Nouvelles annales de mathématiques

Terquem

Recherches des principales propriétés des diamètres conjugués dans les surfaces du second degré ; déduites des relations de Lagrange

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 497-505

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__497_0>

RECHERCHES

Des principales propriétés des diamètres conjugués dans les surfaces du second degré ;

Deduites des relations de Lagrange. (Suite, *voyez* p. 387).

—

1. L'expression désignée par λ est, comme on sait, le dénominateur commun aux trois inconnues u,v,t des trois équations suivantes du premier degré:

$$x'u + x''v + x'''t = k'; \quad y'u + y''v + y'''t = k''; \quad z'u + z''v + z'''t = k''', \qquad (1)$$

k',k'',k''' étant des constantes arbitraires.

Eu égard aux relations (I), ces équations se transforment en celles-ci

$$\begin{aligned} \alpha'u + \beta'''v + \beta''t &= k'x' + k''y' + k'''z' = l', \\ \beta'''u + \alpha''v + \beta't &= k'x'' + k''y'' + k'''z'' = l'', \qquad (2) \\ \beta''u + \beta'v + \alpha'''t &= k'x''' + k''y''' + k'''z''' = l'''. \end{aligned}$$

résolvant, on trouve (XI) et (VII)

$$\lambda^2 u = l'a' + l''b''' + l'''b''; \qquad \lambda^2 v = l'b''' + l''a'' + l'''b', \qquad \lambda^2 t = l'b'' + l''b' + l'''a''. \qquad (3)$$

Élevant au carré chaque membre des équations (1), et les ajoutant, il vient

$$\alpha'u^2 + \alpha''v^2 + \alpha'''t^2 + 2(\beta'''uv + \beta''ut + \beta'vt) = k'^2 + k''^2 + k'''^2, \qquad (4)$$

remplaçant u,v,t par leurs valeurs, tirées des équations (3), on obtient une équation qui doit être identique relativement aux constantes arbitraires k',k'',k''', ce qui fournit six relations entre les quantités $\lambda,a,b,c,\alpha,\beta,\gamma$.

2. Considérons le cas particulier, le seul dont nous aurons besoin, où l'on a

$$\alpha'=\alpha''=\alpha''', \quad \text{et} \quad \beta'=\beta''=\beta'''=0;$$

de là,

$$a'=a''=a'''=\alpha'^2, \quad b=b'=b''=0, \quad A'=A''=A'''=\alpha'^4,$$
$$B'=B''=B'''=0;$$
$$\lambda^2=\alpha'^3(\text{XI}); \; u=\frac{l'}{\alpha'}; \; v=\frac{l''}{\alpha'}; \; t=\frac{l'''}{\alpha'};$$

donc l'équation (4) donne

$$l'^2+l''^2+l'''^2=\alpha(k'^2+k''^2+k'''^2);$$

comparant les termes semblables, il vient

$$x'^2+x''^2+x'''^2=y'^2+y''^2+y'''^2=z'^2+z''^2+z'''^2=\alpha',$$

relation qu'on peut déduire facilement de (XVI)

$$x'y'+x''y''+x'''y'''=x'z'+x''z''+x'''z'''=y'z'+y''z''+y'''z''=0;$$

nouvelle relation que nous désignons par (XX).

Ce procédé ingénieux, qui peut s'étendre à un nombre quelconque d'équations de la forme (I), a été employé par Lagrange et par Poisson (Corresp. sur l'Ecole polyt., tome I, p. 237, édit. de 1808).

3. Soit maintenant $q^2r^2x^2+p^2r^2y^2+p^2q^2z^2=p^2q^2r^2$, l'équation d'un ellipsoïde rapportée à trois diamètres conjugués quelconques; soient p', q', r' les longueurs de trois autres demi-diamètres conjugués, dont les extrémités ont pour coordonnées respectives x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z'''; substituant les valeurs de ces coordonnées dans l'équation de l'ellipsoïde, on obtient trois équations de la forme (I), mais où x' est remplacé par qrx'; y' par pry'; z' par pqz'; x'' par qrx'', etc. $\alpha'=\alpha''=\alpha'''=p^2q^2r^2$; les demi-diamètres p', q', r' étant conjugués, après avoir remplacé x', x'', x''', etc. Ainsi qu'il a été dit, l'on a $\beta'=\beta''=\beta'''=0$; donc, on a le cas particulier du paragraphe précédent; ainsi $\xi'=pq^2r^2x'$; $\xi'=qp^2r^2x'$; $\xi'''=rp^2q^2x''x'''$, etc.; $\lambda=p^3q^3r^3$ (XI et XVIII).

