NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. A. LE COINTE

Note sur la division algébrique, et nouveau théorème d'analyse

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 409-417

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__409_0>

NOTE

SUR LA DIVISION ALGÉBRIQUE,

ET

NOUVEAU THÉORÈME D'ANALYSE,

PAR M. L. A. LE COINTE,
Professeur à Orleans.

—

I.

Cette note n'est pas autre chose que ce que l'on voit dans la division algébrique, excepté que j'y apporte plus de développement. J'ai cru devoir la mettre ici, parce qu'elle est utile pour le théorème d'analyse dont je m'occuperai tout à l'heure.

Soit un polynôme X de la forme

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} + \ldots\ldots + Sx^2 + Tx + V:$$

Convenons de représenter toujours par X_n la partie entière du quotient de la division de X par $(x-a)^n$; alors si on divise X par $x-a$, on aura

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l} x^{m-1}+a & x^{m-2}+a^2 & x^{m-3}+a^3 & x^{m-4}+\ldots+a^{m-1} \\ \quad\;\; +P & \quad\;\; +Pa & \quad\;\; +Pa^2 & \quad\quad\quad\;\; +Pa^{m-2} \\ & \quad\;\; +Q & \quad\;\; +Qa & \quad\quad\quad\;\; +Qa^{m-3} \\ & & \quad\;\; +R & \quad\quad\quad\;\; \ldots\ldots\ldots \\ & & & \quad\quad\quad\;\; +T \end{array}\right\} = X_1.$$

Si on divise X par $(x-a)^2$, ou X_1 par $x-a$, on aura

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l} x^{m-2}+2a & x^{m-3}+3a^2 & x^{m-4}+4a^3 & x^{m-5}+\ldots+(m-1)a^{m-2} \\ \quad\;\; +P & \quad\;\; +2Pa & \quad\;\; +3Pa^2 & \quad\quad\quad\;\; +(m-2)Pa^{m-3} \\ & \quad\;\; +Q & \quad\;\; +2Qa & \quad\quad\quad\;\; +(m-3)Qa^{m-4} \\ & & \quad\;\; +R & \quad\quad\quad\;\; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & & & \quad\quad\quad\;\; +S \end{array}\right\} = X_2,$$

Or, d'après l'inspection des deux polynômes X_1, X_2, on voit immédiatement comment on pourra former les polynômes X_3, X_4,..... X_n, chacun de celui qui le précède et même indépendamment de celui-ci.

Car, par exemple, si on cherche le développement de X_4, qui est la partie entière du quotient de la division de X par $(x-a)^4$, on trouve que

$$X_4 = x^{m-4} \begin{array}{l|l|l|l} +4a & x^{m-5}+10a^2 & x^{m-6}+20a^3 & x^{m-7}+\ldots\ldots, \\ +P & \quad +4Pa & \quad +10Pa^2 & \\ & \quad +Q & \quad +4Qa & \\ & & \quad +R & \end{array}$$

et on voit que le coefficient de a^3 dans le quatrième terme de ce polynôme est égal à 20, c'est-à-dire le produit du coefficient 10 de a^2 dans le troisième terme, multiplié par 6 (6 étant la quantité que l'on retranche de m pour avoir l'exposant de x dans ce troisième terme), et divisé par le nombre des termes qui précèdent le quatrième, c'est-à-dire par 3.

D'après toutes les remarques que l'on peut faire sur la formation des polynômes X_1, X_2, X_3,. .. en considérant seulement les polynômes X_1, X_2, on conclut qu'on a

$$X_n = x^{m-n} \begin{array}{l|l|l|} +na & x^{m-n-1}+\frac{n(n+1)}{2}a^2 & x^{m-n-2}+\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}a^3 \\ +P & \quad +nPa & \quad +\frac{n(n+1)}{2}Pa^2 \\ & \quad +Q & \quad +nQa \\ & & \quad +R \end{array}$$

$$x^{m-n-3}+\ldots\ldots+\left.\begin{array}{l} \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ldots(m-1)}{2.3.4\ldots\ldots\ldots(m-n)}a^{m-n} \\ +\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ldots(m-2)}{2.3.4\ldots\ldots\ldots(m-n-1)}Pa^{m-n-1} \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right|$$

