

PURY

Démonstration du théorème 26

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 1
(1842), p. 357-358

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__357_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1842, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 26 (p. 247).

PAR M. PURY.

Si dans un quadrilatère inscrit dans un cercle, on prolonge les côtés opposés jusqu'à leur rencontre, les milieux des portions des bissectrices des angles ainsi formés, comprises entre les côtés du quadrilatère, sont situés sur la ligne qui joint les milieux des diagonales.

Soit ABCD le quadrilatère donné : prolongeons AD, BC jusqu'en F : AB, CD jusqu'en E : menons les bissectrices des angles E et F.

Soit FR la bissectrice de F : on peut remarquer qu'elle fait des angles égaux avec AE et ED ; en effet les deux angles en F sont égaux ;

donc l'arc RA — l'arc QD = l'arc RB — l'arc CQ ;

d'où l'arc RA + l'arc CQ + l'arc CB = l'arc RB + l'arc QD
+ l'arc CB ;

or, le 1^{er} membre est la mesure du double de l'angle RIA ;
 le 2^e membre est la mesure du double de l'angle RGC ;
 donc ces deux angles sont égaux : donc si l'on mène la bissectrice de l'angle AED, elle sera perpendiculaire sur la bissectrice RF, et la coupera en son milieu *o* et sera coupée elle-même en ce point, en son milieu.

On a donc $oI = oG$ et $oK = oH$, et comme ces droites sont perpendiculaires la figure *IIIGK* est un losange : prouvons actuellement que *IH* est parallèle à *BD* et *IK* parallèle à *CA* : puisque *FI* est la bissectrice de *F*, on a

$$IB:IA :: FB:FA, \quad \text{or on a } FB:FA :: BD:CA,$$

à cause des triangles semblables *BDF*, *FCA*, donc

$$IB:IA :: BD:CA.$$

La seconde bissectrice donne

$$HD:AN :: ED:EA,$$

or $ED:EA :: BD:CA$, donc $IB:IA :: HD:AN$,

donc *HI* et *KG* sont parallèles à *BD*, et on démontrerait de même que *IK*, et par suite *GHI* sont parallèles à *CA* : actuellement soient *L* et *M* les milieux des diagonales : joignons *CL*, *AL* : la 1^{re} coupe KG en *P* son milieu ;

la 2^e coupe HI en *N* son milieu.

Si l'on joint *NP*, d'après un théorème connu, cette ligne passe au centre du losange, est parallèle à *IK* et par suite à *AC*, et le milieu de cette droite se trouve en *o* centre du losange : donc si l'on joint *Lo* et qu'on prolonge, cette ligne coupera *AC* en son milieu, puisque *PN* est coupée en son milieu en *o* : or *L* est le milieu de la diagonale *BD*, *o* est le milieu des deux bissectrices et *M* est le milieu de la diagonale *AC* : ces trois points sont en ligne droite. C.Q.F.D