4. *Théorème* I. Si on projette un système de trois diamètres conjugués sur un quatrième diamètre parallèlement au plan conjugué à ce diamètre, la somme des carrés des projections est égale au carré de ce quatrième diamètre. (Chasles, *Aperçu historique*, p. 824. 1837.)

Car la relation $x'^2+x''^2+x'''^2=\alpha'$, trouvée ci-dessus, donne, après avoir remplacé x', x'', x''', par les valeurs indiquées,

$$x'^2+x''^2+x'''^2=p^2\,; \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

5. *Théorème* II. La somme des carrés de trois diamètres conjugués est constante. Supposons les axes rectangulaires, on aura

$$x'^2+y'^2+z'^2=p'^2\,;\quad x''^2+y''^2+z''^2=q'^2\,;\quad x'''^2+y'''^2+z'''=r'^2;$$

ajoutant ces équations membre à membre, et ayant égard au théorème précédent, on a

$$p'^2+q'^2+r'^2=p^2+q^2+r^2\,;$$

donc, etc.

6. *Théorème* III. La somme des carrés des projections orthogonales d'un système de trois diamètres conjugués sur une droite fixe quelconque est constante. (Chasles, *Aperçu historique*, p. 824.)

Désignons la droite fixe par s, les axes étant rectangulaires, on a les formules connues

$$p'\cos(p',s)=x'\cos(s,p)+y\cos(s,q)+z'\cos(s,r)\,;$$

car $\dfrac{x'}{p'}=\cos(p',p')\,;\ \dfrac{y'}{p'}=\cos(p',q)\,;\ \dfrac{z'}{p'}=\cos(p',r)\,;$

où $\cos(p',s)$ désigne, d'après une notation adoptée, le cosinus de l'angle des droites p' et s, et ainsi des autres. Le premier membre est la valeur de la projection du demi-diamètre p' sur la droite s. On a deux équations semblables pour les projections de q', r' sur la même droite s. Élevant chaque membre au carré, les ajoutant, en ayant égard à la relation (XX), il vient

$$p'^2\cos^2(p',s)+q'^2\cos^2(q',s)+r'^2\cos^2(r',s)=p^2\cos^2(s,p)+$$
$$+q^2\cos^2(s,q)+r^2\cos^2(s,r),$$

le second membre est une quantité constante, donc, etc.

Ce théorème III peut encore s'énoncer ainsi : la somme des carrés des distances orthogonales des extrémités de trois demi-diamètres, conjugués à un plan diamétral fixe, est constante.

7. *Théorème* IV. La somme des carrés des distances des extrémités de trois diamètres conjugués à un diamètre fixe, est constante.

Cette somme est évidemment égale à la somme des carrés des trois demi-diamètres conjugués, quantité constante, moins la somme des carrés des projections de ces demi-diamètres sur le diamètre fixe, quantité également constante (théorème III); donc ce théorème peut s'énoncer ainsi : la somme des carrés des projections de trois diamètres conjugués sur un plan fixe, est constante.

8. *Théoreme* V. Étant donnés deux ellipsoïdes quelconques, la somme des carrés de trois diamètres conjugués du premier ellipsoïde, divisés respectivement par les carrés des diamètres qui leur sont parallèles dans le second ellipsoïde, est une quantité constante. (*Aperçu historique*, pag 824.) Soit $\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}+\frac{z^2}{r^2}=1$, l'équation d'un ellipsoïde rapportée aux axes principaux ;

$$A'x^2+A''y^2+A'''z^2+B'yz+B''xz+B'''xy-1=0,$$

l'équation d'un second ellipsoïde, concentrique au premier ; p',q',r' demi-diamètres conjugués dans le premier ellipsoïde ; x',y',z' les coordonnées de l'extrémité de p' ; x'',y'',z'', etc. ; d, e, f, parties des demi-diamètres p', q', r', interceptées par le second ellipsoïde, et z_1 coordonnée de l'extrémité de d, on a donc

$$\frac{p'^2}{d^2}=\frac{z'^2}{z_1^2}=+\mathrm{A}'x'^2+\mathrm{A}''y'^2+\mathrm{A}'''z'^2+\mathrm{B}'y'z'+\mathrm{B}''x'z'+\mathrm{B}'''x'y',$$

car le diamètre p' a pour équations $y=\frac{y'}{z'}z$, $x=\frac{x'}{z'}z$, d'où en faisant attention à la relation (XX), l'on tire

$$\frac{p'^2}{d^2}+\frac{q'^2}{e^2}+\frac{r'^2}{f^2}=+\mathrm{A}'p^2+\mathrm{A}''q^2+\mathrm{A}'''r^2;$$

le second membre est constant, donc etc.

