GUILMIN

Questions proposées aux examens

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 304-310

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__304_1>

QUESTIONS PROPOSÉES AUX EXAMENS.

PAR M. GUILMIN,
Professeur de mathématiques.

1. Trouver les propriétés communes aux paraboles représentées par l'équation

$$c^2y^2+2cxy+x^2+2cy-2c^2x-c^2=0. \qquad (1)$$

(les axes des coordonnées étant supposées rectangulaires).

On appelle *propriété commune* aux courbes représentées par une équation qui renferme des constantes arbitraires, une relation existant entre les coefficients de chacune d'elles, indépendamment de toutes valeurs particulières attribuées à ces constantes.

Dans les questions semblables à la proposée, on doit d'abord déterminer le nombre des propriétés communes essentiellement distinctes que doivent avoir les courbes dont on s'occupe. Il est facile de voir que les paraboles dont il s'agit en ont trois et pas davantage. En effet, l'équation générale des paraboles renferme quatre coefficients arbitraires; si on les identifie avec ceux de l'équation (1), nous aurons quatre équations entre ces coefficients et c; éliminant c entre ces équations, il en restera trois qui devront, quelque valeur que l'on attribue à cette constante, être vérifiées par les coefficients de chacune des paraboles représentées par (1), ce qui constitue bien *trois* propriétés communes qu'il nous faut découvrir.

Il n'y en a pas plus de trois *distinctes*. En effet, s'il y en avait seulement quatre, les coefficients seraient déterminés, ce qui évidemment n'est pas.

Pour déterminer ces propriétés, on peut suivre la marche indiquée tout à l'heure en partant de l'équation générale des courbes du second ordre $Ay^2+Bxy+Cx^2+\ldots=0$; on identifie les coefficients avec ceux de (1), et sans compter la relation $B^2-4AC=0$, on en trouve trois autres que voici: $D=B, \frac{E}{A}=-2, \frac{F}{A}=-1$. La question peut ainsi être considérée comme résolue. Mais on peut demander d'expliquer les conséquences qui résultent de ces propriétés communes pour les points ou les lignes remarquables de ces paraboles; on demande même le plus souvent de déterminer directement des propriétés communes à ces points ou à ces lignes équivalant aux relations ci-dessus.

Il est important d'observer qu'on appelle *propriété commune* à ces points ou à ces lignes toute relation entre les quantités servant à fixer la position ou la direction qui leur convient, indépendamment de toute valeur particulière attribuée à la constante c.

Je vais traiter la question proposée sous ce second point de vue. Pour cela, il est plus commode d'écrire l'équation de la parabole sous la forme suivante, déduite de la propriété du foyer :

$$(y-y')^2+(x-x')^2-(py+qx+r)^2=0. \qquad (2)$$

dans laquelle y' et x' désignent les coordonnées du foyer, $py+qx+r$ étant l'expression générale de la distance au foyer d'un point de la courbe, exprimée en fonction des coordonnées de ce point.

(On sait qu'alors l'équation de la directrice est... $py+qx+r=0$.)

Développant l'équation (2) et identifiant ses coefficients avec ceux de (1), on a

$$(3)\left\{\begin{array}{l} 1-p^2=mc^2, \quad pq=-mc, \quad 1-q^2=m, \quad y'+pr=-mc, \\ \qquad\qquad x'+qr=mc^2, \\ y'^2+x'^2-r^2=-mc^2, \qquad \text{on a de plus} \quad p^2+q^2=1. \end{array}\right.$$

relation commune à toutes les paraboles et qui correspond à la relation $B^2-4AC=0$.