puis

$$X_{n+1} = x^{m-n-1} + \left.\begin{array}{l}(n+1)a \\ +P\end{array}\right| x^{m-n-2} + \left.\begin{array}{l}\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}a^2 \\ +(n+1)Pa \\ +Q\end{array}\right| x^{m-n-3}$$

$$\left.\begin{array}{l}+\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3}a^3 \\ +\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}Pa^2 \\ +(n+1)Qa \\ +R\end{array}\right| x^{m-n-4} + \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l}+\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ldots(m-1)}{2.3.4\ldots\ldots(m-n-1)}a^{m-n-1} \\ +\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3).\ \ldots(m-2)}{2.3.4\ldots\ldots(m-n-2)}Pa^{m-n-2} \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}.$$

II.

Nouveau théorème d'analyse.

Soient, un polynôme X de la forme

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} + \ldots\ldots + Sx^2 + Tx + V,$$

un binôme quelconque du premier degré de la forme $x-a$, X_n la partie entière du quotient de la division de X par $(x-a)^n$, (n étant un nombre entier quelconque), X_{n+1} celle du quotient de la division de X par $(x-a)^{n+1}$, et X'_n celle du quotient de la division de X' (X' étant le polynôme dérivé de X) par $(x-a)^n$; supposons que dans X_n, X_{n+1}, X'_n, on change a en x, puis qu'on ordonne les nouveaux polynômes qu'on obtient ainsi, par rapport aux puissances décroissantes de x, et soient x_n, x_{n+1}, x'_n, ces polynômes, x_n étant celui qui correspond à X_n, x_{n+1} celui qui correspond à X_{n+1}, et x'_n celui correspond à X'_n;

Je dis qu'on aura

$$1^\circ \qquad (n+1)x_{n+1} = \text{le dérivé de } x_n,$$

et

$$2^\circ \qquad (n+1)x_{n+1} = x'_n.$$

1° Nous avons obtenu le développement de X_n et de X_{n+1}, et par conséquent on en pourra déduire x_n et x_{n+1}.

Si l'on forme le dérivé de x_n qui est de la forme

$$(m-n)\,Ax^{m-n-1}+(m-n-1)\,Bx^{m-n-2}+\ldots\ldots$$

et x_{n+1} étant de la forme

$$A'x^{m-n-1}+B'x^{m-n-2}+\ldots\ldots$$

comme il s'agit de démontrer que $(n+1)\,x_{n+1}=$ dérivé de x_n, si l'on parvient à démontrer que $(n+1)A'=(m-n)A$, on aura aussi démontré, par cela même, que $(n+1)\,B'=(m-n-1)\,B$, ... ce qui est facile à voir à la simple inspection des polynômes X_n et X_{n+1}, et que, par conséquent, on a

$$(n+1)\,x_{n+1} = \text{dérivé de } x_n.$$

Il ne s'agit donc que de démontrer qu'on a la relation suivante :

$$(n+1)\,A' = (m-n)\,A,$$

ou bien

$$(n+1)\left\{1+(n+1)+\frac{(n+1)(n+2)}{2}+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\ldots+\frac{(n+1)(n+2)(n+3\ldots\ldots(m-1)}{2.3.4\ldots\ldots(m-n-1)}\right\}=$$
$$=(m-n)\left\{(1+n)+\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}+\right.$$
$$\left.+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3.4}+\ldots+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(m-1)}{2.3.4\ldots(m-n-1)(m-n)}\right\}$$

car

$$A' = 1 + (n+1) + \frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3} + \ldots\ldots$$
$$\ldots + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ldots(m-1)}{2.3.4\ldots\ldots(m-n-1)},$$

$$A = (1+n) + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{2.3} +$$
$$+ \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3\,4} + \ldots + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(m-1)}{2.3.4\ldots(m-n)}.$$

Or, on a

$$1+(n+1)+\frac{(n+1)(n+2)}{2} = (n+2) + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+2)(n+3)}{2},$$

$$1+(n+1)+\frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3} =$$
$$= \frac{(n+2)(n+3)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3} = \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{2.3},$$

et ainsi de suite.

