

H. COLARD

**Note sur un moyen élémentaire de
résoudre les questions de géométrie
relatives aux intersections successives
de lieux géométriques renfermés tous
dans une même équation ou dans un
même système d'équations**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 1
(1842), p. 281-289

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__281_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1842, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE

Sur un moyen élémentaire de résoudre les questions de géométrie relatives aux intersections successives de lieux géométriques renfermés tous dans une même équation ou dans un même système d'équations.

PAR M. H. COLARD,

Professeur de mathématiques, ancien élève de l'École polytechnique.

1. Soit AB (fig. 55) un lieu géométrique quelconque donné par une équation à deux variables $F(x, y) = 0$. Supposons que, par rapport à un point quelconque $M'(x', y')$ de ce premier lieu, on en considère un nouveau $N'P'$ satisfaisant à des conditions géométriques données, parmi lesquelles, d'ailleurs, se trouve ou non celle de passer par le point en question. Celui-ci, en coordonnées x et y , pourra être représenté par le système des équations

$$\varphi(x, y, x', y') = 0, \quad F(x', y') = 0.$$

Si l'on fait varier x' , ce système produit diverses lignes $N'P'$, $N''P''$, $N'''P'''$, etc., relatives aux divers points M', M'', M''' , etc., de la courbe proposée. Ces lignes, par leurs intersections consécutives, forment un polygone $N'N''N'''$..., et, si l'on vient à supposer que le paramètre x' varie d'une manière continue, le polygone $N'N''N'''$ se change dans la courbe dont on demande l'équation.

Pour fixer les idées, soient α et β les coordonnées du point N' commun aux deux lieux géométriques relatifs aux points M' et M'' de la courbe donnée, on aura, pour déterminer ce point, les équations

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha, \beta, x', y') &= 0, & F(x', y') &= 0, \\ \varphi(\alpha, \beta, x'', y'') &= 0, & F(x'', y'') &= 0. \end{aligned}$$

Si l'on interprète maintenant ces équations par rapport au système

$$\varphi(\alpha, \beta, x, y) = 0, \quad F(x, y) = 0;$$

on y trouve exprimé la double condition, que le lieu $M'QM'$ représenté par $\varphi(\alpha, \beta, x, y) = 0$ passe par les deux points (x', y') , (x'', y'') de la courbe proposée. En sorte que, pour établir la réunion de ces points en un seul, comme cette réunion a lieu en même temps sur deux courbes, il suffit d'exprimer que le lieu géométrique proposé, et la courbe $M'QM''$, que nous pouvons appeler courbe auxiliaire, ont une tangente commune au point x', y' . Or, d'après ce que nous avons établi ailleurs (*) par des considérations purement géométriques, les coefficients angulaires des équations des deux tangentes relatives au même point (x', y') , des deux courbes sont $-\frac{\varphi'_{x'}(\alpha, \beta, x', y')}{\varphi'_{y'}(\alpha, \beta, x', y')}$ et $-\frac{F'_{x'}(x', y')}{F'_{y'}(x', y')}$; donc, on aura entre les coordonnées α et β d'un point du lieu, la nouvelle équation

$$\frac{\varphi'_{x'}(\alpha, \beta, x', y')}{\varphi'_{y'}(\alpha, \beta, x', y')} = \frac{F'_{x'}(x', y')}{F'_{y'}(x', y')}$$

et la question se résoudra par l'élimination des quantités x' et y' entre cette équation et les deux autres $\varphi(\alpha, \beta, x', y') = 0$, $F(x', y') = 0$, ou, plus généralement, entre les équations

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, x', y') = 0, \quad F(x', y') = 0, \\ \frac{\varphi'_{x'}(x, y, x', y')}{\varphi'_{y'}(x, y, x', y')} = \frac{F'_{x'}(x', y')}{F'_{y'}(x', y')} \end{aligned}$$

les coordonnées x, y appartenant alors à un point quelconque du lieu demandé.

Dans les applications, on se rappellera que la troisième équation à joindre aux deux équations du lieu proposé et de la ligne variable, pour éliminer x' et y' , s'obtient en égalant

(*) P. 268.

entre elles les dérivées par rapport à x' des fonctions y' qui entrent implicitement dans ces deux équations; toutes les autres quantités qui s'y trouvent étant considérées comme des constantes. Au point de vue algébrique, voici donc le théorème qui se trouve établi : si deux fonctions de x prennent des valeurs égales pour une même valeur x' attribuée à x , et que cela ait encore lieu pour une autre valeur x'' attribuée à x , les dérivées de ces fonctions seront égales quand on aura $x' = x''$ (*).

