentes en P et Q; prenons les points K et K′, tels que l'on ait :

$$GK^2 = GK'^2 = GP.GQ$$

La corde de contact devra passer par l'un de ces deux points (n° 21). Elle doit aussi passer par le point E, milieu de CA (n° 23); par conséquent, si l'on mène la ligne KE, les points M et N, où elle rencontrera les deux tangentes, seront les points de contact de ces tangentes.

Comme on peut joindre le point E, avec l'un ou l'autre des deux points K ou K′, le problème a deux solutions.

Le point donné peut être situé sur l'une des deux tangentes. Soient AB, CD (*fig.* 33) les deux tangentes; OX l'asymptote; M, le point de contact de la tangente AB. En joignant le point M avec le point E, milieu du segment CA intercepté sur l'asymptote, entre les deux tangentes, on aura la corde de contact, et par suite le point de contact de la tangente CD.