On obtient, en combinant les équations (3), les résultats suivants : $1-p^2$ ou $q^2=mc^2$, $1-q^2$ ou $p^2=m$, d'où $p^2+q^2=m(1+c^2)=1$, d'où $m=\frac{1}{1+c^2}$, et par suite $q^2=\frac{c^2}{1+c^2}$, $p^2=\frac{1}{1+c^2}$; de $y'+pr=pq$, on déduit $y'=p(q-r)$; de $x'+qr=1-p^2=q^2$, on tire $x'=q(q-r)$; d'où $y'^2+x'^2=(p^2+q^2)(q-r)^2=(q-r)^2$ à cause de $p^2+q^2=1$. Substituant cette valeur dans

$$y'^2+x'^2-r^2=-mc^2=-(1-p^2)=-q^2,$$

il vient $(q-r)^2-r^2=-q^2$, d'où $q^2-2qr=-q^2$ ou $2q^2-2qr=0$, ou enfin $2q(q-r)=0$.

Cette équation est satisfaite par $q=0$, $q=r$; la première valeur ne satisfait pas à la question, c'est ce qui est facile à voir.

La valeur $q=r$ donne $y'=0$, $x'=0$, ce qui prouve que l'origine actuelle des coordonnées est un foyer commun à toutes les courbes représentées par l'équation proposée; ce qui équivaut, comme on sait, à deux relations entre les coefficients ou à *deux* propriétés communes. La relation $pq=-mc$ et $p^2=m$ donne $pq=-p^2c$, d'où $-\frac{q}{p}=c$ et à cause de $q=r$ on a aussi $-\frac{r}{p}=c$. Mais l'équation de la directric e peut s'écrire $y=-\frac{q}{p}x-\frac{r}{p}$, elle devient $y=cx+c=c(x+1)$. Elle est satisfaite par $y=0$, $x=-1$, quel que soit c; donc les directrices de toutes les courbes dont nous nous occupons coupent l'axe des x au point $x=-1$, ce qui donne une relation entre les coefficients, distincte des *deux* que nous avons signalées. La question est donc complétement résolue.

2. On peut trouver d'autres propriétés communes aux points et lignes remarquables, mais elles ne peuvent plus être que des conséquences de celles que nous avons trouvées, sans quoi il y aurait plus de trois relations distinctes entre les coefficients. La recherche de ces propriétés peut être l'objet de nouvelles questions, mais nous n'avons pas à nous en occuper, car on ne saurait trop alors où s'arrêter.

3. Pour familiariser les élèves avec les questions de ce genre, je vais traiter un deuxième exemple.

Déterminer les *propriétés communes* à toutes les hyperboles qu'on obtient en faisant varier c dans l'équation

$$x^2(1-c^2)+2cxy+2cy-2c^2x-c^2=0. \qquad (1)$$

Ces propriétés communes, telles qu'on les a définies, sont ici au nombre de *quatre*. La démonstration serait la même que pour les paraboles de la question précédente. Si on veut trouver les relations entre les coefficients de la courbe, on opérera comme il a été dit et on trouvera facilement celles-ci

$$A=0, \quad D=B, \quad E=2F, \quad C=\frac{(E^2-B^2)}{2E}.$$

Traitons maintenant la question sous le deuxième point de vue indiqué, c'est-à-dire cherchons des propriétés communes aux points et lignes remarquables, tels que le foyer, la directrice, les asymptotes, etc., équivalant aux relations que nous venons d'écrire.

Comme l'équation manque du terme en y^2, nous nous occuperons tout naturellement de l'asymptote parallèle aux y. On déduit de l'équation (1)

$$y=-\frac{x^2(1-c^2)-2c^2x-c^2}{2cx+2c}=-\frac{x^2(1-c^2)-2c^2x-c^2}{2c(x+1)};$$

d'où il résulte que la droite $x=-1$ est une asymptote commune à toutes les hyperboles (1), ce qui équivaut à deux relations entre les coefficients de la courbe.

