NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Analyse d'ouvrages

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 204-213

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__204_0>

ANALYSE D'OUVRAGES.

Complément de géométrie analytique, par C.-E Page, professeur à l'École royale d'artillerie de La Fère. Paris, 1841, in-8° de 180 pages, 4 planches (*).

Les anciens attachaient à la droite et au cercle des idées particulières de beauté et de perfection ; en conséquence de cette disposition superstitieuse, ils ont désigné ces deux lignes sous le nom par excellence de *lignes géométriques ;* nom qu'elles ont conservé dans les mathématiques modernes, science où il règne encore, comme nous aurons souvent lieu de le remarquer, beaucoup de superstitions. Les propriétés principales de ces deux lignes, celles des aires et volumes les plus simples, qu'elles sont susceptibles d'engendrer, remplissent les 15 livres et les données (*data*) d'Euclide, ainsi que les 8 livres de Legendre. On n'y rencontre que la proportion dite aussi *géométrique,* qui, lorsqu'elle devient continue, donne lieu à la moyenne géométrique et à la section bizarrement désignée par moyenne et extrême raison. Presque toutes les propositions relatives à cette espèce de proportion sont fondées sur ce qu'elle se projette cylindriquement sur un plan sans s'altérer, tandis qu'elle s'altère, généralement parlant, dans les projections coniques (**).

C'est dans l'école de Platon, livrée à des recherches d'en-

(*) Chez Carilian-Gœury et V^{or} Dalmont, éditeurs, quai des Augustins, n^{os} 39 et 41, à Paris.

(**) La projection cylindrique s'opère par un système de droites parallèles, et la projection conique par un système de droites convergentes vers un même point fixe.

tités métaphysiques, que, par une exception assez inattendue, on s'est occupé d'autres lignes que la droite et le cercle, et principalement de celles que donne l'intersection du cône et du plan ; mais les propriétés de ces lignes exigent qu'on fasse attention à une autre sorte de proportions et de sections de la droite, dites *harmoniques*, et qui se projettent, sans s'altérer, cylindriquement et coniquement ; on rencontre ces sections, pour ainsi dire, à chaque pas. Aussi, les géomètres s'en sont-ils beaucoup enquis jusqu'au dix-huitième siècle ; alors ces propriétés ont disparu des traités didactiques, et elles n'appartenaient plus qu'à l'histoire et à la science, lorsque le célèbre Carnot publia, en 1803, sa géométrie de position, qu'il avait fait précéder de considérations sur les corrélations des figures. La théorie des transversales de ce géomètre, en 1806, et les travaux graphiques de l'École polytechnique ont ramené l'attention sur les proportions et les progressions harmoniques, sur les involutions de Desargues, sur les pôles et polaires : c'est, grâces à cette nouvelle impulsion, que la géométrie doit les immenses progrès qu'elle a faits dans ces derniers temps, comme s'exprime M. Liouville (*).

La géométrie des coniques, lignes et surfaces a fait, depuis un demi-siècle, d'immenses progrès ; mais les livres classiques qui en traitent sont restés stationnaires, et sont au même point, et peut-être même en deçà, où nous ont laissés Rivard, Marie, Lacaille, ét certainement très-arriérés sur Sauri et Mauduit. On dirait, à en juger par certains ouvrages, que Descartes a introduit l'analyse dans la géométrie, non pour l'enrichir, mais pour l'appauvrir. Heureusement que, dans la capitale du moins, beaucoup de professeurs suppléent par l'enseignement à la maigreur du programme officiel ; mais il était à désirer qu'on pût mettre entre les mains des élèves un

(*) Journal des mathematiques, t. VI, p. 346. 1841.

ouvrage peu volumineux et renfermant les principales propositions de la géométrie des transversales.

M. Page, auteur du livre que nous allons analyser, remplit parfaitement cette condition. Si nous disions que ce livre est utile, nous ne serions justes qu'à demi ; car ce livre est indispensable à tous ceux qui tiennent à se mettre à la hauteur de l'état actuel de l'enseignement dans beaucoup de colléges de Paris.