9. *Théorème* VI. La somme des valeurs inverses des carrés de trois diamètres rectangulaires d'un ellipsoïde est constante.

Il suffit de supposer que le premier ellipsoïde est une sphère; si le second ellipsoïde est une sphère, on retombe sur le théorème II.

10. Les équations VII sont similaires aux équations I et II, les projections des arêtes x', y', z'; x'', y'', z'', etc., sont remplacés par ξ', ξ'', ξ''', projections des aires des faces du parallélipipède construit sur les trois arêtes p', q', r'; on a donc pour ces faces des théorèmes analogues à ceux qu'on vient de démontrer pour les arêtes, et, sans nouveau calcul, on conclut.

Théorème VII. Un parallélipipède étant construit sur trois demi-diamètres conjugués d'un ellipsoïde, si l'on projette ses faces sur un plan fixe, parallèlement au diamètre conjugué à ce plan, la somme des carrés de ces projections est constante (correspond au théorème I).

Théorème VIII. La somme des carrés des aires de ces faces, est constante (correspond au théorème II).

Théorème IX. La somme des carrés des projections orthogonales de ces faces sur un plan fixe est constante (Théorème III).

11. *Théorème* X. Le volume du parallélipipède construit sur trois diamètres conjugués est constant.

Les axes étant rectangulaires et mettant dans l'expression λ, qrx', pry', pqz', etc., pour x', y', z', etc., on a $x'y''z'''+$ etc. $=pqr$; car $\lambda=p^2q^2r^2$; or le premier membre est le volume du parallélipipède et le second membre est constant, donc.

12. *Théorème* XI. Étant donnés dans l'ellipsoïde deux systèmes de diamètres conjugués, si l'on construit un parallélipipède avec trois quelconques de ces diamètres, il est équivalent au parallélipipède construit sur les trois diamètres constants.

Si l'on prend trois diamètres appartenant au même système, on revient au théorème précédent. Il faut donc prendre deux diamètres dans le premier système, et le combiner avec un autre du second système; nous conservons pour le premier système, la même notation qu'au paragraphe 3, et nous prenons les mêmes lettres pour le second système, mais l'accent étant placé en bas. On a

$$\frac{\lambda}{\alpha'}=\frac{p^2(y''z'''-z''y''')}{x'}=\frac{p^2(y_1''z_1'''-z_1''y_1''')}{x_1'}\ \text{(XIX)},$$

d'où $x_1'(y''z'''-z''y''')=x'(y_1''z_1'''-z_1''y_1''')$; on a encore deux équations semblables pour x_1'' et x_1'''; réunissant ces équations en une seule, le premier membre exprime le volume du parallélipipède contruit sur les diamètres p, q, p_1; et le second, le volume du parallélipipède construit sur p_1, q_1, p. C.Q.F.D.

13. Ces théorèmes convenablement modifiés, ont lieu aussi dans les hyperboloïdes, il suffit de rendre négatif le carré d'un des diamètres conjugués dans l'hyperboloïde à une nappe, et les carrés de deux de ces diamètres, pour l'hyperboloïde à deux nappes.

14. Si, à l'aide du parallélipipède fait sur trois diamètres

conjugués, on imagine un second parallélipipède ayant son sommet au centre, et les trois arêtes proportionnelles aux faces du premier parallélipipède, et faisant respectivement les mêmes angles avec les axes, ce second parallélipipède jouit des mêmes propriétés que le premier; c'est une conséquence de la similitude des équations VIII et I Les angles dièdres de ce second parallélipipède sont les suppléments des angles plans du premier, et *vice versâ*. Pour obtenir ce second parallélipipède, il suffit d'élever par le centre des droites respectivement perpendiculaires aux faces du premier parallélipipède. Avec les quinze quantités X', X'', X''', Y'.. A'...B'... on peut former de nouvelles équations semblables aux équations I, II, III; on en déduirait de nouvelles relations et de nouveaux parallélipipèdes et ainsi indéfiniment; mais les arêtes des parallélipipèdes n'ont que deux directions différentes. (Binet, *Journ. de l'Éc. polytechn.*, cah. XVI, p. 313).