4. Pour en trouver d'autres je prends l'équation

$$(y-y')^2+(x-x')^2-(py+qx+r)^2=0. \tag{2}$$

Nous aurons en identifiant avec la proposée

$$(3)\begin{cases} 1-p^2=0,\ 1-q^2=m(1-c^2),\ pq=-mc,\ y'+pr=-mc, \\ x'+qr=mc^2,\quad y'^2+x'^2-r^2=-mc^2. \end{cases}$$

Combinons ces équations, on a de suite $p=\pm 1$; d'où $\pm q=-mc$ et $q^2=m^2c^2$; d'où $1-m^2c^2=m(1-c)^2$, équation satisfaite par $m=1$, $m=-\frac{1}{c^2}$; (je prouverai plus tard que $m=-\frac{1}{c^2}$ ne convient pas). Prenons en conséquence $m=1$.

Nous avons

$$y'+pr=pq, \quad \text{ou} \quad y'=p(q-r); \quad x'+pr=mc^2=c^2=q^2,$$

d'où $x'=q\ (q-r)$; transportons ces valeurs dans

$$y'^2+x'^2-r'^2=-mc^2,$$

il vient à cause de $p=\pm 1$ ou $p^2=1$

$$(q-r)^2+q^2(q-r)^2-r^2=-q^2,$$

d'ou

$$(q-r)\left[(q-r)+q^2(q-r)+(q+r)\right]=0,$$

ou

$$(q-r)\left[2q+q^2(q-r)\right]=0. \tag{3}$$

Équation satisfaite par $q=r$. En prenant cette valeur on trouve $y'=0$, $x'=0$. Ce qui fait voir que l'origine actuelle est un foyer commun à toutes les hyperboles de l'équation (1). Ce résultat équivaut à deux nouvelles relations entre les coefficients ou à deux nouvelles propriétés communes. La question est donc résolue.

5. Cependant il est nécessaire de prouver que $m=-\frac{1}{c^2}$ ne peut convenir pour les courbes (1); de plus il faut voir ce que signifie la deuxième valeur de q (sans compter la valeur 0 qui ne convient pas), que l'on déduit du deuxième facteur du premier membre de (4). Sans quoi on pourrait croire que les courbes de l'équation (1) se partagent en deux classes dont nous n'aurions examiné qu'une.

D'abord $m=-\frac{1}{c^2}$ ne convient pas; en effet

$$x'+qr=mc^2=-1$$

dans notre hypothèse donne $x'=-(1+qr)$. Substituons dans

$$y'^2+x'^2-r^2=-mc^2=1,$$

il vient

$$p^2(q-r)^2+(1+qr)^2-r^2=1;$$

développant et observant que $p^2=1$ et $q^2=m^2c^2=1$ on a

$$q^2-2qr+r^2+1+2qr+q^2r^2-r^2=1,$$

se réduisant à

$$q^2+q^2r^2=0, \qquad \text{ou} \qquad q^2(1+r^2)=0,$$

ou enfin $1+r^2=0$ équation impossible pour des valeurs réelles de r.

Maintenant $2q+q^2(q-r)=0$ ou $2+q(q-r)=0$, en laissant de côté $q=0$, donne $q-r=-\frac{2}{q}$. Cette relation correspond à la position particulière du deuxième foyer dépendant des propriétés déjà trouvées et ne constitue rien de particulier. En effet nous avons trouvé $x'=q(q-r)$; substituant $q-r=-\frac{2}{q}$ on trouve $x'=-2$ ou x' est justement l'abscisse constante du 2e foyer pour toutes les hyperboles jouissant des propriétés déjà trouvées.

Soient Ax, Ay les axes et AB étant égal à -1, BC l'asymptote commune. La perpendiculaire AB abaissée du foyer A sur l'asymptote est la longueur commune de l'axe non transverse de ces hyperboles. Soit ACD la direction de l'axe transverse de l'une quelconque d'entre elles, le deuxième foyer sera de l'autre côté de BC en un point D tel que AC sera constamment égal à CD, de sorte que tous ces seconds foyers sont sur une parallèle à BC ou à Ay à une distance de cette dernière égale à AE$=$2AB $=-2$ ce qu'il fallait prouver.

On voit ici un exemple d'autres propriétés communes aux foyers, axes, etc., mais qui dépendent de celles déjà trouvées.