NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CARVALLO

Quadrature des courbes planes et cubature des solides de révolution

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 370-379

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__370_1>

QUADRATURE DES COURBES PLANES

ET CUBATURE DES SOLIDES DE RÉVOLUTION,

PAR M. CARVALLO,

Elève du Collège royal de Saint-Louis (*).

Quadrature des courbes planes.

Observation. Cette méthode d'approximation, basée sur

(*) Maintenant élève à l'École polytechnique, il a le n° 3, et a été admis par le même principe, est moins exacte que celle qui est développée dans le tome II des Fonctions elliptiques de Legendre (p. 572). Nous avons admis ce travail parce que la marche est élémentaire, et que les résultats sont suffisants. On suppose, d'ailleurs, que la fonction y conserve toujours même signe et n'éprouve, non plus que les coefficients différentiels, des changements brusques pour de légers accroissements de la variable. Leibnitz est le premier qui ait essayé cette même méthode de quadrature (Act. erud. april., p. 178, ann. 1693). L'année suivante, Bernoulli (Jean), a donné sa célèbre série, qui est le point de départ ou d'arrivée de tout ce qu'on a fait depuis (Act., p. 438, ann. 1694). Tm.

1. Soit AM (fig. 85), une portion de courbe plane quelconque, qu'il s'agit de quarrer. Partageons $OP=x$ en m parties égales, élevons les ordonnées correspondant à chaque point de division, et formons les rectangles

$$MQP'P,\quad M'Q'P''P',\ldots\ldots \text{etc.}$$

Chacun d'eux deviendra un élément de la surface AMOP, si nous supposons $m=\infty$: leur somme devra donner cette surface.

Or, l'aire du premier rectangle est $\frac{x}{m}y$, celle du second $\frac{x}{m}y'$, celle de troisième $\frac{x}{m}y''$........, celle du $m^{\text{ième}}$ $\frac{x}{m}y_{m-1}$, leur somme sera, en la désignant par Σ,

$$\Sigma=\frac{x}{m}(y+y'+y''+\ldots+y_{m-2}+y_{m-1})\ (^*).$$

un des examinateurs, le 156e; cela semble dépasser les limites de la tolérance qu'il faut équitablement accorder aux erreurs dans les jugements.

(*) De là l'origine du mot *somme* pour exprimer une *intégration*. Cette dernière dénomination est due aux Bernoulli; car Leibnitz appelait l'intégrale *terminum differentiandum* et aussi *summatorium*. (J. Bernoulli, Op. omnia, t. I, p. 140.) Tm.

Soit $y=f(x)$ l'equation de la courbe, on aura évidemment :

$$y'=f\left(x-\frac{x}{m}\right),\ y''=f\left(x-\frac{2x}{m}\right)\ldots y_{m-1}=f\left(x-\frac{(m-1)x}{m}\right),$$

la somme des rectangles devient alors

$$\Sigma=\frac{x}{m}\left\{f(x)+f\left(x-\frac{x}{m}\right)+f\left(x-\frac{2x}{m}\right)+\ldots\ldots\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\ldots+f\left(x-\frac{(m-2)x}{m}\right)+f\left(x-\frac{(m-1)}{m}x\right)\right\}.$$

On a d'ailleurs les égalités suivantes

$$f(x)=f(x)$$

$$f\left(x-\frac{x}{m}\right)=f(x)-\frac{x}{m}\,\frac{f'(x)}{1}+\frac{x^2}{m^2}\,\frac{f''(x)}{1.2}-\frac{x^3}{m^3}\,\frac{f'''(x)}{1.2.3}+\ldots$$

$$\ldots\pm\frac{x^n}{m^n}\,\frac{f^n(x)}{1.2.3\ldots n},$$

$$f\left(x-\frac{2x}{m}\right)=f(x)-\frac{2x}{m}\,\frac{f'(x)}{1}+\frac{(2x)^2}{m^2}\,\frac{f''(x)}{1.2}-\frac{(2x)^3}{m^3}\,\frac{f'''(x)}{1.2.3}+\ldots$$

$$\ldots\pm\frac{(2x)^n}{m^n}\,\frac{f^n(x)}{1.2.3\ldots n},$$

$$f\left(x-\frac{3x}{m}\right)=f(x)-\frac{3x}{m}\,\frac{f'(x)}{1}+\frac{(3x)^2}{m^2}\,\frac{f''(x)}{1.2}-\frac{(3x)^3}{m^3}\,\frac{f'''(x)}{1.2.3}+\ldots$$

$$\ldots\ldots\pm\frac{(3x)^n}{m^2}\,\frac{f^n(x)}{1.2.3\ldots n},$$

. . . .

