Nouvelles annales de mathématiques

Roche

Condition de réalité des racines de l’équation du troisième degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 511-513

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__511_1>

CONDITION DE RÉALITÉ

Des racines de l'équation du troisième degré.

PAR M. ROCHE,
de Montpellier.

Soit $$x^3+ax^2+bx+c=0.$$

Cette équation a trois racines, dont une nécessairement réelle. Soit α cette racine supposée connue. En divisant le premier membre de l'équation par $x-\alpha$, on obtiendrait une équation du second degré, qui donnerait les deux autres racines par une formule de la forme

$$x=\mathrm{A}\pm\sqrt{\mathrm{R}},$$

et suivant la valeur de R, ces racines seront réelles, égales ou imaginaires.

Or, si l'on désigne par $\mathrm{Q}=0$, la condition pour que la proposée ait deux racines égales, R sera nécessairement égal à BQ, et

$$x=\mathrm{A}\pm\sqrt{\mathrm{BQ}}, \tag{1}$$

B étant une quantité de signe constant. Car si B devenait infini pour certaines valeurs des coefficients, la proposée aurait alors des racines infinies, ce qui ne peut être puisque le coefficient de x^3 est l'unité. B ne peut pas non plus passer pour zéro, car si cela était, B entrerait comme facteur dans la condition d'égalité de deux racines. Donc B a toujours le même signe.

Quant à la condition d'égalité $\mathrm{Q}=0$, elle est facile à calculer par la méthode suivante. Désignant par β la racine double, le théorème sur la composition des équations donne :

$$\alpha+2\beta=-a, \qquad 2\alpha\beta+\beta^2=b, \qquad \alpha\beta^2=-c,$$

et l'élimination de α et β entre ces trois relations conduit à la condition cherchée qui est

$$3(9c-ab)^2+2a(9c-ab)(2a^2-6b)+b(2a^2-6b)^2=0.$$

Reste à déterminer le signe de B, et puisqu'il est toujours le même, il suffit de prendre un cas particulier, par exemple celui où $a=0$ et $c=0$; on trouve alors pour les racines $x=0$ et $x=\pm\sqrt{-b}$; et comme alors $\mathrm{Q}=36b^3$, on en conclut $\mathrm{B}=-\frac{1}{36b^2}$, *B est donc négatif. Donc pour que les racines* (1) soient réelles, il faut que Q soit négatif. Ainsi la condition de réalité des racines de l'équation proposée est

$$3(9c-ab)^2+2a(9c-ab)(2a^2-6b)+b(2a^2-6b)^2<0.$$

Prenons, comme vérification, l'équation $x^3+px+q=0$, en faisant $a=0$, $b=p$, $c=q$, nous trouvons la condition connue $4p^3+27q^2<0$.

Observation. Dans une équation de degré m, il faut $m-1$ conditions pour que toutes les racines soient égales (v.p. 90); et d'après le théorème de Sturm, il faut généralement autant de conditions pour que toutes les racines soient réelles. Tm.