NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

VIDAL

Démonstration du théorème III, indépendante de la théorie des polaires

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 429-431

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__429_2>

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME III (p. 57 et 142),

INDÉPENDANTE DE LA THEORIE DES POLAIRES.

PAR M. VIDAL,
Elève de mathematiques speciales, à Montpellier

Soit A (*fig.* 95) le point par lequel on mène les perpendiculaires ; je désigne les coordonnées de ce point par x', y', l'équation de la tangente en ce point sera $a^2y'y + b^2x'x = a^2b^2$. Il faut prouver que la diagonale AB est normale, cela sera prouvé, si je fais voir que le coefficient de x dans l'équation de cette droite est

$$\frac{a^2y'}{b^2x}$$

Je prolonge la perpendiculaire AP d'une longueur égale, je joins P'Q. Cette ligne sera parallèle à AB, si celle-là est perpendiculaire à la tangente; il s'ensuit que AB le sera à la normale. Nous savons que les équations des deux diamètres conjugues égaux sont

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Par conséquent celles des deux perpendiculaires AP et AQ, seront

$$y - y' = -\frac{a}{b}(x - x'), \quad y - y' = \frac{a}{b}(x - x').$$

Cherchons les coordonnées des points d'intersection de ces deux droites avec les diamètres égaux, on trouvera facilement les résultats suivants.

$$\text{Pour le point P} \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{a(by' + ax')}{a^2 + b^2}, \\ y &= \frac{b(by' + ax')}{a^2 + b^2}, \end{aligned} \right.$$

$$\text{Pour le point Q} \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{a(ax' - by')}{a^2 + b^2}, \\ y &= \frac{b(by' - ax')}{a^2 + b^2}. \end{aligned} \right.$$

Désignons par (α, β) les coordonnées du point P', en s'appuyant sur ce que le point A est le milieu de PP', on trouve

$$\text{Pour le point P'} \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{a^2x' + 2b^2x' - aby'}{a^2 + b^2}, \\ \beta &= \frac{2a^2y' + b^2y' - abx'}{a^2 + b^2}. \end{aligned} \right.$$

Le coefficient de x dans l'équation de la droite P'Q étant égal à la différence des ordonnées de ces deux points divisés par la différence de leurs abscisses, sera

$$\frac{2a^2y'}{2b^2x'} = \frac{a^2y'}{b^2x'}.$$

Nous voyons donc d'après cela que la droite P'Q est perpendiculaire à la tangente, et par suite AB est normale.

C.Q.F.D.

Le raisonnement que nous venons de faire, étant totalement indépendant de ce que le point A est sur l'ellipse, il s'ensuit que la proposition a encore lieu, pourvu que ce point se trouve sur le plan de la courbe.

Observation. Nous recevons d'un élève du même collége, une solution du problème 3 (p. 122), elle est bien raisonnée; mais répond à une question qui n'est pas celle qu'on a proposée.