$$f\left(x-\frac{(m-2)x}{m}\right)=f(x)-\frac{(m-2)x}{m}\,\frac{f'(x)}{1}+\frac{[(m-2)x]^2}{m^2}\,\frac{f''(x)}{1.2}$$

$$-\frac{[(m-2)x]^3}{m^3}\,\frac{f'''(x)}{1.2.3}+\ldots\pm\frac{[(m-2)x]^n}{m^n}\,\frac{f^n(x)}{1.2.3\ldots n},$$

$$f\left(x-\frac{(m-1)x}{m}\right)=f(x)-\frac{(m-1)x}{m}\,\frac{f'(x)}{1}+\frac{[(m-1)x]^2}{m^2}\,\frac{f''(x)}{1.2}$$

$$-\frac{[(m-1)x]}{m^3}\,\frac{f'''(x)}{1.2.3}\ldots\pm\frac{[(m-1)x]^n}{m^n}\,\frac{f^n(x)}{1.2.3\ldots n}.$$

Appelons T la somme des m égalités précédentes ; désignons en outre

$(1+2+3+\ldots(m-1))$ par S_1 ; $(1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots(m-1)^2)$ par S_2,

et généralement

$$(1^n+2^n+3^n+\ldots(m-1)^n) \text{ par } S_n\,.$$

nous aurons

$$T=mf(x)-\frac{x}{m}f'(x)\frac{S_1}{m}+\frac{x^2}{1.2}f''(x)\frac{S_2}{m^2}+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(x)\frac{S_3}{m^3}+\ldots$$
$$\ldots\ldots\pm\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}f^n(x)\frac{S_n}{m^n};$$

d'où

$$\frac{T}{m}=f(x)-\frac{x}{1}f'(x)\frac{S_1}{m^2}+\frac{x^2}{1.2}f''(x)\frac{S_2}{m^3}+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(x)\frac{S_3}{m^4}+\ldots$$
$$\ldots\pm\frac{x^n}{1.2\ldots n}f^n(x)\frac{S_n}{m^{n+1}}.$$

Faisons maintenant $m=\infty$, nous obtiendrons

$$\frac{T}{\infty}=f(x)-\frac{x}{1.2}f'(x)+\frac{x^2}{1.2.3}f''(x)-\frac{x^3}{1.2.3.4}f'''(x)+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\pm\frac{x^n}{1.2\ldots\ldots n.(n+1)}f^n(x),$$

car on sait que

$$\lim.\frac{S_1}{m^2}=\frac{1}{2};\ \lim.\frac{S_2}{m^3}=\frac{1}{3}\ldots\ \ldots\lim.\frac{S_n}{m^{n+1}}=\frac{1}{n+1}.$$

Mais nous avons trouvé plus haut $\Sigma=\dfrac{xT}{m}$, nous aurons donc pour l'expression de la surface cherchée :

$$\Sigma=\frac{x}{1}f(x)-\frac{x^2}{1.2}f'(x)+\frac{x^3}{1.2.3}f''(x)-\frac{x^4}{1.2.3.4}f'''(x)+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\pm\frac{x^{n+1}}{1.2\ldots n.n+1}f^n(x)\ (*).$$

(*) Serie de Jean Bernoulli. (Voir Lacroix, Calcul differ., p. 358, 5e edition, 1837. Im.

2. *Remarques.* 1° Nous avons supposé dans tout ce qui précède que les axes étaient rectangulaires. Dans le cas où ils ne le seraient pas, en nommant α leur angle, on aurait pour expression de la nouvelle surface

$$\Sigma' = \sin\alpha\,\Sigma.$$

2° Si on voulait avoir seulement l'aire d'une portion telle que MKNP, on ferait NP $= z$, et divisant z en m parties égales, les ordonnées successives seraient

$$y = f(x), \quad y' = f\left(x - \frac{z}{m}\right), y'' = f\left(x - \frac{2z}{m}\right) \ldots\ldots$$

Alors, par un calcul identique à celui que nous venons de faire, mais dans lequel $\frac{x}{m}$, $\frac{x^2}{m^2}$..... etc., seraient remplacés par $\frac{z}{m}$, $\frac{z^2}{m^2}$....... etc., on obtiendrait

$$\Sigma = \frac{z}{1} f(x) - \frac{z^2}{1.2} f'(x) + \frac{z^3}{1.2.3} f''(x) - \frac{z^4}{1.2.3.4} f'''(x) + \ldots\ldots$$

$$\ldots \pm \frac{z^{n+1}}{1.2.3\ldots\ldots n.(n+1)} f^n(x).$$

3° Nous avons admis que l'on avait généralement

$$\lim. \ \frac{S_n}{m^{n+1}} = \frac{1}{n+1}\,;$$

pour ne rien laisser à désirer, nous donnerons ici une démonstration de cette proposition.

