NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. ANNE

Problème proposé au concours général des collèges de Paris

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 36-42

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__36_1>

PROBLÈME

PROPOSE

AU CONCOURS GÉNÉRAL DES COLLÉGES DE PARIS.

SOLUTION DE M. L. ANNE,

Ancien elève de l'Ecole polytechnique, repetiteur de mathematiques au
College royal de Louis-le-Grand.

Considérez une circonférence de cercle de rayon R*, et un point situé dans le plan, et dans l'intérieur de cette circonférence, à une distance* a *du centre : regardez le point donné comme une bille infiniment petite et la circonférence comme une ligne matérielle parfaitement élastique ; de manière que, quand la bille va la frapper elle se relève toujours en faisant l'angle d'incidence égal à l'angle de réflexion.*

On demande : 1° suivant quelle direction il faut lancer cette bille pour qu'elle revienne au point de départ, après deux réflexions successives sur la circonférence.

2° Si la bille continuait sa route, elle irait se réfléchir successivement en de nouveaux points de la circonférence, et il est aisé de voir qu'elle ne pourrait repasser par les mêmes points que dans le cas où la distance, a, du point de départ au centre aurait certaines valeurs particulières.

3° On examinera ce qui arrivera dans quelques-uns des cas les plus simples, et entre autres, dans le cas où a est égal au rayon : ou bien dans le cas où le point de départ divisera le rayon en moyenne et extrême raison, c'est-à-dire dans le cas où a est l'un des deux segments du rayon divisé en moyenne et extrême raison.

SOLUTION.

1re *partie.* Suivant quelle direction faut-il lancer la bille pour qu'elle revienne au point de départ après deux réflexions successives sur la circonférence?

Soit A (*fig.* 14), la position de la bille dans le cercle dont le centre est C et le diamètre YACY'; et AB la direction suivant laquelle il faut la lancer pour que, après avoir frappé la circonférence aux deux points B et D, elle revienne au point A. D'après la loi de la réflexion, le rayon du cercle doit être aux points B et D bissecteur des angles du triangle ABD, puisqu'il est normal à la circonférence en chacun de ces deux points. Donc, l'angle ABD est double de l'angle CBD, et l'angle ADB est double de l'angle CDB. Mais le triangle CBD est isocèle, donc les angles ABD, ADB, sont égaux, comme étant les doubles d'angles égaux. Par suite, le triangle ABD est isocèle. Mais, le point C est la rencontre des bissectrices des angles du triangle ABD, et dans un triangle isocèle la bissectrice de l'angle du sommet est perpendiculaire à la base; donc, BD est perpendiculaire au diamètre YACY' : ainsi sa direction est connue.

Par le point A je mène AX parallèle à BD, c'est-à-dire perpendiculaire à AC; je prolonge BC jusqu'à sa rencontre E avec AX, et le triangle BAE résultant est isocèle, car les angles EBD, EBA, sont égaux, d'après la loi de la réflexion; et les angles EBD, BEA sont égaux comme alternes-internes; donc, les angles EBA, BEA sont égaux; par suite, le triangle ABE est isocèle.

Du point A comme centre, avec AC pour rayon je décris la circonférence CFHG, elle coupe CE en un point F tel que EF=BC, car les deux triangles isocèles BAE, CAF, ayant même sommet et appuyant leurs bases sur la même droite, doivent avoir le même point milieu de base, donc BC=FE.

Menant la droite GF, il en résulte deux triangles rectangles CFG, CAE, semblables comme équiangles, car l'angle CFG sous-tend une demi-circonférence, donc il est droit et égal à l'angle droit CAE; et l'angle C est commun. De cette similitude il résulte :

$$CE : CG :: CA : CF.$$

Mais CG=2CA, donc $CE\times CF=2\overline{CA}^2$.

Les longueurs CE, CF, peuvent donc être considérées comme les deux côtés d'un rectangle dont on connaît la surface $2\overline{CA}^2$, et la différence des côtés adjacents CE—CF=CB= le rayon du cercle donné.

Problème XVIII^e^ du III^e^ livre de la géométrie de Legendre.

Donc, pour résoudre le problème :

Je mène le diamètre YACY′ passant par le point A donné; du point A comme centre, et avec AC (distance du point A au centre du cercle donné) pour rayon, je décris la circonférence CFHG; par le point A, je mène au diamètre YCY′ la perpendiculaire AX qui coupe cette circonférence au point H; puis je conduis GH que je prolonge d'une quantité HK=BC, sur HK comme diamètre je décris une circonférence dont I est le centre, je mène la droite CMIL, qui coupant cette circonférence aux points M et L, donne $CM\times CL=2\overline{CA}^2$.

et $$CL - CM = BC.$$

Du point C comme centre, avec CL pour rayon, je décris une circonférence qui coupe AX au point E; ce point E sera tel que, menant la droite ECB, elle coupera la circonférence donnée au delà du centre C, en un point B qui est celui sur lequel il faut lancer la bille.

