

CAMUS

## Note sur les diamètres conjugués

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 1  
(1842), p. 300-304

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1842\\_1\\_1\\_\\_300\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__300_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1842, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

## NOTE

SUR

### LES DIAMÈTRES CONJUGUÉS;

**PAR M. CAMUS,**

Professeur au Collège Bourbon.

---

1. Soient OA, OB' (fig. 66), deux demi-diamètres conjugués, soient  $x', y'$  les coordonnées du point A',  $x'', y''$  celles du point B', je dis qu'on aura les relations

$$x'^2 + x''^2 = a^2, \quad y'^2 + y''^2 = b^2,$$

les équations des droites OA', OB' sont

$$y = \frac{y'}{x'} x, \quad y = \frac{y''}{x''} x,$$

ces droites étant des diamètres conjugués, on a la relation

$$\frac{y' y''}{x' x''} = -\frac{b^2}{a^2}, \quad (1)$$

les deux points  $(x', y')$ ,  $(x'', y'')$  appartenant à l'ellipse, on a les relations

$$(2) \quad y'^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x'^2), \quad (3) \quad y''^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x''^2),$$

en les multipliant entre elles on a

$$y'^2 y''^2 = \frac{b^4}{a^4} (a^2 - x'^2) (a^2 - x''^2);$$

l'équation (1) donne  $y'^2 y''^2 = \frac{b^4}{a^4} x'^2 x''^2$ . Substituant dans l'équation précédente on a

$$\frac{b^4}{a^4} x'^2 x''^2 = \frac{b^4}{a^4} (a^2 - x'^2) (a^2 - x''^2),$$

d'où

$$x'^2 x''^2 = (a^2 - x'^2) (a^2 - x''^2) = a^4 - a^2(x'^2 + x''^2) + x'^2 x''^2.$$

On tire immédiatement de cette relation

$$x'^2 + x''^2 = a^2; \quad (4)$$

en vertu de cette relation les équations (2) et (3) deviennent

$$y'^2 = \frac{b^2}{a^2} x''^2, \quad y''^2 = \frac{b^2}{a^2} x'^2,$$

ajoutant membre à membre ces deux équations, on a

$$y'^2 + y''^2 = \frac{b^2}{a^2} (x'^2 + x''^2) = \frac{b^2}{a^2} \times a^2, \quad \text{ou } y'^2 + y''^2 = b^2. \quad (5)$$

La figure donne immédiatement les relations

$$a'^2 = y'^2 + x'^2, \quad b'^2 = y''^2 + x''^2,$$

d'où l'on tire

$$a'^2 + b'^2 = y'^2 + y''^2 + x'^2 + x''^2,$$

or, les équations (4) et (5) étant ajoutées ensemble donnent

$$a^2 + b^2 = x'^2 + x''^2 + y'^2 + y''^2,$$

donc on a

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2,$$

2. Le parallélogramme construit sur les diamètres conjugués est  $OA', CB'$  (*fig. 67*), en menant  $B'F$  parallèle à  $OA$ , on obtient le parallélogramme  $OB'FT$  équivalent au premier. Ce dernier a pour mesure  $OT \times y''$ . Or,  $OT$  (distance de l'origine au point où la tangente rencontre l'axe des  $x$ ) est égal à  $\frac{a^2}{x'}$ ;  $y''$  d'après les relations précédentes est égal à  $\frac{b}{a}x'$ , donc le parallélogramme

$$OB'FT = \frac{a^2}{x'} \times \frac{b}{a} x' = ab,$$

donc aussi le parallélogramme  $OA'CB'$  construit dans les demi-diamètres conjugués est égal au rectangle  $ab$  construit sur les demi-axes.

3. Pour appliquer cette démonstration à l'hyperbole dont l'équation est  $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ , on considère en même temps l'hyperbole conjuguée dont l'équation est  $a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2$ .

$OA'$  (*fig. 68*) étant un diamètre de la première (qui la rencontre au point  $A'$  dont les coordonnées sont  $x', y'$ ), son conjugué sera  $OB'$  (qui rencontre la deuxième au point  $B'$  dont les coordonnées sont  $x'', y''$ ):  $A'$  étant un point de la première on a

$$(1) \quad y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(x'^2 - a^2),$$

$B'$  étant un point de la deuxième on a

$$(2) \quad y''^2 = \frac{b^2}{a^2}(x''^2 + a^2),$$

d'où en multipliant membre à membre on a

$$(3) \quad y'^2 y''^2 = \frac{b^4}{a^4} (x'^2 - a^2)(x''^2 + a^2),$$

OA', OB' étant des diamètres conjugués on a  $\frac{y' y''}{x' x''} = \frac{b^2}{a^2}$  d'où  $y'^2 y''^2 = \frac{b^4}{a^4} x'^2 x''^2$ , comparant avec (4), on a

$$x'^2 x''^2 = (x'^2 - a^2)(x''^2 + a^2) = x'^2 x''^2 - a^2(x''^2 - x'^2) - a^4,$$

d'où on tire  $x'^2 - x''^2 = a^2$  (5). En vertu de cette équation les équations (1) et (2) deviennent

$$y'^2 = \frac{b^2}{a^2} x''^2; \quad y''^2 = \frac{b^2}{a^2} x'^2,$$

d'où l'on tire  $y'^2 - y''^2 = \frac{b^2}{a^2}(x''^2 - x'^2)$ , ou  $y'^2 - y''^2 = -b^2$  (6);

ajoutant ensemble les équations (5) et (6) on a

$$x'^2 + y'^2 - (x''^2 + y''^2) = a^2 - b^2.$$

La figure donne immédiatement

$$x'^2 + y'^2 = a^2, \quad x''^2 + y''^2 = b^2.$$

en substituant dans l'équation précédente on a

$$a^2 + b^2 = a^2 - b^2.$$

On voit de même que le parallélogramme OA'CB' se transforme dans OTFB' qui a pour mesure OT  $\times$  y''.

$$OT = \frac{a^2}{x'}, \quad y'' = \frac{b}{a} x',$$

donc OTFB', et par suite

$$OA'CB' = \frac{a^2}{x'} \times \frac{b}{a} x' = ab. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

4. On peut abrégér de la manière suivante la démonstration donnée dans l'ouvrage de M. Lefébure de Fourcy (*Géométr. analyt.*, 4<sup>e</sup> édit., p. 262), on a

$$(1) \quad a'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}, \quad (2) \quad b'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \alpha' + b^2 \cos^2 \alpha'},$$

$$(3) \quad \operatorname{tg} \alpha \times \operatorname{tg} \alpha' = -\frac{b^2}{a^2};$$

divisant les deux termes des fractions  $a'^2$  et  $b'^2$  par  $\cos^2 \alpha$  et  $\cos^2 \alpha'$ , et observant que

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad \frac{1}{\cos^2 \alpha'} = \sec^2 \alpha' = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha',$$

on a

$$(4) \quad a'^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}{a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + b^2}, \quad (5) \quad b'^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha')}{a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha' + b^2},$$

l'équation (3) donne  $\operatorname{tg} \alpha' = -\frac{b^2}{a^2 \operatorname{tg} \alpha}$ , substituant dans (4) on

trouve en faisant les réductions  $b'^2 = \frac{a^4 \operatorname{tg}^2 \alpha + b^4}{a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + b^2}$  (6), ajoutant

(4) et (6) on a

$$a'^2 + b'^2 = \frac{a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha (a^2 + b^2) + b^2 (a^2 + b^2)}{a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + b^2} = a^2 + b^2.$$

5. Même démonstration pour l'hyperbole.