GUILMIN

Problèmes proposés aux examens

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 44-48

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__44_0>

PROBLÈMES PROPOSÉS AUX EXAMENS.

SOLUTIONS DE M. GUILMIN,
Ancien élève de l'École normale, professeur de mathématiques.

1. *Déterminer le nombre des arrangements, avec répétition, que l'on peut faire avec* m *lettres, prises* n *à* n.

Nota. Ces arrangements ne diffèrent des arrangements ordinaires, qu'en ce que chaque lettre peut être employée plusieurs fois dans le même arrangement.

Soient a, b, c, d, etc., les lettres proposées. Je détermine d'abord le nombre des arrangements de deux lettres. Pour les former, il faut, à la suite de chaque lettre, mettre successivement chacune des lettres proposées, y compris cette lettre elle-même. Ainsi, nous mettrons à la suite de a, successivement chacune des lettres a, b, c, d, etc. Tous ces arrangements différeront entre eux par la seconde lettre, et il y en aura évidemment m. Il y en aura autant commençant par b, différant entre eux par la seconde lettre, et des précédents par la première ; ainsi de suite En commençant successivement par chacune des m lettres. on aura en tout $m\times m$ ou m^2 arrangements de 2 lettres.

Pour former les arrangements de 3 lettres, il suffira évidemment de placer à la suite de chaque lettre chacun des arrangements de 2 lettres. Pour la lettre a il y aura m^2 arrangements de trois lettres commençant par cette lettre et différant par l'arrangement des deux lettres qui la suivent ; autant pour la lettre b, etc. Ce qui fait en tout $m^2\times m$, ou m^3 arrangements.

Il y a là une loi évidente, et l'induction suffit pour conclure que le nombre des arrangements que l'on peut faire avec m

lettres prises n à n est m^n. On peut, au reste, démontrer la généralité de cette formule, en faisant voir que si elle est vraie pour le nombre des arrangements de m lettres prises $(n-1)$ à $(n-1)$, elle l'est aussi pour le nombre des arrangements de m lettres prises n à n.

Supposons-la donc démontrée pour les arrangements $(n-1)$ à $(n-1)$. On obtiendra évidemment les arrangements de n lettres, en écrivant à la suite de chacune des lettres a, b, c, d, etc., chacun des arrangements de $n-1$ lettres. Ainsi, en mettant à la suite de a chacun des arrangements de $(n-1)$ lettres, tous les arrangements de n lettres que l'on obtiendra et qui seront au nombre de m^{n-1} différeront par la disposition des $n-1$ dernières lettres. Il y aura de même m^{n-1} arrangements commençant par b, différant entre eux par la disposition des $n-1$ lettres qui terminent chacun, et des précédents par la première lettre, et ainsi de suite, en commençant par chacune des autres lettres. Le nombre total des arrangements avec répétition, est évidemment $m^{n-1}\times m$ ou m^n; ce qu'il fallait démontrer.

2. *Déterminer le nombre de mots que l'on peut former avec* 19 *consonnes et* 5 *voyelles, chaque mot étant composé de* 3 *consonnes et de* 2 *voyelles; en excluant tous les mots renfermant* 3 *consonnes de suite.*

Je vais d'abord calculer le nombre des mots formés avec 3 consonnes et 2 voyelles sans exclusion.

Pour cela faire je forme tous les arrangements des 19 consonnes avec répétition 3 à 3, il y en aura $(19)^3$. J'en prends 1, *bcd*, j'y mets la voyelle a à toutes les places possibles; j'ai 4 mots, *abcd*, *bacd*, *bcad*, *bcda*, de 4 lettres correspondant à cet arrangement de 3 consonnes et comprenant la lettre a. Faisant de même pour chaque arrangement de 3 consonnes, j'aurai 4 mots pour chacun; en tout $(19)^3\times 4$. Tous ces mots différeront entre eux, soit par la position de la lettre a

lorsqu'ils correspondront au même arrangement de 3 consonnes, soit par la disposition relative des 3 consonnes lorsqu'ils correspondront à 2 arrangements différents de ces consonnes.

Faisant pour la voyelle *e*, ce que j'ai fait pour *a*, j'aurai $(19)^3 \times 4$ mots de 4 lettres comprenant cette voyelle avec 3 consonnes; autant pour chaque voyelle; en tout, $(19)^3 \times 4 \times 5$ mots de 4 lettres comprenant 3 consonnes et 1 voyelle.

J'introduis maintenant une autre voyelle dans ces mots de 4 lettres, par exemple dans *abcd*. D'abord j'y mets une des 4 voyelles qui n'y entrent pas, *e* par exemple, et je la mets à toutes les places possibles qui sont au nombre de 5; cela fait 5 mots de 5 lettres *eabcd*, *aebcd*, *abecd*, *abced*, *abcde*, correspondant à 1 seul mot *abcd* de 4 lettres, et comprenant 3 consonnes et 2 voyelles différentes; en mettant dans *abcd* chacune des 3 autres voyelles *i*, *o*, *u*, comme j'ai mis *e*, j'aurai pour chacune 5 mots de 5 lettres remplissant exactement les mêmes conditions; en tout, 5×4. Comme j'en aurai autant pour chacun des mots de 4 lettres que j'ai formés, j'aurai en tout $(19)^3 4 \times 5 . 5 \times 4$ mots de 5 lettres composés de 3 consonnes, et de 2 voyelles différentes.