2. Lorsque les lignes dont les intersections successives forment le lieu demandé, sont renfermées dans une seule et même équation, contenant par conséquent un paramètre arbitraire, comme $\varphi(x, y, m) = 0$, l'équation de la courbe cherchée est le résultat de l'élimination de m entre les équations

$$\varphi(x, y, m) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'(x, y, m) = 0.$$

En effet, soient m' et m'' deux valeurs particulières à m , et

$$\varphi(x, y, m') = 0, \quad \varphi(x, y, m'') = 0$$

les équations des deux lieux géométriques correspondants. Désignons encore par α et β les coordonnées de leur point de rencontre; il vient

$$\varphi(\alpha, \beta, m') = 0, \quad \varphi(\alpha, \beta, m'') = 0,$$

et par suite

$$\frac{\varphi(\alpha, \beta, m') - \varphi(\alpha, \beta, m'')}{m' - m''} = 0;$$

équation qui, à la limite, c'est-à-dire lorsqu'on pose $m' = m''$, se transforme comme on sait dans celle-ci :

$$\varphi'_{m'}(\alpha, \beta, m') = 0.$$

On a donc entre, les coordonnées α et β d'un point du lieu cherché, les deux équations

$$\varphi(\alpha, \beta, m') = 0, \quad \varphi'_{m'}(\alpha, \beta, m') = 0,$$

(*) Si $\frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''} = \frac{\varphi(x') - \varphi(x'')}{x' - x''}$ en faisant $x' = x''$, on obtient $f'(x') = \varphi'(x')$,

les valeurs infinies sont exceptées.

et l'élimination de m' entre ces deux équations, ou de m entre les suivantes

$$\varphi(x, y, m) = 0, \quad \varphi'_m(x, y, m) = 0,$$

conduira à l'équation du lieu cherché. C. Q. F. D.

Dans ce cas, on voit que l'équation à joindre à celle qui représente la famille des lieux géométriques considérés est l'équation dérivée par rapport à m de celle qui renferme ce paramètre variable (*).

3. La théorie ainsi établie d'une manière élémentaire, nous l'appliquerons successivement à deux grandes questions, celle des développées des courbes planes et celle des contacts d'un ordre quelconque de deux courbes planes.

Supposons qu'il s'agisse d'abord de trouver la *développée* d'une courbe plane, en d'autres termes, le lieu géométrique des intersections successives des normales aux différents points de cette courbe, qui, par rapport à la développée, est dite *développante*. Soit $F(x, y)$ l'équation de la courbe considérée, équation que nous pouvons concevoir sous la forme explicite $y=f(x)$; soient, d'ailleurs x' et y' les coordonnées d'un point particulier de cette courbe, nous aurons pour déterminer la normale en ce point, les équations

$$y - y' = -\frac{1}{f'(x')} (x - x'), \quad F(x', y') = 0.$$

Nous rappellerons que la composition de $f'(x')$, établie plus haut, ne dépend nullement de la connaissance de $f(x)$. Égalons maintenant les deux dérivées des fonctions y' qui entrent dans ces équations, après avoir calculé ces dérivées comme il a été prescrit pour toute fonction implicite, et joignons-la aux équations qui précèdent, nous obtiendrons le système suivant, qui fournira l'équation de la développée, par l'élimination des quantités x' et y' :

(*) Ce cas particulier entre dans le théorème général. Il suffit de remplacer zéro par une fonction arbitraire de x, y, m identiquement nulle. Tm.

$$(y-y')f'(x')+(x-x')=0, \quad F(x',y')=0, \\ \frac{(y-y')f''(x')-1}{f'(x')}=f'(x'),$$

et ce système, si nous substituons à $f'(x')$, son expression générale $-\frac{F'_{x'}(x',y')}{F''(x',y')}$, que nous désignerons, pour plus de simplicité, par $-\frac{F'_{x'}}{F''_{y'}}$, pourra lui-même être remplacé par cet autre

$$(y-y')F'_{x'}-(x-x')F'_{y'}=0, \quad F(x',y')=0, \\ (y-y')F'_{y'}F''_{x'}+(x-x')F'_{x'}F''_{y'}-2(y-y')F'_{x'}F''_{x',y'}+F'^2_{x'}+F'^2_{y'}=0,$$

$F''_{x',y'}$ désignant la dérivée de $F'_{x'}$ par rapport à y' , ou de $F'_{y'}$ par rapport à x' . (*)