Et en effet, BCE coupe la circonférence CFHG en un point F qui, joint avec le point G, donne deux triangles rectangles CFG, CAE, semblables, et par suite :

$$CE \times CF = CG \times CA = 2\overline{CA}^2.$$

Mais, on a

$$CL \times CM = 2\overline{CA}^2 \text{ et } CL = CE, \text{ donc } CF = CM;$$

et par suite :

$$CE - CF = CL - CM = ML = BC.$$

L'égalité EF = BC, montre que le milieu de la base CF du triangle isocèle CAF, est le milieu de la base BE du triangle BAE. Nous en conclurons que le triangle BAE est aussi isocèle. Ainsi, les angles AEB, ABE sont égaux Mais, à cause des parallèles AX, BD, l'angle AEB = l'angle EBD. Il en résulte EBD = ABE. La bille se relèvera donc, en suivant la direction BD. Arrivée au point D, elle prendra la direction DA ; car DC est la bissectrice de l'angle BDA.

2ᵉ *partie*. Si la bille, après avoir repassé par le point A, continue sa route en se réfléchissant successivement et indéfiniment en de nouveaux points de la circonférence ; dans quels cas repassera-t-elle par les mêmes points ?

Je remarque d'abord que les cordes dessinant la route que la bille doit suivre sont toutes égales. En effet, au point B, par exemple, le diamètre BCQ est bissecteur de l'angle NBD ; donc, les deux cordes NB, BD, doivent être égales comme sous-tendant des arcs égaux.

Donc, pour que la bille (en supposant que son mouvement se prolonge indéfiniment) repasse par les mêmes points, il faut et il suffit que la corde NAB, qui indique la direction initiale de la bille, sous-tende un arc qui soit commensurable avec la circonférence. En effet : 1° si l'arc sous-tendu est une division exacte de la circonférence, la bille suivra le périmètre du polygone régulier dont cette corde est le côté.

2° Si l'arc sous-tendu est la $\left(\frac{m}{n}\right)^{i\grave{e}me}$ partie de la circonférence (m étant plus petit que n et premier avec lui), je partage la circonférence en n parties égales et je fais m fois le tour de la circonférence en joignant les points de division de m en m. J'ai alors n cordes égales faisant entre elles des angles égaux et telles que l'extrémité de la dernière est où la première commence : l'ensemble de ces n cordes forme alors ce qu'on appelle un polygone étoilé régulier de n côtés ; tel, par exemple (*fig.* 15) le décagone étoilé, formé en joignant de trois en trois les divisions de la circonférence, partagée en dix parties égales.

Et enfin, si l'on veut que la bille repasse par le point A de départ en croisant sa première direction, il faut non-seulement que l'on fasse passer par A le côté d'un polygone régulier étoilé, mais encore que le point A soit à l'intersection des côtés de ce polygone étoilé

3ᵉ PARTIE. Examiner trois cas particuliers.

1ᵉʳ *cas.* Le point de départ A est sur la circonférence.

Il est clair que si l'on veut que la bille y revienne après deux réflexions, elle doit suivre le périmètre du triangle équilatéral inscrit au cercle et ayant un sommet au point de départ. Et si l'on veut que la bille y revienne après $(n-1)$ réflexions, elle doit suivre le périmètre du polygone régulier de n côtés.

2ᵉ *cas.* Le point A de départ divise le rayon en moyenne et extrême raison, et la distance au centre en est le plus grand segment.

Je trace le décagone étoilé, (*fig.* 15), et je remarque que le triangle BAC est isocèle, les angles BAC, BCA ayant tous les deux pour mesure $\frac{2}{10}$ de la circonférence : chacun de ces angles vaut $\frac{8}{10}$ d'angle droit, donc l'angle ABC vaut $\frac{4}{10}$. Donc, CA est égal au côté du décagone régulier convexe inscrit dans la même circonférence, ou bien au plus grand segment du rayon divisé en moyenne et extrême raison.

Donc, si la distance du point A au centre est égale au plus grand segment du rayon divisé en moyenne et extrême raison, il faut, pour résoudre le problème : du point A comme centre, et avec le rayon de la circonférence donnée pour rayon, décrire une circonférence qui coupe la circonférence donnée au point B; point vers lequel il faut lancer la bille, et elle décrit alors par ses réflexions successives le décagone étoilé.

3[e] *cas*. Le point A de départ divise le rayon en moyenne et extrême raison, et sa distance au centre en est le plus petit segment.

Je trace le pentagone étoilé (*fig.* 16); je remarque que le triangle CBD est isocèle, les angles BCD, BDC, ayant tous les deux pour mesure $\frac{2}{10}$ de la circonférence. Chacun de ces angles vaut $\frac{8}{10}$ d'angle droit; donc, l'angle CBD vaut $\frac{4}{10}$. Donc enfin, CD est égal au côté du décagone régulier convexe inscrit dans la même circonférence, ou bien au plus grand segment du rayon divisé en moyenne et extrême raison, et enfin DE en est le plus petit segment.

Mais le triangle ABE est aussi isocèle, les angles BAE, BEA ayant chacun pour mesure $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{10}$ de la circonférence. Donc, $AB = BE =$ le côté du pentagone régulier convexe inscrit dans cette circonférence, et, de plus, F étant le milieu de AE et de CD, il s'ensuit que AC = DE = le plus petit segment du rayon divisé en moyenne et extrême raison.

Donc, si la distance du point A de départ, au centre, est égale au plus petit segment du rayon divisé en moyenne et extrême raison; il faut, pour résoudre le problème, du point A comme centre, et avec le côté du pentagone régulier convexe inscrit à la même circonférence pour rayon, décrire une circonférence qui coupe la circonférence donnée en un point B vers lequel il faut lancer la bille, et elle décrit alors, par ses réflexions successives, le pentagone étoilé.