D'où, par analogie, et en posant $m-1 = n+\omega$,

$$A' = \frac{(n+2)(n+3)(n+4)\ldots(n+\omega+1)}{2.3.4\ldots\ldots(m-n-1)} = \frac{(n+2)(n+3)(n+4)\ldots m}{2.3.4\ldots\ldots(m-n-1)}.$$

De même, on a

$$(1+n)+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

$$(1+n)+\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{2.3} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} +$$
$$+ \frac{n(n+1)(n+2)}{2.3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3},$$

et ainsi de suite.

D'où, par analogie,

$$A = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+\omega+1)}{2.3.4\ldots\ldots(m-n)} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots m}{2.3.4\ldots\ldots(m-n)} \;(*).$$

D'où

$$(n+1)A' = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\ldots\ldots m}{2.3.4\ldots\ldots(m-n-1)},$$

$$(m-n)A = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\ldots\ldots m}{2.3.4\ldots\ldots(m-n-1)}.$$

(*) Ces sommations sont connues, on tire celle de A, de A′ en remplaçant n par $n-1$. Tm.

Donc

$$(n+1)A' = (m-n)A,$$

donc, enfin,

$$(n+1)x_{n+1} = \text{dérivé de } x_n. \qquad \text{(C.Q.F.D.)}$$

2° Il s'agit maintenant de démontrer qu'on a

$$(n+1)x_{n+1} = x'_n.$$

Or, d'après ce que l'on vient de démontrer, on a, en remarquant que x'_1 est le dérivé de X' ou de x_1,

$$x'_1 = 2x_2, \quad \text{car} \quad 2x_2 = \text{dérivé de } x_1,$$

$2x'_2 =$ dérivé de $x'_1 =$ dérivé de $2x_2 = 6x_3$, car $3x_3$ est le dérivé de x_2, ou

$$x'_2 = 3x_3,$$

de même

$$x'_3 = 4x_4$$
$$x'_4 = 5x_5,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

et, en général,

$$x'_n = (n+1)x_{n+1}. \qquad \text{(C.Q.F.D.)}$$

Remarque. De ce théorème, il résulte que les dérivés successifs du polynôme X sont

$$x'_1, \quad 2x_2, \quad 2.3.x_3, \quad 2.3.4.x_4, \quad 2.3.4.5.x_5, \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots 2.3\ldots(m-1).x_{m-1}, \quad 2.3\ldots m.x_m.$$

Ils sont ordinairement désignés par

$$(1) \quad X', \quad X'', \quad X''', \quad X^{\text{IV}}, \quad X^{\text{V}}, \ldots\ldots \quad X^{(m-1)}, \quad X^{(m)}$$

Je propose d'appeler les polynômes de la suite (1), les *dérivés multiples* du polynôme X, et les polynômes

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5 \ldots\ldots x_{m-1}, \quad x_m,$$

les *dérivés simples* (*).

(*) Ce sont les D d'Arbogast Calcul des dérivations p. 33). Tm.

Or, on sait que si dans un polynôme X, on change x en $x+y$, si Y est le résultat de la substitution, on a

$$Y=X+\frac{X'}{1}y+\frac{X''}{1.2}y^2+\frac{X'''}{1.2.3}y^3+\dots\dots+y^m,$$

ou bien, d'après ce que nous savons,

$$Y=X+x_1y+x_2y^2+x_3y^3+\dots\dots+y^m,$$

c'est-à-dire, d'après les dénominations que je propose, que le resultat Y de la substitution de $x+y$ à la place de x dans le polynôme X est égal au polynôme X, plus au premier dérivé simple multiplié par y, plus au deuxième dérivé simple multiplié par y^2, plus.... etc......, plus enfin y^m.

Nota. On pourrait baser le théorème de M. Budan sur la suite des polynômes *dérivés simples*, au lieu de le baser sur la suite des polynômes *dérivés multiples*.

III.

Nouvelle théorie des racines égales.

