TERQUEM

Relations entre les coordonnées de trois points dans l'espace. D'après Lagrange

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 387-392

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__387_1>

RELATIONS

Entre les coordonnées de trois points dans l'espace.

D'après Lagrange

—

1. La géométrie analytique à trois dimensions fait désormais partie des connaissances exigées pour entrer à l'Ecole polytechnique. Les formules compliquées qu'entraîne cette géométrie, sont très-souvent singulièrement abrégées, à l'aide de certaines relations analytiques existant entre les coordonnées; relations dont Euler s'est occupé en 1770, comme une question de la théorie des nombres (Mémoires de S. P., t. XV, p. 75), et que Lagrange a admirablement développées dans son célèbre mémoire sur la pyramide (Mém. de Berlin, 1773, p. 149-176). Nous extrayons ici ces relations avec les moyens de les trouver; c'est un répertoire à consulter au besoin. Nous en donnons une application à la recherche des propriétés des diamètres conjugués dans les surfaces du second degré d'après M. Gergonne (*V.* p. 245).

2. *Notations.* x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z'''; coordonnées rectilignes de trois points M', M'', M'''.

I.

$$\begin{aligned} &x'^2 + y'^2 + z'^2 = \alpha', && x''x''' + y''y''' + z''z''' = \beta', \\ &x''^2 + y''^2 + z''^2 = \alpha'', && x'x''' + y'y''' + z'z''' = \beta'', \\ &x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 = \alpha''', && x'x'' + y'y'' + z'z'' = \beta'''. \end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned} &y''z''' - z''y''' = \xi', && z''x''' - x''z''' = \eta', && x''y''' - y''x''' = \zeta', \\ &z'y''' - y'z''' = \xi'', && x'z''' - z'x''' = \eta'', && y'x''' - x'y''' = \zeta'', \\ &y'z'' - z'y'' = \xi''', && z'x'' - x'z'' = \eta''', && x'y'' - y'x'' = \zeta'''. \end{aligned}$$

III.

$$x'y''z''' + y'z''x''' + z'x''y''' - x'z''y''' - y'x''z''' - z'y''x''' = \lambda.$$

IV.

$$\begin{aligned} &\alpha''\alpha''' - \beta'^2 = a', && \beta''\beta''' - \alpha'\beta' = b', \\ &\alpha'\alpha''' - \beta''^2 = a'', && \beta'\beta''' - \alpha''\beta'' = b'', \\ &\alpha'\alpha'' - \beta'''^2 = a'''; && \beta'\beta'' - \alpha'''\beta''' = b''', \end{aligned}$$

V.

$$\begin{aligned} &a''a''' - b'^2 = A', && b''b''' - a'b' = B', \\ &a'a''' - b''^2 = A'', && b'b''' - a''b'' = B'', \\ &a'a'' - b'''^2 = A''', && b'b'' - a'''b''' = B'''. \end{aligned}$$

VI.

$$\begin{aligned} &\eta''\zeta''' - \zeta''\eta''' = X', && \zeta''\xi''' - \xi''\zeta''' = Y', && \xi''\eta''' - \eta''\xi''' = Z', \\ &\zeta'\eta''' - \eta'\zeta''' = X'', && \xi'\zeta''' - \zeta'\xi''' = Y'', && \eta'\xi''' - \xi'\eta''' = Z'', \\ &\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'' = X''', && \zeta'\xi'' - \xi'\zeta'' = Y''', && \xi'\eta'' - \eta'\xi'' = Z''', \end{aligned}$$

3. Les notations I, IV, V, ne donnent lieu à aucune observation.

Pour former la notation II, on écrit *circulairement* les trois termes xy, yz, zx; 1° le premier xy fournit $x'y''$, $x''y'''$, $x'''y'$, ce sont les trois termes positifs dans les trois dernières équations, le deuxième terme yz fournit de même

$y'z''$, $y''z'''$, $y'''z'$, les trois termes positifs dans les trois premières équations; le troisième terme zx donne $z'x''$, $z''x'''$, $z'''x'$, les trois termes positifs dans les trois équations intermédiaires; les termes négatifs se déduisent des termes positifs. Les lettres ξ, ζ, η de la notation VI correspondent aux lettres x, y, z de II, et se combinent d'une manière analogue; pour avoir l'expression III, on écrit *circulairement* xyz, yzx, zxy, qui fournit les trois termes positifs.

B. *Relations d'identité.*

VII.

$$\begin{aligned}
&\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = a', \qquad && \xi''\xi''' + \eta''\eta''' + \zeta''\zeta''' = b', \\
&\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2 = a'', && \xi'\xi''' + \eta'\eta''' + \zeta'\zeta''' = b'', \\
&\xi'''^2 + \eta'''^2 + \zeta'''^2 = a''', && \xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = b''',
\end{aligned}$$

Mode de déduction. Il suffit de remplacer les lettres par leurs valeurs en fonction des coordonnées.