Soient $a, b, c, d \ldots k, m$ les termes d'une progression par différence dont la raison soit 1, nous aurons :

$$b^n = (a+1)^n = a^n + na^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} + \ldots\ldots + na + a^0,$$

$$c^n = (b+1)^n = b^n + nb^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} b^{n-2} + \ldots\ldots + nb + b^0,$$

$$d^n = (c+1)^n = c^n + nc^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} c^{n-2} + \ldots\ldots + nc + c^0,$$

. . . .

$$m^n = (k+1)^n = k^n + nk^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}k^{n-2} + \ldots\ldots + nk + k^0.$$

Faisons la somme membre à membre, nous obtiendrons en employant la notation adoptée plus haut :

$$m^n - a^n = n(S_{n-1} - m^{n-1}) + \frac{n(n-1)}{1.2}(S_{n-2} - m^{n-2})$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(S_{n-3} - m^{n-3}) + \ldots (S_0 - 1).$$

De là on déduit, en faisant $a = 1$, et successivement $n = 1$ $n = 2\ldots\ldots$

$$S_0 = m$$

$$S_1 = \frac{1}{2} m(m+1),$$

$$S_2 = \frac{1}{3} m^3 + \frac{1}{2} m^2 + \frac{1}{6} m,$$

$$S_4 = \frac{1}{4} m^4 + \frac{1}{2} m^3 + \frac{1}{4} m^2.$$

Donc on a

$$\lim.\frac{S_0}{m} = \frac{1}{1},\ \lim.\frac{S_1}{m^2} = \frac{1}{2},\ \lim.\frac{S_3}{m^3} = \frac{1}{3},\ \lim.\frac{S_4}{m^4} = \frac{1}{4}.$$

Pour démontrer que cette limite est générale, supposons-la vraie pour $\frac{S_{n-1}}{m^n}$; je dis que l'on aura aussi lim. $\frac{S_n}{m^{n+1}} = \frac{1}{n+1}$.

En effet, d'après la formule précédente, nous avons

$$m^{n+1} - 1 = (n+1)(S_n - m^n) + \frac{(n+1)n}{1.2}(S_{n-1} - m^{n-1}) + \ldots$$

$$\ldots\ldots + (n+1)(S_1 - m) + (S_0 - 1),$$

d'où en divisant tout par m^{n+1}

$$1 - \frac{1}{m^{n+1}} = \frac{(n+1)}{1}\left(\frac{S_n}{m^{n+1}} - \frac{1}{m}\right) + \frac{(n+1)n}{1.2.m}\left(\frac{S_{n-1}}{m^n} - \frac{1}{m}\right)$$

$$+ \ldots\ldots \frac{n+1}{m^{n-1}}\left(\frac{S_1}{m^2} - \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{m^n}\left[\frac{S^0}{m} - \frac{1}{m}\right]$$

Enfin faisant $m = \infty$,

$$\lim. \frac{S_n}{m^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \text{ (*)}.$$

Donc, etc.

APPLICATIONS.

3. *Quadrature du cercle.* L'équation du cercle est $y = (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, ou en faisant $r = 1$, $y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, nous aurons donc, en désignant pour abréger par A,B,C,D..... les coefficients numériques du développement de $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{array}{lcl}
y = f(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 & & -Ax^2 - Bx^4 - Cx^6 - Dx^8 - \ldots\ldots \\
\text{d'où } f'(x) & = & -2Ax - 4Bx^3 - 6Cx^5 - 8Dx^7 - \ldots\ldots \\
f''(x) & = & -1.2A - 3.4Bx^2 - 5.6Cx^4 - 7.8Dx^6 - \ldots\ldots \\
f'''(x) & = & -2.3.4Bx - 4.5.6Cx^3 - 6.7.8Dx^5 - \ldots\ldots \\
f^{\text{iv}}(x) & = & -1.2.3.4B - 3.4.5.6Cx^2 - 5.6.7.8Dx^4 - \\
f^{\text{v}}(x) & = & -2.3.4.5.6Cx - 4.5.6.7.8Dx^3 - . \\
f^{\text{vi}}(x) & = & -1.2.3.4.5.6C - 3.4.5.6.7.8Dx^2 - \\
f^{\text{vii}}(x) & = & -2.3.4.5.6.7.8Dx - \\
f^{\text{viii}}(x) & = & -1.2.3.4.5.6.7.8D -
\end{array}$$

En multipliant $f(x)$ par $\frac{x}{1}$, $f'(x)$ par $\frac{-x^2}{2}$, et de même chacune des autres dérivées par une puissance de x divisée par un produit numérique convenable, comme l'indique la serie (Σ) (n° 1), tous les termes d'une même colonne deviennent de même degré; ils deviennent aussi alternativement positifs et négatifs; ils sont toujours en nombre egal à l'exposant de x dans la colonne, et ce nombre est toujours impair; enfin ils se détruisent tous, à l'exception du dernier de chaque colonne, de la manière suivante le premier est égal et de signe contraire a l'avant-dernier, le second est égal et de signe contraire au second avant-dernier, et ainsi de suite

