NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉDOUAR MERLIEUX

Solution du problème 5

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 240-243

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__240_1>

SOLUTION DU PROBLÈME 5 (p. 123).

PAR M. MERLIEUX (ÉDOUARD).

Quel est le plus court chemin d'un point à un autre, en passant par deux droites situées dans l'espace.

SOLUTION.

Soient A et B les deux points et D et D′, les deux droites données. Nous avons vu (p. 143), comment on détermine le plus court chemin d'un point à un autre, en passant par une droite donnée; si donc nous cherchons les plus courts chemins du point A aux points successifs de D′ en passant par D, nous obtiendrons une surface ayant pour directrices les deux droites et la circonférence décrite, en prenant pour rayon la perpendiculaire abaissée de A sur D; nous trouverons de même la surface contenant les plus courts chemins du point B, aux différents points de D en passant par D′; les intersections de ces deux surfaces seront les plus courts chemins demandés.

Cherchons l'équation d'une de ces surfaces.

Déterminons le plan des xy tel que l'axe des z, perpendiculaire à ce plan, soit l'une des droites données, D par exemple, et tel aussi, d et d' étant les projections de D′ sur les plans des xy et des yz, que d soit perpendiculaire à l'axe des x; nous aurons dans le premier plan $x=a$, a étant la distance de l'origine à d, et dans le second $z=my$; ce sont là les équations de D′. De même, on aura pour les équations de la droite génératrice M, $x=pz+q$, $y=p'z+q'$; p, p', q, q', étant des coefficients qu'il faut déterminer; appelant n la hauteur (au-dessus du plan des xy), du cercle perpendiculaire à D, nous aurons $z=n$, et, cherchant la projection sur le plan des xy, $x^2+y^2=r^2$; ce sont là les équations du cercle, son rayon étant r.

Cela posé, nous devons trouver dans l'équation de M la même valeur de z, soit que nous fassions $x=0$, ou $y=0$; la première est $z=-\frac{q}{p}$; la seconde $z=-\frac{q'}{p'}$, donc $\frac{p}{q}=\frac{p'}{q'}$.

De $x=a$, $x=pz+q$, nous tirons $pz=a-q$, $z=\frac{a-q}{p}$.

De $z=my$, $y=p'z+q'$, nous tirons $z(1-mp')=mq'$, $z=\frac{mq'}{1-mp'}$ donc

$$\frac{a-q}{p}=\frac{mq'}{1-mp'}.$$

Nous avons

$$r^2=x^2+y^2,\quad x=pz+q,\quad y=p'z+q',\quad z=n,$$

d'où

$$r^2=(pn+q)^2+(p'n+q')^2.$$

Nous avons donc cinq équations, savoir :

$$x=pz+q, \qquad (1)$$

$$y=p'z+q', \qquad (2)$$

$$\frac{p}{q}=\frac{p'}{q'}, \qquad (3)$$

$$\frac{a-q}{p}=\frac{mq'}{1-mp'}, \qquad (4)$$

$$r^2=(pn+q)^2+(p'n+q')^2. \qquad (5)$$

Des quatre premières, nous tirons

$$p=\frac{x(x-a)}{zx-amy},$$

$$p'=\frac{y(x-a)}{zx-amy},$$

$$q=\frac{ax(z-my)}{zx-amy},$$

$$q'=\frac{ay(z-my)}{zx-amy},$$

et substituant ces valeurs dans la cinquième, nous trouvons l'équation cherchée du 4ième degré

$$r^2=(x^2+y^2)\left[\frac{n(x-a)+a(z-my)}{zx-amy}\right]^2.$$

Comme il n'y a pas de quantité toute connue, cette surface passe par l'origine.

$a=0$. Les deux droites sont convergentes; on a alors $r^2z^2=n^2(x^2+y^2)$; c'est un cône droit; et $x=0$; c'est le plan des yz qui résout la question.

$n=0$, $r=0$. Le cercle est réduit à son centre qui est à l'origine, et l'équation devient $a^2(x^2+y^2)(z-my)^2=0$, qui se décompose en $x^2+y^2=0$, qui représente l'origine et $z=my$, la projection de D sur le plan des yz.

$r=0$. Il vient: $(x^2+y^2)(az-amy+nx-an)^2=0$, c'est-à-dire $x^2+y^2=0$, encore l'origine, et un plan dont l'équation est $az-amy+nx-an=0$.