Il faut former maintenant les mots qui comprennent 2 fois la même voyelle. Pour cela, évidemment, il suffit de prendre chacun des mots de 4 lettres, et d'y introduire une seconde fois la voyelle qui y est déjà, en prenant garde de compter deux fois le même mot.

Afin de ne pas commettre cette faute, je commence par introduire dans chacun de ces mots la lettre *a* accentuée *a'*; et je la mets dans chacun à toutes les places possibles. Ainsi, je prends un mot de 4 lettres *abcd*, contenant la lettre *a* et un arrangement *bcd* de 3 consonnes; j'ai ainsi 5 mots *a'abcd*, *aa'bcd*, *aba'cd*, *abca'd*, *abcda'*. Comme il y a 4 mots de 4 lettres, *abcd*, *bacd*. *bcad*, *bcda*, correspondant à *bcd* et contenant a; il y aura en tout $5 \times 4 = 20$ mots de 5 lettres correspondant à cet arrangement de 3 consonnes bcd, et contenant a et a'. Si des mots de cette série peuvent devenir identiques entre eux lorsqu'on supprimera l'accent, ils ne pourront devenir identiques avec d'autres qui ne correspondront pas à l'arrangement bcd; car si ceux-ci renferment la lettre a 2 fois, leurs consonnes ne seront pas exactement disposées de la même manière.

Pour distinguer dans la série de vingt mots dont nous nous occupons ceux qui peuvent devenir identiques lorsqu'on supprimera l'accent de a', j'observe qu'en comparant les places occupées respectivement par a et a' dans le même mot, on peut former le tableau suivant :

a occupant une des places.	a' occupera l'une des places.
—	—
1.	2, 3, 4, 5.
2.	1, 3, 4, 5.
3.	1, 2, 4, 5.
4.	1, 2, 3, 5.
5.	1, 2, 3, 4.

Si je considère le mot où les places de a, a' sont respectivement 1, 3, et celui où ces lettres ont les places 3, 1 ; après la suppression de l'accent ces deux mots deviendront identiques, et il n'y en aura pas d'autres qui deviendront identiques à ceux-là, puisqu'ils en différeront par la place de l'une des lettres a au moins. L'accent étant effacé, chaque mot se trouvera donc deux fois, et deux fois seulement ; il faudra donc diviser par 2 le nombre des mots obtenus contenant a et a' et correspondant à l'arrangement considéré de 3 consonnes bcd; ce qui en donnera $\frac{5 \times 4}{2}$. Comme il y en a autant pour chaque arrangement de 3 consonnes, il y aura en tout, $\frac{5 \times 4}{2} \times (19)^3$, mots de 3 consonnes et de 2 voyelles a. Autant pour chaque voyelle ; en tout, $(19)^3 \times \frac{5 \times 4}{2} \times 5$ mots de 5 lettres avec répétition de la seule voyelle qui s'y trouve.

En ajoutant à ce nombre celui des mots qui comprennent 3 consonnes et 2 voyelles, celles-ci étant différentes, le nombre total des mots que l'on peut faire avec 19 consonnes et 5 voyelles en composant chacun de 3 consonnes et 2 voyelles d'une manière quelconque est

$$(19)^3 \times 4 \times 5 \times 5 \times 4 + (19)^3 \times \frac{5 \times 4}{2} \times 5.$$

Il faut maintenant en déduire le nombre des mots qui renferment 3 consonnes de suite. Pour former ces mots, je prends un des arrangements de 2 voyelles *ae*, par exemple, et j'y mets les 3 lettres *bcd* d'un même arrangement de consonnes avec ou sans répétition, en les écrivant sans les séparer à toutes les places possibles, comme si l'on introduisait une seule lettre dans cet arrangement de 2 voyelles Cet assemblage *bcd* pourra être mis à trois places, et il en résultera 3 mots, *bcdae*, *abcde*, *aebcd* à supprimer. Le même assemblage *bcd* peut être ainsi transporté dans chacun des arrangements de 2 voyelles qui sont au nombre (5×5) ; on devra donc déduire $3 \times (5 \times 5)$ mots correspondant à ce seul arrangement de 3 consonnes ; et puisque il y a $(19)^3$ arrangements comme celui-là pour les 19 consonnes, il y aura en tout à déduire un nombre de mots égal à

$$3 \times (5 \times 5) \times (19)^3.$$

Le nombre cherché est donc

$$(19)^3 \times 4 \times 5 \times 5 \times 4 + (19)^3 \times \frac{5 \times 4}{2} \times 5 - (19)^3 \times (5 \times 5) \times 3 = 2572125$$