L'introduction (1-29) est entièrement consacrée à la théorie analytique des fonctions et de leurs dérivées, et des discussions qu'elles présentent lorsque ces fonctions admettent des facteurs rationnels, irrationnels, égaux ou inégaux, finis ou infinis, réels ou imaginaires. L'auteur donne la théorie des limites. Mais Lagrange a déjà fait observer que la sous-tangente n'est pas la limite des sous-sécantes. Aussi l'auteur donne une démonstration ingénieuse, qui n'est pourtant pas à l'abri d'une objection, de l'existence de la fonction prime ; démonstration qui rentre dans celle d'Ampère. Au fond tout revient à démontrer que le plan des xy coupe la surface représentée par l'équation $f(x+z)-fx=zy$.

Après l'établissement des théorèmes de Taylor et de Maclaurin, viennent les interprétations de certaines valeurs particulières des dérivées, les valeurs *maxima*, *minima*, etc. On aurait désiré que l'auteur indiquât le beau théorème de Lagrange, modifié par M. Cauchy, pour évaluer le reste de la série de Taylor. Cette évaluation peut seule légitimer l'emploi de la série.

L'ouvrage est divisé en 5 livres.

Le premier livre (31 à 44) est consacré à des généralités sur l'algèbre, l'homogénéité et sur la manière de déterminer la position d'un point.

« On peut définir l'algèbre, en disant qu'elle consiste simplement à intervertir l'ordre des opérations. » — Je ne comprends pas cette définition, malgré l'explication qui la suit. Le rapport *enharmonique* a été introduit par Chasles (*). Il exprime, une droite étant divisée en trois segments, le quotient du produit des segments extrêmes divisé par le produit du segment moyen et de la ligne entière. Cette définition, donnée par M. Page, est plus précise que celle de M. Chasles. Lorsque ce quotient est l'unité, le rapport est *harmonique*; et lorsque le produit de deux rapports enharmoniques est égal à l'unité, ces rapports sonts dits *inverses*. Parmi les quatre points que fournit la division d'une droite en trois segments harmoniques, le premier et le troisième, sont dits *conjugués*, ainsi que le deuxième et le quatrième.

L'*involution* qu'on doit à Desargues consiste en ceci : Soient six points situés en ligne droite et désignés par les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6; regardons 1 et 4, 2 et 5, 3 et 6, comme des points réciproquement conjugués; si quatre quelconques de ces points fournissent un quotient enharmonique égal ou inverse à leurs conjugués, les points sont dits être en involution; il existe alors un septième point nommé centre d'involution sur la droite, tel que le produit de ses distances à deux points conjugués est constant, et réciproquement, lorsqu'un tel septième point existe, les six autres sont en involution. On voit comment les coordonnées d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes, peuvent servir à mettre des points en involution.

Le livre 2 (48 à 61) est consacré à la théorie des transversales, des pôles et polaires des droites (**); de la propriété des transversales l'auteur déduit directement, et d'une manière simple, ces théorèmes qu'il suffit d'énoncer.

1er. Si deux triangles ont leurs sommets situés trois droites

(*) Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en geométrie, in-4. 1837.

(**) Le mot pôle pris dans ce sens a cte introduit par M. Servois. Journal de Gergonne, t. I, p. 337. 1809.)

concourant en un point, les trois points de rencontre des côtés opposés sont en ligne droite (p. 53).

2^{me}. Dans tout hexagone inscrit à deux droites, les trois points de rencontre des côtés opposés sont en ligne droite (cas particulier de l'hexagramme de Pascal, et déjà énoncé dans la collection de Pappus). Après avoir expliqué ce qu'on entend par *faisceaux* enharmoniques et harmoniques, l'auteur passe au quadrilatère complet et démontre facilement que les milieux des trois diagonales sont en ligne droite; et si l'on coupe par une transversale les quatre côtés et les deux diagonales d'un quadrilatère simple, les six points d'intersection sont en involution (cas particulier du théorème général de Desargues).

Le troisième livre (65 à 79) traite des lieux géométriques et des courbes engendrées par la variation d'un des coefficients de l'équation de la droite; l'auteur déduit de là le théorème connu de Carnot, relatif aux segments formés sur les côtés d'un triangle par une circonférence qui les traverse, et ensuite ce théorème de Desargues; les quatre côtés d'un quadrilatère inscriptible et la circonférence circonscrite sont coupés par une transversale quelconque en six points en involution.

