

LOUIS ROUX

Démonstration du théorème I

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 1
(1842), p. 428-429

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__428_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1842, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATION DU THÉOREME I (p. 122).

PAR M. LOUIS ROUX,

Elève du Collège de Marseille.

Si deux triangles sont tels que les distances du centre du cercle inscrit aux sommets homologues sont proportionnelles, ces deux triangles sont semblables.

A, B, C étant les trois angles d'un triangle, on obtient, entre les sinus de ces trois angles, la formule

$$2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C - \sin^2\frac{1}{2}A - \sin^2\frac{1}{2}B - \sin^2\frac{1}{2}C - 1 = 0.$$

Soient a, b, c , les distances respectives du centre du cercle inscrit dans ce triangle, aux sommets A, B, C. r étant le rayon de ce cercle, on a :

$$r = a\sin\frac{1}{2}A, \quad r = b\sin\frac{1}{2}B, \quad r = c\sin\frac{1}{2}C.$$

Substituant dans la formule, les valeurs de ces sinus, on a pour déterminer le rayon en fonction des distances données :

$$(1) \quad 2abc r^3 - (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)r^2 - a^2b^2c^2 = 0$$

a', b', c' étant les trois distances homologues d'un autre triangle dont r' est le rayon du cercle inscrit, on aura pareillement.

$$(2) \quad 2a'b'c' r'^3 - (a'^2b'^2 + a'^2c'^2 + b'^2c'^2)r'^2 - a'^2b'^2c'^2 = 0.$$

Si ces distances sont proportionnelles, on aura par exemple : $a' = am, b' = bm, c' = cm$. Substituant, l'équation (2) devient $2abc m^3 r'^3 - (a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)m^4 r'^2 - a^2b^2c^2 m^6 = 0$, ou

$$(3) \quad 2abc \frac{r'^3}{m^3} - (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) \frac{r'^2}{m^2} - a^2b^2c^2 = 0.$$

Comparant (1) et (3), évidemment $r' = mr$. On décomposera

donc les deux triangles en triangles rectangles, semblables deux à deux, et l'on en conclura la similitude de ces triangles.