VIII.

$$\begin{aligned}
&X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = A', \qquad && X''X''' + Y''Y''' + Z''Z''' = B', \\
&X''^2 + Y''^2 + Z''^2 = A'', && X'X''' + Y'Y''' + Z'Z''' = B'', \\
&X'''^2 + Y'''^2 + Z'''^2 = A''', && X'X'' + Y'Y'' + Z'Z'' = B'''.
\end{aligned}$$

Mode de déduction. Les équations VII, VI, V, sont *similaires* respectivement aux équations I, II, IV; on conclut de là les équations VIII, par de simples changements de lettres.

IX.

$$\begin{aligned}
&X' = \lambda x', \qquad && X'' = \lambda x'', \qquad && X''' = \lambda x''', \\
&Y' = \lambda y', && Y'' = \lambda y'', && Y''' = \lambda y''', \\
&Z' = \lambda z', && Z'' = \lambda z'', && Z''' = \lambda' z'''.
\end{aligned}$$

Mode de déduction. Dans les équations VI, on remplace les lettres η, ζ, ξ en fonction de x, y, z.

X.

$$A' = \lambda^2\alpha', \qquad B' = \lambda^2\beta',$$
$$A'' = \lambda^2\alpha'', \qquad B'' = \lambda^2\beta'',$$
$$A''' = \lambda^2\alpha''', \qquad B''' = \lambda^2\beta'''.$$

Déduction des équations VIII, IX et I.

XI.

$$\lambda^2 = \alpha'\alpha''\alpha''' + 2\beta'\beta''\beta''' - \alpha'\beta'^2 - \alpha''\beta''^2 - \alpha'''\beta'''^2.$$

Déduction des équations X, V, IV.

XII.

$$3\lambda^2 = a'\alpha' + a''\alpha'' + a'''\alpha''' + 2(b'\beta' + b''\beta'' + b'''\beta''').$$

Déduction des équations IV et XI.

XIII.

$$3\lambda^4 = A'a' + A''a'' + A'''a''' + 2(B'b' + B''b'' + B'''b''').$$

Déduction des équations XII et X.

XIV.

$$\lambda^4 = a'a''a''' + 2b'b''b''' - a'b'^2 - a''b''^2 - a'''b'''^2.$$

Déduction XIII et V.

XV.

$$\lambda^2 = \xi'\eta''\zeta''' + \eta'\zeta''\xi''' + \zeta'\xi''\eta''' - \xi'\zeta''\eta''' - \eta'\xi''\zeta''' - \zeta'\eta''\xi''.$$

Déduction. Le premier membre de l'équation III, élevé au carré est égal au second membre de l'équation XI, or à raison de la similitude des équations I et VII, on peut remplacer les lettres x, y, z, α, β, par ξ, η, ζ, a, b; et l'on obtient l'équation XV.

XVI.

$$x'\xi' + x''\xi'' + x'''\xi''' = \lambda, \quad y'\xi' + y''\xi'' + y'''\xi''' = 0, \quad z'\xi' + z''\xi'' + z'''\xi''' = 0,$$
$$x'\eta' + x''\eta'' + x'''\eta''' = 0, \quad y'\eta' + y''\eta'' + y'''\eta''' = \lambda, \quad z'\eta' + z''\eta'' + z'''\eta''' = 0,$$
$$x'\zeta' + x''\zeta'' + x'''\zeta''' = 0, \quad y'\zeta' + y''\zeta'' + y'''\zeta''' = 0, \quad z'\zeta' + z''\zeta'' + z'''\zeta''' = \lambda.$$

Déduction des équations II.

XVII.

$$x'\xi' + y'\eta' + z'\eta' = \lambda, \quad x''\xi' + y''\eta' + z''\zeta' = 0, \quad x'''\xi' + y'''\eta' + z'''\zeta' = 0,$$
$$x'\xi'' + y'\eta'' + z'\zeta'' = 0, \quad x''\xi'' + y''\eta'' + z''\zeta'' = \lambda, \quad x'''\xi'' + y'''\eta'' + z'''\zeta'' = 0,$$
$$x'\xi''' + y'\eta''' + z'\zeta''' = 0, \quad x''\xi''' + y''\eta''' + z''\zeta''' = 0, \quad x'''\xi''' + y'''\eta''' + z'''\zeta''' = \lambda.$$

Déduction des équations II.

