A. J. H. VINCENT

Démonstration du principe fondamental de la trigonométrie sphérique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 33-36

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__33_1>

DÉMONSTRATION

DU

PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

PAR M. A. J. H. VINCENT,
Professeur au Collége royal de Saint-Louis.

La démonstration ordinaire du principe fondamental de la trigonométrie sphérique présente l'inconvénient d'exiger une très-longue discussion, quand on veut la rendre applicable à tous les cas qui peuvent se présenter; c'est pourquoi j'ai pensé qu'on ne serait pas fâché d'en connaître une autre qui, au premier abord, paraît un peu plus longue, mais qui a l'avantage de n'exiger aucune discussion, et de s'appliquer à tous les cas possibles sans aucune restriction ni modification. Outre ce premier avantage, elle offre encore celui de se ramener à la théorie des angles trièdres, et à la seule figure de cette théorie, nécessaire pour la construction et la résolution des quatre cas non douteux. (*Voir* ma Géométrie.)

Soit donc ABC (*fig.* 13) un triangle sphérique quelconque, placé sur une sphère dont le centre est en S. Joignons les sommets A, B, C, au point S, et menons les cordes AB, AC, BC. Le triangle rectiligne formé par ces trois cordes nous donne la relation :

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AB\,AC.\cos BAC;$$

d'où, comme chacune de ces cordes est le double du *sinus* de la moitié de l'arc qu'elle sous-tend, nous tirons, en désignant par A, B, C, les angles du triangle sphérique, et par α, β, γ, les arcs respectivement opposés à ces angles :

$$4\sin^2\frac{1}{2}\alpha = 4\sin^2\frac{1}{2}\beta + 4\sin^2\frac{1}{2}\gamma - 8\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma\cos BAC.$$

Cela posé, par un point P pris sur le rayon SA faisons passer un plan MPN perpendiculaire à ce rayon : l'angle formé par les traces de ce plan sur les faces ABS, ACS, sera l'angle mesure de l'angle A ; en outre, ces traces rencontreront *toujours* les cordes AB et AC en deux points M et N situés par rapport au point A de la même manière que les points B et C. Cela résulte, en effet, de ce que les trois droites SA, SB, SC, étant égales, les triangles SBA, SCA, sont isocèles, et par suite les angles SAB, SAC, sont aigus.

Soient donc M et N les points de rencontre respectifs du plan MPN avec les cordes AB et AC. Joignons MN, nous aurons, dans le triangle AMN,

$$\overline{MN}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 - 2AM.AN.\cos BAC.$$

Mais d'ailleurs :

$$\overline{AM}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PM}^2 \quad \text{et} \quad \overline{AN}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PN}^2,$$

Donc

$$\overline{MN}^2 = 2\overline{AP}^2 + \overline{PM}^2 + \overline{PN}^2 - 2AM.AN.\cos BAC.$$

Maintenant, le triangle PMN nous fournit une seconde valeur de $\overline{MN}^2$,

$$\overline{MN}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{PN}^2 - 2PM.PN.\cos A.$$

Et alors, en éliminant $\overline{MN}^2$ entre ces deux équations, nous obtenons :

$$AM.AN.\cos BAC = \overline{AP}^2 + PM.PN.\cos A.$$

D'où :

$$\cos BAC = \frac{\overline{AP}^2 + PM.PN.\cos A}{AM.AN}.$$

Valeur qui peut être mise sous la forme :

$$\cos BAC = \frac{AP}{AM} \cdot \frac{AP}{AN} + \frac{PM}{AM} \cdot \frac{PN}{AN} \cdot \cos A.$$

Cela posé, observons que :

$$\frac{AP}{AM} = \cos PAM = \sin \frac{1}{2}\gamma,$$

$$\frac{AP}{AN} = \cos PAN = \sin \frac{1}{2}\beta,$$

$$\frac{PM}{AM} = \sin PAM = \cos \frac{1}{2}\gamma,$$

$$\frac{PN}{AN} = \sin PAN = \cos \frac{1}{2}\beta.$$

Alors, la valeur de cos BAC devient :

$$\cos BAC = \sin \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma + \cos \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\gamma \cos A.$$

Substituant cette valeur dans la première relation obtenue, nous trouvons :

$$4\sin^2 \frac{1}{2}\alpha = 4\sin^2 \frac{1}{2}\beta + 4\sin^2 \frac{1}{2}\gamma - 8\sin^2 \frac{1}{2}\beta \sin^2 \frac{1}{2}\gamma$$
$$- 8\sin \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\beta \sin \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}\gamma \cos A;$$

d'où, en divisant par 2 et remarquant que :

$$2\sin^2\frac{1}{2}m = 1 - \cos m, \quad \text{et} \quad 2\sin\frac{1}{2}m\cos\frac{1}{2}m = \sin m,$$

nous obtenons :

$$(1-\cos\alpha) = 1-\cos\beta+1-\cos\gamma-(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma)-\sin\beta\sin\gamma\cos A;$$

et enfin, réduisant et changeant les signes :

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A\ ;$$

ce qu'il fallait démontrer.