HERMITE

Considérations sur la résolution algébrique de l'équation du 5e degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 329-336

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__329_0>

CONSIDÉRATIONS

SUR LA

RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE DE L'ÉQUATION DU 5ᵉ DEGRÉ,

PAR M. HERMITE,
Élève du collége Louis-le-Grand (institution Mayer).

(Suite, v. p. 326.)

—

1. On sait que Lagrange a fait dépendre la résolution algébrique de l'équation générale du 5ᵉ degré, de la détermination d'une racine d'une équation *particulière* du 6ᵉ degré, qu'il nomme *réduite* (Résolut. des Équations numériques, note XIII). De sorte que si cette réduite était décomposable en facteurs rationnels du second ou du troisième degré, on aurait la résolution de l'équation du 5ᵉ degré. Je vais essayer de démontrer qu'une telle décomposition est impossible. A cet effet, j'ai besoin de la proposition suivante due à Lagrange (Mém. de l'Acad. de Berlin, tom. 3), et de quelques observations sur les permutations.

2. Deux fonctions semblables non symétriques des racines d'une même équation $X=0$ peuvent toujours s'exprimer rationnellement l'une par l'autre.

Démonstration. On appelle fonctions semblables de racines, celles qui varient ensemble ou deviennent les mêmes pour les mêmes permutations : telles sont

$$\alpha+\beta, \quad \alpha^m+\beta^m, \quad \alpha^m\beta^m, \text{ etc.}$$

Soient donc φ et ψ deux fonctions quelconques semblables des racines d'une équation, et supposons qu'en permutant les racines de toutes les manières possibles la fonction φ ait n valeurs représentées par

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \varphi_3 \ldots\ldots \varphi_{n-1}, \varphi_n,$$

les valeurs correspondantes de ψ sont

$$\psi_1, \quad \psi_2, \quad \psi_3 \ldots\ldots \psi_{n-1}, \psi_n.$$

Il est évident, par la théorie des équations, que les n valeurs de φ sont racines d'une équation de degré n, qu'on obtient en effectuant le produit des facteurs

$$F(x) = (x-\varphi_1)(x-\varphi_2)(x-\varphi_3)\ldots(x-\varphi_{n-1})(x-\varphi_n) = 0,$$

et par les formules des fonctions symétriques, on connaît les coefficients de cette équation.

On a de même

$$f(x) = (x-\psi_1)(x-\psi_2)\ldots\ldots(x-\psi_{n-1})(x-\psi_n) = 0;$$

désignons par $F'(\varphi_1)$, $F'(\varphi_2)$, etc., les valeurs successives de la dérivée de Fx, en remplaçant x par φ_1, φ_2, φ_n.

Formons la fonction suivante du degré $n-1$

$$\frac{Fx}{(x-\varphi_1)F'(\varphi_1)}\psi_1 + \frac{F(x)}{(x-\varphi_2)F'(\varphi_2)}\psi_2 + \ldots \frac{Fx}{(x-\varphi_n)F'(\varphi_n)}\psi_3 = \pi(x),$$

et par la théorie des fonctions symétriques, les coefficients de cette fonction sont donnés en fonction des coefficients de $X=0$; car on reconnaît facilement que les racines de l'équation $X=0$ y entrent sous forme invariable; donc $\pi(x)$ est une fonction rationnelle de x, fesant dans cette identité $x=\varphi_1$, le premier membre se réduit à son premier terme, car le quotient $\dfrac{Fx}{x-\varphi_1}$ devient $F'(\varphi_1)$, lorsque $x=\varphi_1$, et tous les autres termes s'évanouissent : on suppose d'ailleurs tous les facteurs inégaux ; donc $\psi_1 = \pi(\varphi_1)$; de même $\psi_2 = \pi(\varphi_2)$, etc. C.Q.F.D.