La théorie des courbes commence au livre quatrième (80 à 117). On y trouve les théorèmes de Newton et de Carnot sur les segments. Les recherches sur les centres, tangentes, normales, points singuliers, d'inflexions, points multiples, branches infinies, asymptotes, sont exposées avec clarté et concision (84 à 115).

Il y a cinq exemples de discussion de courbes du troisième et quatrième degré; on explique la génération des courbes enveloppes d'une droite. On donne pour exemple la courbe engendrée par une droite de longueur constante, dont les extrémités sont constamment sur les côtés d'un angle droit; la courbe est du sixième degré, non du huitième, et aurait dû être discutée.

Le cinquième livre, en 59 pages, nous procure un traité complet des lignes du second ordre, infiniment plus complet que ce qu'on nous raconte là-dessus dans des ouvrages dix fois plus volumineux. Cet avantage est le résultat des théories générales développées dans les livres précédents. Outre les propriétés vulgaires concernant la classification, les diamètres conjugués, les axes principaux, les foyers, on lit (p.128), tout ce qui concerne les pôles et polaires, exposé par une analyse courte et facile. Ayant établi la génération des coniques, au moyen de deux droites mobiles pivotant autour de points fixes, théorème qu'on doit au pasteur Braikenridge, l'auteur démontre facilement le théorème de Desargues, rapporté ci-dessus, mais généralisé, et le célèbre hexagramme de Pascal, si fécond et si propre à résoudre tant de problèmes, rien qu'avec la règle seulement, sans compas. De là, l'auteur passe aux coniques considérées comme enveloppes d'une droite et démontre la belle théorie de M. Brianchon sur les polaires réciproques (*) et l'hexagramme circonscrit du même géomètre, formant le pendant de l'hexagramme inscrit de Pascal. L'ouvrage est terminé par six problèmes pour construire les coniques, au moyen de cinq données consistant en tangentes ou en points.

En finissant l'examen de cet excellent écrit, nous nous permettrons quelques observations critiques. Le titre n'est pas exact ; ce n'est pas un *complément*; il faudrait y ajouter peu pour en faire un traité élémentaire complet de géométrie analytique à deux dimensions; toutefois, quelques propositions essentielles manquent; entre autres, ce beau théorème qu'on doit à M. Poncelet : Deux coniques étant dans le même plan, si on mène une tangente à la première, qu'on en cherche le pôle par rapport à la seconde; le lieu

(*) Journal de l'École polytechnique, cahier X, p. 14. 1810.

de ce pôle est une troisième conique, et *vice versâ*. Peut-être aussi l'auteur n'a-t-il pas toujours tiré assez parti de la méthode analytique. Toutes les propriétés de l'espace doivent se déduire de la théorie des équations, de l'élimination et du changement de coordonnées. Il n'est pas une proposition de cette théorie qui ne puisse se traduire en propriété graphique. C'est ainsi que la géométrie sert à éclaircir l'analyse, et celle-ci à enrichir la géométrie, et c'est le véritable esprit de la méthode qu'on doit au génie sublime d'un Français, le plus grand philosophe du dix-septième siècle. Pour millième exemple, nous citerons le beau mémoire de M. Liouville sur l'élimination (*), si riche en investigations géométriques, et dont nous nous proposons d'entretenir nos lecteurs prochainement. TM.

—

THÉORIE DES PARALLÈLES, *par* F. Durand de Monestral, *ingénieur géomètre*. Paris, 1838. In-8°, 28 pages, sans planches, imprimé à Draguignan.

Le onzième axiome du premier livre d'Euclide est ainsi littéralement énoncé :

Deux lignes droites étant coupées par une troisième, de telle sorte que les deux angles intérieurs d'un même côté soient ensemble plus petits que deux angles droits, se rencontrent, suffisamment prolongées, du même côté. Les modernes ont cessé de regarder cette proposition comme un axiome, et ont essayé, mais toujours vainement, d'en donner une démonstration. Ces essais peuvent se ranger sous trois catégories :

1° *Diminution de la distance*. Lorsque la somme des angles intérieurs est moindre que deux angles droits, on démontre

(*) Journal de mathématiques, t. VI, p. 345. 1841 facilement que les perpendiculaires abaissées sur une de ces droites, de points situés sur l'autre, vont en diminuant en s'approchant du point de rencontre ; ces perpendiculaires peuvent-elles devenir plus petites qu'aucune longueur donnée ? Voilà ce qu'il faudrait, et qu'on n'a pas encore su démontrer.