4. Application à l'ellipse.

$$F(x',y')=a^2y'^2+b^2x'^2-a^2b^2, \quad F'_{x'}=2b^2x', \quad F'_{y'}=2a^2y', \\ F''_{x'}=2b^2, \quad F''_{y'}=2a^2, \quad F''_{x',y'}=0.$$

Le système des équations précédentes devient

$$b^2x'(y-y')-a^2y'(x-x')=0, \quad a^2y'^2+b^2x'^2-a^2b^2=0, \\ a^2b^2y'(y-y')+a^2b^2x'(x-x')+a^4y'^2+b^4x'^2=0.$$

En écrivant la première et la troisième ainsi qu'il suit :

$$(b^2y'+c^2y')x-a^2xy'=0, \quad (b^2y'+c^2y')a^2y'-(c^2x'-a^2x)b^2x'=0;$$

éliminant ensuite par réduction la quantité $b^2y'+c^2y'$; puis

enfin, remplaçant y'^2 par sa valeur en fonction de x' , on rend

plus prompte l'élimination de y' , et l'on obtient, réductions

faites $a^4x-c^2x'^3=0$, c désignant la demi-excentricité.

Or, la symétrie permet d'écrire sur-le-champ, comme résultat

de l'élimination de x' , l'équation

$$b^4y-c^2y'^3=0;$$

voici donc deux équations très-simples, pour remplacer la

(*) La dérivée de $F'_{x'}$ est $F''_{x'}-F''_{x'y'}\frac{F'_{x'}}{F''_{y'}}$, celle de $F'_{y'}$ est $F''_{y'}-F''_{y'x'}\frac{F'_{x'}}{F''_{y'}}$.

première et la troisième du système ci-dessus. On en déduit immédiatement, pour équation de la développée de l'ellipse :

$$a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}, \quad (*)$$

équation qu'il ne s'agit pas ici de discuter.

Application à l'hyperbole.

En changeant simplement b^2 en $-b^2$, on obtient

$$a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}},$$

c désignant encore la demi-excentricité.

Application à la parabole.

$$F(x', y') = y'^2 - 2px', \quad F'_{x'} = -2p, \quad F'_{y'} = 2y', \quad F''_{x'} = 0.$$

$$F''_{y'} = 2, \quad F''_{x'y'} = 0.$$

Le système en question devient donc

$$\begin{aligned} p(y - y') + y'(x - x') &= 0, & y'^2 - 2px' &= 0, \\ p(x - x') - p^2 - y'^2 &= 0. \end{aligned}$$

Partant, l'on obtient pour équation de la développée,

$$y^2 = \frac{8}{27p} (x - p)^3.$$

On sait que cette équation est aussi celle du lieu des points d'où l'on peut mener deux normales à la parabole, lieu qui sépare la région des points d'où l'on peut mener trois normales à cette courbe, de celle des points d'où l'on n'en peut mener qu'une.

5. Théorie des contacts des divers ordres.

On sait que deux courbes sont dites avoir un contact de l'ordre n , lorsqu'elles ont $n + 1$ points communs réunis en un seul, ou n éléments consécutifs communs.

(*) Lieu géométrique des points d'où l'on peut mener trois normales à la conique; par des points à l'intérieur on peut mener quatre, et à l'extérieur deux normales; de même pour l'hyperbole. Toutes les courbes données par l'équation $a^m x^m + b^m y^m = c^{2m}$ jouissent de propriétés communes que M. Lame a développées dans un admirable ouvrage publié en 1818. Tm.

Il est facile, d'après ce qui précède, d'établir les conditions analytiques de cet ordre de contact; mais commençons par le contact du deuxième ordre, celui du premier ordre étant déjà connu.

Soient M' , M'' , M''' trois points communs à deux courbes A et B, dont les équations sont généralement $F(x, y) = 0$ et $\varphi(x, y) = 0$, que nous pouvons concevoir sous les formes explicites $y = f(x)$ et $y = \varphi(x)$. (Nous nous dispenserons de tracer une figure, il est facile de se la représenter). Si nous désignons par x' et y' , x'' et y'' , x''' et y''' , les coordonnées de ces trois points, nous avons les trois équations de condition :

$$(1) \quad \begin{cases} F(x', y') = 0, & \varphi(x', y') = 0, \\ \text{ou } f(x') = \varphi(x'), \end{cases}$$

$$(2) \quad f(x'') = \varphi(x''),$$

$$(3) \quad f(x''') = \varphi(x''');$$

dans lesquelles il faut exprimer que les quantités, d'abord distinctes, x' , x'' , x''' , viennent se confondre dans la seule quantité x' , par exemple.

