Nouvelles annales de mathématiques

H. Colard

Note sur la détermination des tangentes aux courbes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 268-272

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__268_1>

NOTE

SUR

LA DÉTERMINATION DES TANGENTES AUX COURBES,

PAR M. H. COLARD,

Professeur de mathématiques, ancien élève de l'École polytechnique.

Il ne sera peut-être pas sans intérêt de présenter, sous un point de vue géométrique, la détermination de la tangente à une courbe dont l'équation renferme implicitement la fonction et la variable indépendante.

1. On sait que, lorsque la fonction est sous forme finie explicite, c'est-à-dire lorsque l'équation de la courbe est résolue

(*) Cette courbe peut servir à mener par un point pris sur une hyperbole équilatère, une normale à l'autre branche. Tm.

par rapport à cette fonction, comme $y=f(x)$, c'est la définition même de la tangente à une courbe qui fournit immédiatement son équation. Ainsi, de la considération d'un petit triangle, dont un des côtés est la sécante, dans une de ses positions particulières autour du point de contact (x', y'), et dont les autres côtés sont les accroissements que prennent l'abscisse et l'ordonnée ou la variable et la fonction, quand on passe de ce point à un second point voisin situé sur la courbe, on tire sur-le-champ : $y-y'=\frac{f(x'+h)-f(x')}{h}(x-x')$, pour l'équation de la sécante ; et l'on en conclut à la limite, c'est-à-dire pour l'équation de la tangente au point x', y' :

$$y-y'=f'(x')(x-x').$$

2. Ceci rappelé, supposons la fonction implicite. Soit donc $F(x,y)=0$ l'équation de la courbe ; équation telle que la fonction s'y trouve liée à la variable indépendante, sans qu'on veuille lui donner une forme finie, comme cela pourrait se faire pour les équations des quatre premiers degrés, ou sans qu'on puisse lui donner cette forme, comme on l'a démontré pour l'équation complète du cinquième degré et des degrés supérieurs.

Prenons des axes quelconques, ox, oy (*fig.* 54), et figurons par MAN le lieu géométrique de l'équation $F(x,y)=0$ par rapport à ces axes, au moins dans le voisinage du point M, (x', y'), que nous choisissons pour point de contact. Dans le premier membre de l'équation $F(x, y)=0$, regardons y comme ayant une valeur constante et égale à l'ordonnée y' du point de contact, et représentons la fonction $F(x, y')$, variable par rapport à x seulement, par l'ordonnée Y d'une courbe dont x serait l'abscisse. L'équation $Y=F(x, y')$ sera celle d'un lieu géométrique tel que M'A'N' passant par le pied de l'ordonnée y' : ce qu'il est facile de reconnaître dans l'équation $Y=F(x, y')$ qui donne $Y=0$ pour $x=x'$. Si, au contraire, dans le premier membre de l'équation F $(x, y)=0$, l'on regarde x comme ayant une valeur déterminée et égale à x', abscisse du point de contact, et qu'on représente par X la fonction F (x', y), variable par ce rapport à y seulement, l'équation $X=F(x', y)$ appartiendra à un certain lieu géométrique M″ A″ N″ passant par le pied M″ de l'abscisse x' comptée parallèlement à l'axe des x; car X s'annule pour $y=y'$ (*).

Cela posé, le point M de la courbe MAN ayant déterminé le système des deux courbes M′A′N′, M″A″N″, partant leurs tangentes en M′, M″; et, réciproquement, le système des deux courbes M′A′N′, M″A″N″, et par suite celui de leurs tangentes en M′, M′ déterminant le point M de la courbe MAN et la tangente en ce point, il est clair qu'il existe une relation unique entre les fonctions qui déterminent les inclinaisons des tangentes aux trois courbes en ces points. C'est cette relation que nous allons établir.

