NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

VACHETTE

Question d’examen

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 506-507

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__506_0>

QUESTION D'EXAMEN.

PAR M. VACHETTE.

On a n prismes de même hauteur circonscrits à un tétraèdre régulier dont l'arête est a, et superposés : on demande de trouver leur somme. En faisant $n = \infty$, on trouve la mesure du tétraèdre (*fig.* 95 bis).

Le premier prisme a pour base le triangle équilatéral ABC, et pour hauteur $x = \frac{h}{n}$: le côté de ABC est a.

Le deuxième a pour base A'B'C', et la même hauteur ; le côté de A'B'C' est $a' = a\frac{n-1}{n}$.

Le troisième. . . . . $a'' = a\frac{n-2}{n}$.

Ainsi de suite.

La surface de ABC est $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$; le volume du premier prisme sera $\frac{a^2h\sqrt{3}}{4n}$, mais $h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{1}{3}a\sqrt{6}$, donc

1^er^ prisme. . . . . $V = \frac{a^3\sqrt{18}}{12n} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4n}$,

2^e^ prisme, a remplacé par $a\frac{n-1}{n}$, n du div^r^. par $(n-1)$, $\frac{a^3\sqrt{2}}{4(n-1)}\cdot\frac{(n-1)}{n^3}$

3^e^. . . . . $a\frac{n-2}{n}$ . . . . . . $(n-2)$, $\frac{a^3\sqrt{2}}{4(n-2)}\cdot\frac{(n-2)^3}{n^3}$

4^e^. . . . . $\frac{a^3\sqrt{2}}{4(n-3)}\cdot\frac{(n-3)}{n^3}$

. . . .

la somme

$$\Sigma = \frac{a^3\sqrt{2}}{4n} + \frac{a^3\sqrt{2}}{4n^3}\left\{(n-1)^2+(n-2)^2+\ldots\ldots\ldots+2^2+1\right\},$$

or la somme des carrés des n 1^ers^ nombres $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

donc on aura, en remplaçant n par $(n-1)$, la quantité entre parenthèses égale à $\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$, et

$$\Sigma = \frac{a^3\sqrt{2}}{4n} + \frac{a^3\sqrt{2}}{4n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4n} + \frac{a^3\sqrt{2}}{24n^2}(2n^2-3n+1)$$

$$= \frac{a^3\sqrt{2}}{4n} + \frac{a^3\sqrt{2}}{12} - \frac{a^3\sqrt{2}}{8n} + \frac{a^3\sqrt{2}}{24n^2}.$$

Quand on fait $n=\infty$, on a le volume du tétraèdre $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ en effet $V = ABC.\frac{h}{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3} =$

$$= \frac{a^3\sqrt{18}}{4.9} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$