3. *Application.* $X = x^3 + px^2 + qx + r = 0$,

racines $(\alpha, \beta, \gamma.)$

$$\varphi = \alpha\beta, \quad \psi = \alpha + \beta,$$

$$\varphi_1 = \alpha\beta, \quad \varphi_2 = \alpha\gamma, \quad \varphi_3 = \beta\gamma,$$

$$Fx = (x - \alpha\beta)(x - \alpha\gamma)(x - \beta\gamma),$$

$$\psi_1 = \alpha + \beta, \quad \psi_2 = \alpha + \gamma, \quad \psi_3 = \beta + \gamma,$$

$$fx = (x - \alpha - \beta)(x - \alpha - \gamma)(x - \beta - \gamma),$$

$$F'(\varphi_1) = \alpha\beta\,(\beta - \gamma)\,(\alpha - \gamma), \text{ etc.}$$

$$\pi(x) = \frac{(x - \alpha\gamma)(x - \beta\gamma)}{\alpha\beta(\beta - \gamma)\,(\alpha - \gamma)} + \text{, etc......}$$

et fesant les réductions

$$\pi(x) = \frac{-x^2}{\alpha\beta\gamma} + x\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) = \frac{x^2 - qx}{\gamma}.$$

Soit $X = x^3 - 7x + 6$; $\alpha = 1$; $\beta = 2$; $\gamma = -3$;

$\pi(x) = \dfrac{x^2 + 7x}{6}$; donnant à x successivement les trois valeurs de φ, savoir 2 ; -3 ; -6, on obtient $+3$; -2 ; -1 ; les trois valeurs de ψ.

4. Tous les coefficients des diviseurs d'une équation sont des fonctions semblables des racines de cette équation ; par conséquent, connaissant un de ces coefficients, on peut déterminer tous les autres, en fonction rationnelle du coefficient connu.

5. Venons aux permutations : 5 quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ permutées 5 à 5 fournissent 120 permutations qu'on peut partager en 24 groupes de 5 permutations rangées par ordre *circulant*; ex. : le 1er groupe commence par $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, et sa formation est indiquée par l'échelle 23451 ; cela veut dire que la première lettre doit être remplacée par la seconde ; la seconde par la troisième ; la 3e par la 4e, etc. ; de sorte que le second terme de ce groupe est $\beta\gamma\delta\varepsilon\alpha$, qui donne le 3e $\gamma\delta\varepsilon\alpha\beta$, etc. ; le 1er terme du second groupe est $\alpha\beta\gamma\varepsilon\delta$; l'échelle de formation est toujours

23451 ; de sorte que le second terme est $\beta\gamma\varepsilon\delta\alpha$, et ainsi de suite ; les têtes de groupes sont donc fournies par les 24 permutations des 4 lettres $\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$; ces 24 permutations peuvent se diviser en 6 groupes de quatre termes rangés aussi par ordre *dérivatif* avec l'échelle 2413, c'est-à-dire à remplacer la 1re lettre par la 2e; la 2e par la 4e; la 3e par la 1re, et la 4e par la 3e : ainsi le 1er terme du 1er groupe étant $\beta\gamma\delta\varepsilon$, donne le second $\gamma\varepsilon\beta\delta$, d'où l'on déduit le 3e $\varepsilon\delta\gamma\beta$; le 4e $\delta\beta\varepsilon\gamma$. Les têtes de groupe sont données par les permutations de $\gamma\delta\varepsilon$ et les divers termes par l'indice constant 2413.

6. Soit maintenant l'équation générale du 5e degré

$$x^5-A_1x^4+A_2x^3-A_3x^2+A_4x-A_5=0, \qquad (1)$$

$$(\text{racines } \alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon).$$

Les coefficients sont supposés réels et rationnels.

Formons l'équation au produit de deux racines; elle est de la forme

$$x^{10}-B_1x^3+B_2x^6 \ldots\ldots\; B_{10}=0. \qquad (2)$$

$$\left.\begin{matrix}\alpha\beta,\beta\gamma,\gamma\delta,\delta\varepsilon,\varepsilon\alpha\\ \alpha\gamma,\gamma\varepsilon,\varepsilon\beta,\beta\delta,\delta\alpha\end{matrix}\right\}\text{racines.}$$

B_1, B_2.... sont des coefficients connus, réels et rationnels, et $B_1=A_2$; soit $f(m,n,p,q,r)$ une fonction symétrique quelconque des cinq quantités qui y entrent ; remplaçons d'abord les 5 quantités respectivement par les 5 racines de la 1re ligne, on obtient $\qquad f(\alpha\beta,\beta\gamma,\gamma\delta,\delta\varepsilon,\varepsilon\alpha)=\varphi,$

et ensuite par les 5 racines de la seconde ligne, on obtient

$$f(\alpha\gamma,\gamma\varepsilon,\varepsilon\beta,\beta\delta,\delta\alpha)=\psi.$$