---

(*) C'est ce qu'on deduit directement de la formule (A), p. 176 1re

En sorte que nous avons pour la surface cherchée, en substituant à la place de A,B,C... leurs valeurs

$$S=x-\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3}-\frac{1.1}{1.2}\cdot\frac{1}{2^2}\,\frac{x^5}{5}-\frac{1.1.3}{1.2.3}\cdot\frac{1}{2^3}\,\frac{x^7}{7}-\frac{1.1.3.5}{1.2.3.4}\,\frac{1}{2^4}\,\frac{x^9}{9}-\ldots;$$

Maintenant, si de l'espace AOMP, nous retranchons le triangle $\mathrm{OMP}=\frac{1}{2}\,x\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, nous obtiendrons pour la surface du secteur AOM

$$s=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{x^7}{7}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{x^9}{9}+\ldots\right)(^*).$$

Divisons cette expression par $\frac{1}{2}$: le quotient sera l'arc AM, en le désignant par a, et observant que $x=\sin a$, nous aurons

$$a=\sin a+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^3 a}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\sin^5 a}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{\sin^7 a}{7}$$
$$+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{\sin^9 a}{9}+\ldots\ (^{**});$$

formule propre à donner le rapport de la circonférence au diamètre, car si on y fait $a=30^\circ$, on aura $\sin a=\frac{1}{2}$, et

$$6a=\pi=3\left(1+\frac{1}{2^3 3}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2^5.5}+\frac{3.5}{4.6}\cdot\frac{1}{2^7.7}+\frac{3.5.7}{4.6.8}\cdot\frac{1}{2^9.9}+\ldots\right).$$

Cubature des solides de révolution.

4. Proposons-nous de trouver le volume engendré par l'espace AOMP tournant autour de OX (*fig.* 85). Décomposons, comme précédemment, cette surface en rectangles élémentaires, chacun d'eux donnera naissance à un cylindre dont la mesure respective sera

$$\frac{x}{m}\,\pi y^2,\quad \frac{x}{m}\,\pi y'^2,\quad \frac{x}{m}\,\pi y''^2\ldots\quad \frac{x}{m}\,\pi y^2_{m-1}.$$

(*) Lacr., Calcul diff., page 311, 5e édition.

(**) *Ibid.*, p. 310.

Soit $y^2 = \varphi(x)$, l'équation de la courbe, on aura

$$y'^2=\varphi\left(x-\frac{x}{m}\right),\ y''^2=\varphi\left(x-\frac{2x}{m}\right)\ldots y^2_{m-1}=\varphi\left(x-\frac{(m-1)x}{m}\right)$$

La somme des cylindres sera donc, en la désignant par V,

$$V=\frac{\pi x}{m}\left\{\varphi(x)+\varphi\left(x-\frac{x}{m}\right)+\varphi\left(x-\frac{2x}{m}\right)+\ldots+\varphi\left(x-\frac{(m-1)x}{m}\right)\right\}$$

En développant les termes de la parenthèse, comme au n° 1, et faisant $m=\infty$, on obtient pour le volume cherché

$$V=\pi\left\{\frac{x}{1}\varphi(x)-\frac{x^2}{1.2}\varphi'(x)+\frac{x^3}{1.2.3}\varphi''(x)-\frac{x^4}{1.2.3.4}\varphi'''(x)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{\pm x^n}{1.2.3\ldots.n}\varphi^{n-1}(x)\right\};$$

série semblable à celle qui donne la surface; seulement tous les termes sont multipliés par un facteur constant π, et $f(x)$ y est remplacée par $\varphi(x)$. On a d'ailleurs entre ces deux fonctions pour une même courbe, la relation

$$\varphi(x)=[f(x)^2].$$

9. L'application immédiate de la formule précédente aux équations

$$y^2=\left(-\frac{r}{h}x+r\right)^2,$$
$$y^2=x(2R-x),$$
$$y^2=\frac{B^2}{A^2}x(2A-x),$$
$$y^2=2px;$$

dont la première représente une droite, la seconde un cercle, la troisième une ellipse, la quatrième une parabole, donne

$V=\pi r^2\frac{h}{3}$ pour le volume du cône,

$V=\frac{4}{3}\pi R^3$ pour le volume de la sphère,

$V = \frac{4}{3}\pi AB^2$ pour le volume de l'ellipsoïde de révolution,

$V = \frac{1}{2}\pi . xy^2$ pour le volume du paraboloïde de révolution.