

VIDAL

**Démonstration du théorème III,
indépendante de la théorie des polaires**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 1
(1842), p. 429-431

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__429_2

© Nouvelles annales de mathématiques, 1842, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATION DU THÉOREME III (p. 57 et 142),

INDÉPENDANTE DE LA THEORIE DES POLAIRES.

PAR M. VIDAL,

Elève de mathématiques spéciales, à Montpellier

Soit A (*fig. 95*) le point par lequel on mène les perpendiculaires ; je désigne les coordonnées de ce point par x', y' , l'équation de la tangente en ce point sera $a^2 y' y + b^2 x' x = a' b'$. Il faut prouver que la diagonale AB est normale, cela sera

prouvé, si je fais voir que le coefficient de x dans l'équation de cette droite est

$$\frac{a^2 y'}{b^2 x}$$

Je prolonge la perpendiculaire AP d'une longueur égale, je joins P'Q. Cette ligne sera parallèle à AB, si celle-là est perpendiculaire à la tangente; il s'ensuit que AB le sera à la normale. Nous savons que les équations des deux diamètres conjugués égaux sont

$$y = \frac{b}{a} x, \quad y = -\frac{b}{a} x.$$

Par conséquent celles des deux perpendiculaires AP et AQ, seront

$$y - y' = -\frac{a}{b}(x - x'), \quad y - y' = \frac{a}{b}(x - x').$$

Cherchons les coordonnées des points d'intersection de ces deux droites avec les diamètres égaux, on trouvera facilement les résultats suivants.

$$\begin{array}{l} \text{Pour le point P} \\ \text{Pour le point Q} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{a(by' + ax')}{a^2 + b^2}, \\ y = \frac{b(by' + ax')}{a^2 + b^2}, \\ x = \frac{a(ax' - by')}{a^2 + b^2}, \\ y = \frac{b(by' - ax')}{a^2 + b^2}. \end{array} \right.$$

Designons par (α, β) les coordonnées du point P', en s'appuyant sur ce que le point A est le milieu de PP', on trouve

$$\text{Pour le point P'} \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{a^2 x' + 2b^2 x' - aby'}{a^2 + b^2}, \\ \beta = \frac{2a^2 y' + b^2 y' - abx'}{a^2 + b^2}. \end{array} \right.$$

Le coefficient de x dans l'équation de la droite P'Q étant égal à la différence des ordonnées de ces deux points divisés par la différence de leurs abscisses, sera

$$\frac{2a^2 y' + b^2 y' - abx'}{2b^2 x' - aby'} = \frac{a y'}{b x'}.$$

Nous voyons donc d'après cela que la droite $P'Q$ est perpendiculaire à la tangente, et par suite AB est normale.

C.Q.F.D.

Le raisonnement que nous venons de faire, étant totalement indépendant de ce que le point A est sur l'ellipse, il s'ensuit que la proposition a encore lieu, pourvu que ce point se trouve sur le plan de la courbe.

Observation. Nous recevons d'un élève du même collège, une solution du problème 3 (p. 122), elle est bien raisonnée; mais répond à une question qui n'est pas celle qu'on a proposée.