Supposons qu'on ait l'équation $X=0$, et qu'elle ait n racines égales à a, ou que le polynôme X soit divisible par $(x-a)^n$.

Soient

$$\left\{\begin{array}{lll} X & \text{la partie entière du quotient de} & \dfrac{X}{x-a}, \\ X_2 & \dots\dots\dots\dots\dots & \dfrac{X}{(x-a)^2}, \\ \vdots & & \vdots \\ X_n & \dots\dots\dots\dots\dots & \dfrac{X}{(x-a)^n}, \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{lll} x_1 & \text{le résultat de la substitution de } x \text{ au lieu de } a \text{ dans} & X_1, \\ x_2 & \dots\dots\dots\dots\dots & X_2, \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & \dots\dots\dots\dots\dots & X_n, \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{lcr} X'_1 & \text{la partie entière du quotient de} & \dfrac{X'}{x-a}, \\ X'_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \dfrac{X'}{(x-a)^2}, \\ \vdots & & \vdots \\ X'_{n-1} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \dfrac{X'}{(x-a)^{n-1}}, \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{lcr} x'_1 & \text{le résultat de la substitution de } x \text{ au lieu de } a \text{ dans} & X'_1, \\ x'_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & X'_2, \\ \vdots & & \vdots \\ x'_{n-1} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & X'_{n-1}. \end{array}\right\}$$

Alors X_1, X_2......X_n, seront des quotients complets. Si dans X_1 on fait $x=a$, on a un résultat $=$ à zéro ; donc si dans X' on fait $x=a$, on a aussi un résultat nul (puisque la substitution de a à la place de x dans X_1 et X' donne deux résultats identiques), par conséquent X' est divisible par $x-a$, ou bien a est racine de $X'=0$.

Comme

$$\begin{aligned} 2x_2 &= x'_1, \\ 3x_3 &= x'_2, \\ 4x_4 &= x'_3, \\ &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots \\ (n-1)x_{n-1} &= x'_{n-2}; \end{aligned}$$

il résulte que si on substitue a au lieu de x dans

$$2X_2, \quad 3X_3, \quad 4X_4, \ \ldots\ldots\ldots\ldots, \ (n-1)X_{n-1},$$

on aura des résultats identiques à ceux qu'on obtiendrait si on faisait la même substitution dans X'_1, X'_2, X'_3........X'_{n-2}; donc les polynômes X'_1, X'_2, ...,X'_{n-2}, sont divisibles par $x-a$, donc ils sont aussi des quotients complets.

Ainsi X'_{n-2} est divisible par $x-a$, ou, ce qui revient au même, X' est divisible par $(x-a)^{n-1}$.

Nous voyons donc, d'après cela, que quand X est divisible par $(x-a)^n$, X' est divisible par $(x-a)^{n-1}$; et, pour terminer, je vais faire voir que X' ne peut, dans ce cas, être divisible par une puissance plus grande de $x-a$.

En effet, si X' était divisible par $(x-a)^{n+n'}$ (n' étant un nombre entier positif), alors X' serait divisible par $(x-a)^n$, la substitution de a au lieu de x dans le quotient complet X'_{n-1}, donnerait un résultat nul. De sorte que a substitué au lieu de x dans nX_n ou dans X_n donnerait un polynôme nul, car on sait que si on substitue a au lieu de x dans X'_{n-1} et nX_n, on a deux résultats identiques $(nx_n = x'_{n-1})$. Donc X_n serait divisible par $x-a$, ou bien comme $X_n = \frac{X}{(x-a)^n}$, X serait divisible par $(x-a)^{n+1}$, ce qui est contre l'hypothèse. Donc, etc.... Ainsi, si $X=0$ a n racines égales à a, $X'=0$ aura $n-1$ racines égales à a. La réciproque se démontrerait absolument de la même manière.

De là résulte, que pour qu'une équation $X=0$ ait n racines égales, il faut et il suffit que le premier membre et son polynôme dérivé aient un diviseur commun ; et si l'on cherche leur plus grand commun diviseur, on aura le produit des facteurs égaux de X, élevés chacun à une puissance moindre d'une unité.