L. A. LE COINTE

Théorème de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 508-511

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__508_1>

THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE.

PAR M. L. A. LE COINTE,
Professeur de mathématiques.

Si on divise une demi-circonférence ABCDEFGH (*fig.* 105), en un nombre impair de parties égales, par exemple en 7, et si B,C,D,E,F,G, étant les points de division, on mène les cordes BG, CF, DE, qui sont toutes parallèles au diamètre AH, puis si l'on mène les deux rayons OD, OE, qui aboutissent aux extrémités de la corde DE, qui est, parmi toutes les cordes qu'on vient de mener, celle qui est la plus éloignée du centre, je dis qu'on aura

$$\mathrm{DE} + \mathrm{KL} + \mathrm{MN} = \mathrm{R},$$

en représentant le rayon OA par R, et KL,MN étant les parties des cordes CF,BG, interceptées entre les deux rayons OD,OE.

Démonstration. Soient B′,C′,D′,E′ les points symétriques des points B,C,D,E par rapport au diamètre AH. Alors, le rayon OD prolongé passera par le point E′, et de même les deux points E,D′ seront sur un même diamètre. Menons les deux cordes DC′,CD′ qui se coupent en un point P, et joignons le point D au point D′, et le point C au point C′. Les deux triangles DPD′, CPC′ sont semblables et de plus isocèles ; donc si du point P on abaisse une perpendiculaire sur DD′, cette perpendiculaire passant par le point milieu de DD′, passera par le centre du cercle ; et de plus, comme elle divise l'angle DPD′ en deux parties égales, elle sera aussi bissectrice de l'angle DOD′, puisque CD′ est parallèle à OD et DC′ à OE. Donc la perpendiculaire abaissée du point P sur DD′ n'est autre que le diamètre AH ; donc le point P de rencontre des deux cordes CD′, DC′ est sur AH. De même, si l'on mène les deux cordes BC′, CB′, leur point de rencontre Q sera situé sur AH. Enfin menons la corde AB, qui est parallèle à OE.

Les triangles ODP, PCQ, QBA, sont tous semblables au triangle ODE, de plus le triangle ODP est égal au triangle ODE, le triangle PCQ est égal au triangle OLK, et enfin le triangle QBA est égal au triangle ONM ; d'où

$$DE=OP, \qquad KL=PQ, \qquad MN=QA.$$

D'où enfin $\quad DE+KL+MN=OA=R.$ C.Q.F.D.

On voit clairement que le mode de démonstration que nous venons d'employer est applicable au cas où la demi-circonférence serait partagée en un nombre impair quelconque, de parties égales.

Corollaire. On a

$$\frac{1}{2}MN=\sin\frac{\pi}{7}.\,\text{tang}\,\frac{\pi}{14},$$

$$\frac{1}{2}KL=\sin 2.\frac{\pi}{7}.\,\text{tang}\,\frac{\pi}{14},$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{DE} = \sin 3.\frac{\pi}{7}.\ \mathrm{tang}\ \frac{\pi}{14};$$

d'où

$$\sin\frac{\pi}{7} + \sin 2.\frac{\pi}{7} + \sin 3.\frac{\pi}{7} = \frac{1}{2\,\mathrm{tang}\frac{\pi}{14}},$$

en faisant le rayon égal à l'unité.

Comme le théorème ci-dessus est vrai, quand même on partagerait la demi-circonférence en un nombre impair quelconque, $2n+1$, de parties égales, il en résulte qu'on a la série connue :

$$\sin\frac{\pi}{2n+1} + \sin 2.\frac{\pi}{2n+1} + \sin 3.\frac{\pi}{2n+1} + \sin 4.\frac{\pi}{2n+1} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \sin n.\frac{\pi}{2n+1} = \frac{1}{2\,\mathrm{tang}\frac{\pi}{2(2n+1)}}.$$

En effet, elle est une conséquence de cette autre série qui a été donnée par Euler (*Introductio in analysin infinitorum*, tome I^er^, page 218),

$$\sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \sin(a+3b) + \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \sin(a+nb) = \frac{\sin\left(a+\frac{1}{2}nb\right)\sin\frac{1}{2}(n+1)b.}{\sin\frac{1}{2}\,b}$$

Si, dans cette série, nous faisons $b = a$, il viendra

$$\sin a + \sin 2a + \sin 3a + \sin 4a + \ldots\ldots\ldots + \sin(n+1)a$$

$$= \frac{\sin\frac{a}{2}(n+2)\sin\frac{a}{2}(n+1)}{\sin\frac{a}{2}};$$

par conséquent on aura

$$\sin a + \sin 2a + \sin 3a + \sin 4a + \ldots\ldots\ldots + \sin na$$

$$= \frac{\sin\frac{a}{2}(n+1)\sin\frac{a}{2}.n}{\sin\frac{a}{2}}.$$

Or, on sait qu'on a la formule

$$\sin p . \sin q = \frac{1}{2}\cos(p-q) - \frac{1}{2}\cos(p+q),$$

d'où

$$\sin\frac{a}{2}(n+1).\sin\frac{a}{2}n = \frac{1}{2}\cos\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{a}{2}(2n+1),$$

et, par conséquent,

$$\sin a + \sin 2a + \sin 3a + \sin 4a + \ldots\ldots\ldots + \sin na$$

$$= \frac{1}{2\operatorname{tang}\frac{a}{2}} - \frac{\cos\frac{a}{2}(2n+1)}{2\sin\frac{a}{2}};$$

d'où

$$\sin\frac{\pi}{2n+1} + \sin 2.\frac{\pi}{2n+1} + \sin 3\frac{\pi}{2n+1} + \sin 4\frac{\pi}{2n+1} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \sin n\frac{\pi}{2n+1} = \frac{1}{2\operatorname{tang}\frac{\pi}{2(2n+1)}};$$

car, $\cos\frac{a}{2}(2n+1)$ devient égal à $\cos\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire devient nul quand $a = \frac{\pi}{2n+1}$, tandis que $\sin\frac{a}{2}$ ne devient pas nul.