Le théorème énoncé n° 1 (p. 283), appliqué au système des équations (1) et (2), où l'on voit deux fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$, qui sont égales pour une même valeur x' , puis pour une autre valeur x'' , que l'on considère ensuite comme devenant égale à x' , nous permet de remplacer l'équation (2) par celle qu'on obtient en égalant les deux premières dérivées de ces fonctions, savoir $f'(x')$, $\varphi'(x')$. Pareillement l'équation (3), par rapport à l'équation (2), peut se remplacer par l'équation $f''(x'') = \varphi''(x'')$; en sorte que nous avons déjà le système suivant, pour remplacer les trois équations primitives :

$$f(x') = \varphi(x'),$$

$$f'(x') = \varphi'(x'),$$

$$f''(x'') = \varphi''(x'').$$

En appliquant encore le théorème dont il s'agit aux deux dernières équations, dans lesquelles on trouve deux fonctions $f'(x')$ et $\varphi'(x')$, qui satisfont aux conditions de ce théorème, nous obtenons enfin les équations :

$$\begin{aligned} f(x') &= \varphi(x'), & f &= \varphi, \\ f'(x') &= \varphi'(x'), & \text{ou simplement } f' &= \varphi', \\ f''(x') &= \varphi''(x'), & f'' &= \varphi'', \end{aligned}$$

qui présentent les trois conditions connues d'un contact du deuxième ordre, savoir l'égalité des fonctions au point que l'on considère, l'égalité de leurs premières dérivées et l'égalité de leurs secondes dérivées.

Passons au contact du troisième ordre.

Soient M' , M'' , M''' , M^{1v} , les quatre points communs aux deux courbes A et B, et x' et y' , x'' et y'' , x''' et y''' , etc. ; les coordonnées respectives de ces points. Les équations primitives sont

$$\begin{aligned} (1) \quad & f(x') = \varphi(x'), \\ (2) \quad & f(x'') = \varphi(x''), \\ (3) \quad & f(x''') = \varphi(x'''), \\ (4) \quad & f(x^{1v}) = \varphi(x^{1v}). \end{aligned}$$

En vertu du théorème du n° 1, nous les remplaçons successivement par les systèmes que voici :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x') = \varphi(x'), \\ f'(x') = \varphi'(x'), \\ f''(x'') = \varphi''(x''), \\ f''(x''') = \varphi''(x''') \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x') = \varphi(x'), \\ f'(x') = \varphi'(x'), \\ f''(x') = \varphi''(x'), \\ f''(x'') = \varphi''(x'') \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x') = \varphi(x'), \\ f'(x') = \varphi'(x'), \\ f''(x') = \varphi''(x'), \\ f'''(x') = \varphi'''(x') \end{array} \right\},$$

ou simplement

$$f = \varphi, \quad f' = \varphi', \quad f'' = \varphi'', \quad f''' = \varphi''''.$$

Maintenant, sans qu'il soit besoin d'effectuer de semblables transformations de systèmes, on peut s'élever aux conditions du contact d'un ordre n en général. L'analogie permet d'écrire ces conditions ainsi qu'il suit :

$$f = \varphi, f' = \varphi', f'' = \varphi'', f''' = \varphi''', \dots f^{(n)} = \varphi^{(n)}.$$

Au reste, si l'on voulait donner à cette conséquence toute la rigueur possible, on pourrait démontrer facilement, à la manière en usage dans le binôme de Newton, la généralité de la loi qui s'établit d'elle-même pour les contacts des deuxième et troisième ordres.

En revenant sur le sens géométrique de la question, si l'on interprète particulièrement chacun des systèmes consécutifs, on reconnaît que la question est complètement résolue, et l'on voit en outre en quoi chaque système contribue à la résoudre. Ainsi, dans le cas du contact du troisième ordre, par exemple, le premier système indique seulement l'existence de quatre points communs aux deux courbes A et B. Le deuxième témoigne que chacun des points, à partir du quatrième, est venu se réunir au précédent, en sorte que les deux courbes n'ont plus que trois points communs distincts; mais aussi trois tangentes communes en ces points. Le troisième système indique que chacun de ces trois points s'est réuni au précédent, en sorte que les deux courbes n'ont plus que deux points communs distincts, mais aussi deux tangentes communes, dont l'une est la réunion de deux éléments. Enfin, le dernier système montre que les deux courbes ont un point commun et trois éléments consécutifs communs en ce point; ce qui est le caractère propre du contact du troisième ordre.

Ce serait ici le lieu de parler du cercle osculateur et de ses propriétés. Mais nous n'avons eu pour but que de faire voir comment on peut rendre tout à fait élémentaire la résolution des deux genres de questions que nous avons traitées dans cette note.