XVIII.

$$\lambda\xi' = a'x' + b'''x'' + b''x''', \quad \lambda\eta' = a'y' + b'''y'' + b''y''',$$
$$\lambda\zeta' = a'z' + b'''z'' + b''z''',$$
$$\lambda\xi'' = b'''x' + a''x'' + b'x''', \quad \lambda\eta'' = b'''y' + a''y'' + b'y''',$$
$$\lambda\zeta'' = b'''z' + a''z'' + b'z''',$$
$$\lambda\xi''' = b''x' + b'x'' + a'''x''', \quad \lambda\eta''' = b''y' + b'y'' + a'''y''',$$
$$\lambda\zeta''' = b''z' + b'z'' + a'''z'''.$$

Déduction des équations XVII et VII.

XIX.

$$\lambda x' = \alpha'\xi' + \beta'''\xi'' + \beta''\xi''', \quad \lambda y' = \alpha'\eta' + \beta'''\eta'' + \beta''\eta''',$$
$$\lambda z' = \alpha'\zeta' + \beta'''\zeta'' + \beta''\zeta''',$$
$$\lambda x'' = \beta'''\xi' + \alpha''\xi'' + \beta'\xi''', \quad \lambda y'' = \beta'''\eta' + \alpha''\eta'' + \beta'\eta''',$$
$$\lambda z'' = \beta'''\zeta' + \alpha''\zeta'' + \beta'\zeta''',$$
$$\lambda x''' = \beta''\xi' + \beta'\xi'' + \alpha'''\xi''', \quad \lambda y''' = \beta''\eta' + \beta'\eta'' + \alpha'''\eta''',$$
$$\lambda z''' = \beta''\zeta' + \beta'\zeta'' + \alpha'''\zeta'''.$$

Déduction des équations XVI et I.

C. *Interprétations géométriques.*

Soit O l'origine des coordonnées que nous supposons rectangulaires, et considérons la pyramide triangulaire OM'M''M''';

α' est le carré de l'arête OM',

β' est OM'.OM'' cos M'OM'', $M''M''' = \alpha'' + \alpha''' - 2\beta'$;

ξ' double de l'aire de la projection du triangle M''OM'' sur le plan des yz,

a' quatre fois le carré de l'aire du triangle M''OM''';

b' quatre fois le carré de l'aire du triangle

$$\mathrm{M'M''M} = a' + a'' + a''' + 2(b' + b'' + b''');$$

$\lambda =$ six fois le volume de la pyramide SM'M''M'

On arrive facilement à ce résultat remarquable : 1° par des considérations géométriques ; soient P', P'', P''', les projections de M', M'', M''' sur le plan des xy ; le volume de la pyramide est égal à la somme des trois pyramides quadrangulaires AP'P''M'M'', AP'P''M'M'' ; plus le prisme triangulaire M'M''M'''P'P'P''' moins la pyramide SP''P''M''M''', volumes qui s'expriment directement en fonction des coordonnées ; on suppose que P' tombe dans l'intérieur du triangle AP''P''' ; 2° par l'analyse ; soit $mx+ny+pz+q=0$, l'équation du plan M'M''M''' , on sait que l'on a

$$\frac{m}{q} = -\frac{\xi'+\xi''+\xi'''}{\lambda};\ \frac{n}{q} = -\frac{\eta'+\eta''+\eta'''}{\lambda},\ \frac{p}{q} = -\frac{\zeta'+\zeta''+\zeta'''}{\lambda};$$

soit l la perpendiculaire abaissée de l'origine A sur le plan M'M''M''', l'on a $l^2 = -\dfrac{q^2}{m^2+n^2+p^2}$; remplaçant m, n, p, par leurs valeurs, et ayant égard aux relations VII ; il vient

$$l^2 = \frac{\lambda^2}{a'+a''+a'''+2(b'+b''+b'')}$$ d'où $\lambda^2 = 4l^2 \times$ aire carrée du triangle M'M''M''' ; donc, etc.

De cette expression on déduit facilement le volume de la pyramide en fonction des côtés ; désignant ces arêtes par a, b, c, d, e, f, et le volume par v, on aura

$$\begin{aligned}144v^2 = {} & c^2d^2[a^2+b^2+e^2+f^2-c^2-d^2] \\ & + a^2e^2[b^2+e^2+d^2+f^2-a^2-e^2] \\ & + b^2f^2[a^2+c^2+d^2+e^2-b^2-f^2] \\ & - [a^2b^2d^2+a^2c^2f^2+b^2c^2e^2+d^2e^2f^2],\end{aligned}$$

a et e sont des arêtes opposées ; de même e et d, b et f ; chacun des quatre derniers termes comprend les arêtes d'une même face. (Legendre. *Note* V, prob. VII.)

(*La suite prochainement.*