Nouvelles annales de mathématiques

Hermite

Considérations sur la résolution algébrique de l'équation du 5e degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 326-328

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__326_1>

CONSIDÉRATIONS

SUR LA

RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE DE L'ÉQUATION DU 5e DEGRÉ,

PAR M. HERMITE,
Élève du collége Louis-le-Grand (institution Mayer).

Le célèbre Abel (*), dont la science pleurera encore longtemps la mort prématurée, sans avoir connu les travaux de *Ruffini*, a entrepris aussi de démontrer l'impossibilité de résoudre l'équation générale du cinquième degré, en d'autres termes, l'impossibilité de l'existence d'une fonction algébrique des coefficients de l'équation qui, substituée à la place de l'inconnue, satisfasse à l'équation. Les raisonnements de l'illustre analyste sont fondés sur une classification des formes primordiales des fonctions algébriques, formes intégrantes *sui generis*, qui ne peuvent se transformer les unes dans les

(*) Abel (Nicolas-Henri), né le 25 août 1802, à Frindoë, village sur la côte occidentale de Norwége, mort le 6 avril 1829, aux mines de fer de Froland, en Norwége.

autres. L'impossibilité de cette transformation, signalée par *Laplace* (*), n'a été solidement établie que par M. *Liouville* (**). Un des plus beaux théorèmes de M. *Cauchy* (***) sur le nombre de formes que peut prendre une fonction non symétrique de plusieurs variables, en permutant les variables de toutes les manières possibles, sert de base à la démonstration d'Abel. Son mémoire, publié à Christiania en 1826, a été inséré la même année dans le journal de M. Crelle (tome I, p. 65). L'auteur en a donné un extrait dans le Bulletin des Sciences Mathématiques (tome VI, p. 347, juin 1826). Nous traduisons ce mémoire avec quelques éclaircissements pour les lecteurs des *Nouvelles Annales*. Occupé de ce travail, nous venons de recevoir sur le même sujet des considérations fort remarquables. Le jeune auteur (****), déjà versé dans les écrits de nos grands analystes et familiarisé avec les plus hautes conceptions de la science, parvient aux mêmes conclusions que le géomètre norwégien par une voie plus courte et au moyen de théorèmes exposés dans la note XIII de *Lagrange*, généralement connue.

Voici la marche que M. Hermite a suivie. On sait qu'Euler s'est occupé à diverses fois de la théorie des équations, où son génie a laissé des traces qui, comme d'ordinaire chez lui, sont celles du lion. Après avoir donné une forme nouvelle aux résolutions des quatre degrés, il montre que la racine d'une équation quelconque doit être représentée par un type unique renfermant des radicaux du degré de l'équation; chacun

---

(*) Théorie analytique des probabilités, page 6.

(**) Journal des Mathématiques, tome II, p. 56, 1837; il ne paraît pas même qu'une équation algébrique puisse avoir de racines transcendantes.

(***) Journal de l'École polytechnique, cahier XVII.

(****) M. Hermite a obtenu en 1841 le 1er accessit de mathématiques spéciales au concours général des colléges de Paris; il est des premiers dans la classe de M. Richard, professeur distingué au collége Louis-le-Grand.

de ces radicaux surmontant des radicaux de degré moindre. Ainsi, pour le cinquième degré, on a

$$x = \mathrm{A} + \sqrt[5]{\mathrm{B} + \sqrt[5]{\mathrm{C} + \sqrt[5]{\mathrm{D} + \sqrt[5]{\mathrm{E}}}}},$$

B,C,D,E ne renferment que des radicaux de degré au-dessous de cinq ; or, M. Hermite démontre que ce type est inadmissible dans le cas général pour les équations du cinquième degré ; donc la résolution des équations de ce degré est impossible. Il démontre de plus que lorsque, dans un cas particulier, ce type existe, la solution est possible, et telle est, entre autres, l'équation de Vandermonde ; et en général toutes les fois que toutes les racines sont les fonctions rationnelles de l'une d'entre elles, la solution peut s'effectuer. Cette condition existe dans toutes les classes d'équations binômes et autres que l'on est parvenu à résoudre.

Nous croyons opportun de répondre ici à une question qui nous a été adressée. Est-il rigoureusement prouvé qu'on ne puisse, avec la règle et le compas, construire la duplication du cube, la trisection de l'angle, la double moyenne proportionnelle ? L'impossibilité de cette sorte de construction n'a été définitivement établie que par M. Wantzel, auquel on doit cet important théorème. Les racines de toute équation *irréductible*, dont le degré n'est pas une puissance de deux, ne peuvent se construire à l'aide d'un système de droites et de cercles ; or, les trois célèbres problèmes conduisent à ce genre d'équations. (*Journal de Mathématiques*, t. II, p. 369, 1837.)

Il est à désirer que le même géomètre donne suite à ses belles considérations sur les quantités incommensurables numériques dont la théorie est si peu avancée. (*Journal de l'École Polytechnique*, cahier 25, 1837.) Tm.

(*La suite prochainement.*)