Quelques permutations qu'on fasse entre les racines, $\varphi+\psi$ ne peut prendre que six valeurs différentes. En effet φ n'est susceptible au plus que de 120 valeurs différentes ou de 24 groupes de 5 termes chacun donnés par l'indice 23451 ; il est évident par la seule inspection que les 5 termes de chaque groupe deviennent identiques : ainsi le 1[er] terme du 1[er] groupe est $f(\alpha\beta,\ \beta\gamma,\ \gamma\delta,\ \delta\varepsilon,\ \varepsilon\alpha)$; et le second terme devient

$$f(\beta\gamma, \gamma\delta, \delta\varepsilon, \varepsilon\alpha, \alpha\beta)$$

égal au 1[er]. Donc les 120 valeurs de φ et de ψ se réduisent à 24 termes donnés par les permutations des quatre racines $\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$, lesquelles se rangent en 6 groupes de 4 termes fournis par l'indice 2413 ; mais il est évident que φ se change par cet indice en ψ, et *vice versâ* ; car, $\gamma\varepsilon\beta\delta$, qui appartient à φ, donne en vertu de cet indice $\gamma\varepsilon\beta\delta$, qui appartient à ψ, et ainsi des autres.

On prouvera de même que $\varphi\psi$ n'est susceptible que de six valeurs.

II.

7. Soit

$$\varphi = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\varepsilon + \varepsilon\alpha,$$
$$\psi = \alpha\gamma + \gamma\varepsilon + \varepsilon\beta + \beta\delta + \delta\alpha;$$

l'équation d'où dépendent les valeurs de $\varphi\psi$ sera donc de la forme

$$x^6 - C_1x^5 + C_2x^4 \ldots\ldots\ldots\ldots C_6 = 0, \tag{3}$$

désignant les 6 racines par λ_1, λ_2, $\lambda_3 \ldots \lambda_6$, on aura

$$\begin{array}{ll}
1 & (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\varepsilon+\varepsilon\alpha)\ (\alpha\gamma+\gamma\varepsilon+\varepsilon\beta+\beta\delta+\delta\alpha) = \lambda_1 \\
2 & (\alpha\delta+\delta\varepsilon+\varepsilon\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\ (\alpha\beta+\beta\delta+\delta\gamma+\gamma\varepsilon+\varepsilon\alpha) = \lambda_2 \\
3 & (\alpha\gamma+\gamma\beta+\beta\delta+\delta\varepsilon+\varepsilon\alpha)\ (\alpha\delta+\delta\gamma+\gamma\varepsilon+\varepsilon\beta+\beta\alpha) = \lambda_3 \\
4 & (\alpha\gamma+\gamma\delta+\delta\varepsilon+\varepsilon\beta+\beta\alpha)\ (\alpha\varepsilon+\varepsilon\gamma+\gamma\beta+\beta\delta+\delta\alpha) = \lambda_4 \\
5 & (\alpha\varepsilon+\varepsilon\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\alpha)\ (\alpha\gamma+\gamma\varepsilon+\varepsilon\delta+\delta\beta+\beta\alpha) = \lambda_5 \\
6 & (\alpha\delta+\delta\varepsilon+\varepsilon\gamma+\gamma\beta+\beta\alpha)\ (\alpha\gamma+\gamma\delta+\delta\beta+\beta\varepsilon+\varepsilon\alpha) = \lambda_6.
\end{array}$$

Ces six racines se composent de 12 facteurs ; la somme de deux facteurs de la même racine est connue et constamment égale à A_2 ; de plus chaque facteur a 2 ou 3 termes en commun avec 10 autres facteurs, et ces termes communs sont des racines de l'équation (2). Cela posé, je dis que l'équation (3) ne peut admettre un facteur rationnel ni du 2^e, ni du 3^e degré ; supposons qu'il existe un facteur rationnel du 2^e degré, et qu'il comprenne les deux racines λ_1, λ_2 : dans cette hypothèse, ces deux racines sont déterminables et n'impliquent qu'un radical carré : connaissant le produit et la somme de deux facteurs on connaît les facteurs ; donc, les quatre facteurs qui servent à former les racines λ_1, λ_2 sont connus et ne renferment que des radicaux carrés. Or, l'équation (2) admet 252 facteurs du 5^e degré, tous de la forme