Considérons à cet effet les trois sécantes correspondantes MN, M′N′, M″N″ dont les positions limites sont simultanément les trois tangentes aux trois courbes, aux points M, M′, M″, et composons les triangles MNP, M′N′P′, M″N″P″ dont l'usage a été indiqué n° 1. Nous aurons évidemment :

$$\frac{NP}{MP}=\frac{M''P''}{M'P'}=\frac{\left(\dfrac{N'P'}{M'P'}\right)}{\left(\dfrac{N''P''}{M''P''}\right)}\cdot\frac{N''P''}{N'P'}$$

Observons que les quantités N″P″ et N′P′ diminuent ensemble à mesure que le point N se rapproche du point M, mais de telle façon que leur rapport tend vers l'unité. Si l'on considère en effet les deux fonctions $F(x, b)$, $F(a, y)$, a et b désignant deux quantités numériques quelconques mises à la place d'x et d'y dans la fonction $F(x, y)$, on reconnaît que

(*) La lettre A″ est omise dans la figure le rapport $\frac{F(a,y)}{F(x,b)}$ converge vers l'unité, quand x converge vers a et y vers b, et qu'enfin ce rapport est 1 quand on pose $x=a, y=b$. Ce résultat, qui est une conséquence même de la forme des deux fonctions, ayant lieu quelles que soient les quantités a, b, aura lieu encore quand on fera $a=x'$, $b=y'$, double hypothèse par laquelle le rapport en question se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, lorsque les variables des deux fonctions deviennent en même temps x' et y'.

Si nous établissons maintenant du même coup la triple réunion des points N, N', N'', aux points M, M', M'' respectivement, et que, conformément à ce qu'on a vu n° 1, nous désignions par $f'(x')$ le rapport cherché $\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{MP}}$ (la fonction y étant conçue sous la forme explicite $y=f(x)$) par $-F'_{x'}(x', y')$, $F'_{y'}(x', y')$ les rapports analogues $\frac{\mathrm{N'P'}}{\mathrm{M'P'}}$, $\frac{\mathrm{N''P''}}{\mathrm{M''P''}}$, nous obtiendrons la relation suivante :

$$f'(x') = -\frac{F'_{x'}(x', y')}{F'_{y'}(x', y')}.$$

Il reste encore à présenter une observation essentielle. Le signe —, qui affecte le second membre de cette équation, provient uniquement de ce que, dans notre tracé des courbes M'A'N', M''A''N'', nous les avons fait s'étendre, celle-ci dans l'angle supérieur, à droite des coordonnées ; celle-là dans l'angle inférieur, à droite, pour les valeurs d'y et d'x croissantes à partir d'y' et d'x'. Mais rien de formel n'ayant été dit à cet égard, il s'ensuit que l'égalité ci-dessus n'est rigoureusement démontrée qu'au signe près du second nombre, et qu'il faut justifier l'explication du signe —. C'est le cas particulier où l'équation $F(x, y)=0$ a la forme implicite $y-f(x)=0$, qui va décider la question ; il suffira pour cela de lui appliquer la règle qui résulte de ce qu'on sait de vrai sur l'égalité ci-dessus.

Or, on a dans ce cas :

$$F'_{x'}(x', y') = -f'(x') \quad \text{et} \quad F'_{y'}(x', y') = 1,$$

ce qui donne évidemment :

$$f'(x') = -\frac{F'_{x'}(x', y')}{F'_{y'}(x', y')} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

On pourrait d'ailleurs concevoir, *à priori*, que, si la dérivée $f'(x)$ était positive, par exemple, les deux dérivées $F'_{x'}(x', y')$, $F'_{y'}(x', y')$ devaient être de signes contraires; ce qui signifie en d'autres termes, que si x et y allaient en croissant à partir d'x' et d'y', les fonctions $F(x, y')$, $F(x', y)$ devaient aller l'une en croissant, l'autre en décroissant à partir d'x' et d'y', c'est-à-dire, dans ce cas, être de signes contraires, puisque $F(x', y')$ est nul.

En effet, si l'on a en même temps : $F(x', y')=0$ et $F(x'+h, y')<0$, l'équation de condition $F(x'+h, y'+k)=0$ relative à tout point voisin du point (x', y'), indique qu'on doit avoir $F(x', y'+k)>0$; h étant, comme on le voit, un accroissement qui fait diminuer $F(x', y')$, et k, un accroissement qui fait augmenter $F(x'+h, y')$ et par suite $F(x', y')$.