2° *Somme constante des angles d'un triangle.* La théorie des parallèles admise, on démontre facilement que la somme des angles d'un triangle est constamment égale à deux angles droits, et *vice versâ*, si cette proposition était démontrée, on en déduirait aisément toute la théorie des parallèles. On est parvenu à prouver que s'il existe un seul triangle qui ait la somme de ses angles égale à deux angles droits, il en serait de même dans tout autre triangle (*) ; mais on n'est pas encore parvenu à prouver la possibilité d'un tel triangle.

3° *Aires infinies.* M. Bertrand de Genève est le premier, je crois, qui ait fait usage de cette sorte de considérations que Legendre n'a pas désapprouvées, et la brochure de M. de Monestral appartient à cette catégorie et à la précédente. Les principales propositions appartenant à ce genre de démonstration se réduisent aux suivantes :

1° L'aire du plan est infinie ; car, quelle que soit l'aire d'une figure fermée tracée sur ce plan, on peut en concevoir une seconde qui lui soit égale et tracée sur ce même plan ; ainsi, l'aire du plan est plus grande qu'aucune aire finie ; donc, etc. ;

2° L'aire d'un angle droit est infinie ; car, si cette aire était une étendue finie, quatre fois cette aire serait aussi une étendue finie ; mais quatre fois l'angle droit renferme le plan entier ; donc, etc. ;

3° L'aire d'un angle quelconque est infinie ; il suffit de le démontrer pour un angle aigu.

(*) Manuel de géométrie, 2e édition.

Si l'angle droit, divisé par l'angle, donne un quotient commensurable, la proposition se démontre par le même raisonnement que la précédente; si le quotient est incommensurable, on a recours au principe des limites. L'auteur n'énonce pas explicitement ces propositions, mais il faut les supposer. Ceci posé, il démontre ainsi la proposition XIX du premier livre de Legendre : savoir que la somme des trois angles est égale à deux angles droits.

Soit le triangle ABC ; prolongeons BC vers G, CB vers D, AB vers E, et AC vers F : l'angle ABC est égal à son opposé au sommet DBE; il en est de même des angles BCA, GCF ; ainsi l'on a

$$\text{angle ABC} + \text{angle ACB} + \text{angle BAC} = \text{angle DBE} + \text{angle GCF} + \text{angle EAF};$$

mais ces angles sont proportionnels aux aires infinies qu'ils renferment; on peut donc remplacer ces angles par ces aires; mais l'aire infinie DAF est égale à l'aire fermée du triangle BAC, plus l'aire infinie ouverte EBCF; négligeant le fini par rapport à l'infini, l'équation devient, entre les aires

$$\text{ABC}+\text{ACB}+\text{BAC} = \text{DBE}+\text{GCF}+\text{EBCF}.$$

Le second membre renferme même aire que deux angles droits; donc,

$$\text{ABC}+\text{ACB}+\text{BAC} = 2^q.$$

Passant des aires aux angles, on en déduit, etc.

L'auteur, sans doute, en vue d'être concis, supprime tous ces raisonnements; mais ils sont nécessaires et doivent être sous-entendus.

Le reste de la brochure contient les autres propositions du premier livre de Legendre.

Par inadvertance, l'auteur dit que la proposition d'Euclide est un *postulatum*, tandis qu'elle est un axiome; ce qui est fort différent. Le premier livre contient trois *postulata* qui ne sont relatifs qu'à des constructions à faire, et non à des propositions. L'axiome d'Euclide peut être remplacé avantageusement par un autre de M. Gergonne ; savoir : Par le même point, ne peuvent passer deux parallèles à une droite donnée. Cette proposition a l'évidence intuitive d'un axiome et suffit à tout. M. Lionnet a adopté cet axiome comme base de la théorie des parallèles : c'est un exemple à suivre. TM.