$$x^5 - C_1x^4 + C_2x^3 - C_3x^2 + C_4x - C_5.$$

Il est évident que dans le nombre il existe 4 facteurs où C_1 a pour valeurs les 4 facteurs des racines $\lambda_{(2)}, \lambda_{(1)}$; C_1 est donc déterminé, et ne renferme que des radicaux carrés ; et par conséquent tous les autres coefficients C_2, C_3, C_4 sont aussi déterminés d'après la proposition énoncée (4) ; parmi ces quatre facteurs du 5^e degré il y en a deux au moins qui ont 2 racines en commun ; dans l'exemple choisi, c'est $\alpha\beta$ et $\alpha\varepsilon$, ou bien $\beta\gamma$ et $\delta\varepsilon$: si on avait pris les deux racines $\lambda_{(5)}$ et $\lambda_{(1)}$, on trouverait dans les diviseurs du 5^e degré 3 racines en commun $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\delta\varepsilon$. D'après la théorie des équations, des racines communes à 2 diviseurs peuvent être données séparément ; donc $\alpha\beta$ est racine d'une équation, soit du 2^e, soit du 3^e degré, car les coefficients ne renferment que des radicaux carrés ; donc la valeur de $\alpha\beta$ est donnée en fonction des coefficients de l'équation (1) et ne renferme que des radicaux carrés et cubes, mais $\alpha+\beta$ peut toujours s'exprimer rationnellement en fonction de $\alpha\beta$ (2) : il s'ensuivrait donc que les racines α et β, de l'équation du 5^e degré ne renfermerait que des racines carrées et cubiques, résultat absurde, qui provient de l'admission d'un facteur rationnel du second degré dans l'équation (3) ; donc ce facteur n'existe pas. On démontrerait de la même manière et *à fortiori*, que cette équation n'a pas de facteur rationnel du 3^e degré; et par conséquent les racines $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ etc., ne peuvent s'exprimer en radicaux carrés et cubiques.

III.

8. Je vais maintenant démontrer comme une conséquence de ce qui précède que les racines de la réduite de Lagrange ne peuvent non plus s'exprimer en radicaux carrés et cubiques. En effet, rappelons succinctement la manière d'obtenir cette réduite. On pose l'équation

$$\mu^5-1=0, \quad \text{et l'on fait} \quad t=\alpha+\mu\beta+\mu^2\gamma+\mu^3\delta+\mu^4\varepsilon,$$

d'où

$$t^5=A^5+(\mu-1)\xi'+(\mu^2-1)\xi''+(\mu^3-1)\xi'''+(\mu^4-1)\xi^{\prime v}=\theta,$$

où $\xi', \xi'', \xi''', \xi^{\prime v}$ sont des fonctions déterminées des cinq racines de l'équation (1); la réduite dont il s'agit a pour racines les valeurs que peut prendre une fonction symétrique de ces quantités, pour toutes les permutations entre les racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$; or ces valeurs se réduisent à 6, par la même raison que les valeurs de $\varphi\psi$ se sont réduites à 6 (7) : 1° à cause de l'échelle de permutation 2 3451, qui les réduit à 24; 2° de l'échelle 2413, qui réduit les 24 à 6 : nommons l une racine quelconque de la réduite de Lagrange, et λ une racine correspondant à la même permutation de notre équation (3). Il est évident que ces quantités varient simultanément, ou restent les mêmes pour les mêmes permutations : elles sont donc des fonctions semblables des racines; l'une peut donc s'exprimer en fonction rationnelle de l'autre; on a ainsi $\lambda=F(l)$; donc si l ne renfermait que des radicaux carrés et cubes, il en serait de même de λ, ce qui a été démontré impossible : donc l doit admettre d'autres radicaux; par conséquent la réduite de Lagrange est essentiellement irréductible, n'a pas de facteurs rationnels du 2e et du 3e degré. Or, elle devrait en avoir pour que la résolution de l'équation du 5e degré fût possible, donc cette résolution est impossible et à fortiori la résolution des équations de degré supérieur.

(*La suite prochainement.*)