15. Les théorèmes II, X et VIII, ont été démontrés pour la première fois par M. Livet (*Journal de l'École polytechnique*, cahier XIII, p. 281, 1806); le théorème VII est dû à M. Binet, qui l'a inséré dans un très-beau mémoire, riche en résultats analytiques et géométrique (*Journal de l'École polytechnique*, cahier XVI, p. 280, 1813). Ces théorèmes sont fondamentaux. Les autres sont de M. Chasles, qui les a établis facilement ainsi que les quatre précédents, à l'aide d'un certain mode de transformation de surface, moyen *euristique* que le célèbre géomètre désigne sous le nom de méthode *homographique*, et dont nous parlerons à une autre occasion; ces propositions sont toutes renfermées dans les relations de Lagrange et dans les propriétés de la formule *cramérienne*, formule connue aussi sous le nom de *résultante*, qui a été étudiée par les analystes les plus éminents, dans cet ordre des temps: Vandermonde, Laplace, Lagrange, Monge, Binet, Jacobi, Cauchy. Nous tâcherons de donner

une idée de ces importants travaux, dans l'article sur l'élimination (v. 125).

16. Il est presque inutile de remarquer que la plupart de ces théorèmes existent aussi pour les courbes du second degré et qu'on les obtient, en rendant nulle une des trois coordonnées ; mais nous croyons pour compléter, devoir consigner ici les belles relations que Monge a énoncées, sans démonstration, dans les Mémoires de l'Académie de 1784. (p. 85); Encke, le célèbre astronome, en a donné une démonstration assez longue et fondée sur la trigonométrie sphérique (Berlinisches Jahrbuch, 1832, et Correspondance mathématique, tome VII, p. 273, 1832). Il serait à désirer qu'on pût retrouver les considérations, sans doute plus simples, employées par Monge.

Dans les équations I (p. 388), faisons

$$\alpha = \alpha' = \alpha'' = 1, \qquad \beta = \beta' = \beta'' = 0;$$

posons ensuite

$$\begin{aligned} 1 + x' + y'' + z''' &= 2M, \\ 1 + x' - y'' - z''' &= 2N, \\ 1 - x' + y'' - z''' &= 2P, \\ 1 - x' - y'' + z''' &= 2Q; \end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{NP} + \sqrt{MQ}, \\ x'' &= \sqrt{NP} - \sqrt{MQ}, \\ x''' &= \sqrt{NQ} + \sqrt{MP}, \\ z' &= \sqrt{NQ} - \sqrt{MP}, \\ z'' &= \sqrt{PQ} + \sqrt{MN}, \\ y''' &= \sqrt{PQ} - \sqrt{MN}. \end{aligned}$$

D'ailleurs, la vérification est très-facile ; car on a

$$x' = M + N - 1, \quad y'' = M + P - 1, \quad z''' = M + Q - 1,$$

et

$$M + N + P + Q = 2.$$

17. Voici quelques conjectures sur la manière dont Monge est parvenu à ces expressions ; on a

$$x'^2+y'^2+z'^2=x'^2+x''^2+x'''^2=1, \qquad (a)$$

d'où l'on tire $(y'+x'')(y'-x'')=(x'''+z')(x'''-z')$; pour satisfaire à cette équation, posons, selon la méthode d'Euler,

$$y'+x''=np,\ y'-x''=mq,\ x'''+z'=nq,\ x'''-z'=mp;$$

de là on déduit

$$2y'=np+mq,\ 2x''=np-mq,\ 2x'''=nq+mp,\ 2z'=nq-mp;$$

mais l'on a aussi

$$x'''^2+y'''^2+z'''^2=z'^2+z''^2+z'''^2=1;\ \text{d'où}\ x'''^2-z'^2=z''^2-y'''^2;$$

et en opérant comme ci-dessus, on aura

$$2z''=pq+mn, \qquad 2y'''=pq-mn;$$

substituant les valeurs de y' et z' dans l'équation (a), on aura

$$(m^2+n^2)(p^2+q^2)=4-4x'^2.$$

Posons

$$2x'+2=m^2+n^2,$$
$$-2x'+2=p^2+q^2;$$

il vient

$$2x'=m^2+n^2-2 \quad \text{et} \quad m^2+n^2+p^2+q^2=4.$$

En cherchant à satisfaire aux équations $x''^2+y''^2+z'^2=1$, $x'''^2+y'''^2+z'''^2=1$, on trouve de même $2y''=m^2+p^2-2$, $2z'''=m^2+q^2-2$; on voit facilement que ces valeurs de x', y', z', etc., sont celles de Monge.

(*La suite prochainement.*)