NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Question 5 (page 57)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 145-148

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__145_0>

QUESTION 5 (page 57).

1. *Étant donnée une équation algébrique, d'un degré quelconque à coefficients réels, chaque racine peut être considérée comme la tangente d'un arc réel ou imaginaire, l'unité étant prise pour rayon. On propose : 1° de démontrer que la somme de ces arcs est réelle ; 2° de trouver cette somme à l'aide des tables.*

Établissons d'abord ce principe : qu'une quantité quelconque, réelle ou imaginaire peut être considérée comme la tangente d'un arc réel ou imaginaire. On a, en général,

$$\text{tang.}\, x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.$$

Or, si $x = y + z\sqrt{-1}$, $\text{tang.}(y+z\sqrt{-1}) = (y + z\sqrt{-1}) - \dfrac{(y+z\sqrt{-1})^3}{1.2.3} + \ldots. = \text{Y} + \text{Z}\sqrt{-1}$; donc, etc.

Cela posé, soit donc l'équation à coefficients réels :

$$x^m + \text{A}_1 x^{m-1} + \text{A}_2 x^{m-2} \ldots\ldots + \text{A}_{m-1} x + \text{A}_m = 0,$$

dont les racines sont $r_1, r_2, r_3, \ldots. r_m$; si je désigne par S_1 la somme des tangentes dont ces racines représentent les arcs, par S_2 la somme de ces même tangentes combinées sans répétition deux à deux, j'aurai, d'après la formule connue :

$$\text{tang.}(r_1 + r_2 \ldots. + r_m) = \frac{\text{S}_1 - \text{S}_3 \ldots. \pm \text{S}_{m-1}}{1 - \text{S}_2 \ldots. \mp \text{S}_m}, \text{ si } m \text{ est pair,}$$

ou bien

$$= \frac{\text{S}_1 - \text{S}_3 \ldots. \pm \text{S}_m}{1 - \text{S}_2 \ldots. \pm \text{S}_{m-1}}, \text{ si } m \text{ est impair.}$$

Or, on a $\text{S}_1 = -\text{A}_1$, $\text{S}_2 = \text{A}_2$, $\text{S}_3 = -\text{A}_3, \ldots \text{S}_m = \pm \text{A}_m$,

donc $$\text{tang.}(r_1 + r_2 \ldots. + r_m) = \frac{-\text{A}_1 + \text{A}_3 \ldots. \pm \text{A}_{m-1}}{1 - \text{A}_2 \ldots.},$$

quantité réelle ; donc, la tangente de la somme des arcs étant réelle, la somme de ces arcs est aussi réelle, c. q. f. d.

Connaissant cette tangente en fonction des coefficients de l'équation donnée, on peut trouver au moyen des tables l'arc lui-même.

Dans quel cas les deux termes de la fraction $\frac{-A_1+A_3-\dots}{1-A_2+\dots}$ deviennent-ils nuls? et comment trouver alors la vraie valeur de la fraction ?

QUESTION 9 (page 59).

2. *Inscrire dans une ellipse donnée une corde telle que la somme de sa longueur et de la distance de son milieu au centre de l'ellipse, soit un maximum. Application au cercle.*

Désignons ce *maximum* par z, la demi-corde par y, et la distance de son milieu au centre de l'ellipse, par x; on a $z=x+2y$, d'où $x=z-2y$.

Soit l'équation de cette ellipse rapportée à deux diamètres conjugués, a et b, dont l'un est parallèle à la corde, $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ (1).

Remplaçant dans l'équation (1), x par sa valeur, on aura :

$$a^2y^2+b^2(z-2y)^2=a^2b^2,$$

$$y^2-\frac{4b^2zy}{a^2+4b^2}=\frac{b^2(a^2-z^2)}{a^2+4b^2},$$

d'où
$$y=\frac{2b^2z\pm ab\sqrt{a^2+4b^2-z^2}}{a^2+4b^2}.$$

La plus grande valeur qu'on puisse donner à z est donc $\sqrt{a^2+4b^2}$, sans quoi y serait imaginaire; or, dans $z^2=a^2+4b^2$, il y a là quantité constante $a^2+b^2=k^2$; $z^2=k^2+3b^2$; z dépend donc de b; donc, quand b est le plus grand possible, c'est-à-dire le grand axe, z est le *maximum*; on a alors la corde cherchée :

$$2y=\frac{4b^2}{\sqrt{a^2+4b^2}} \quad \text{et} \quad x=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+4b^2}}.$$

Quand l'ellipse devient un cercle, on a $a=b=r$; alors

$$2y=\frac{4r}{\sqrt{5}},\quad x=\frac{r}{\sqrt{5}}\quad \text{et}\quad z=r\sqrt{5}\,;$$

c'est là le *maximum*.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2 (page 57).

3. *Soit* ABC, (*fig.* 38), *un triangle équilatéral inscrit dans un cercle dont le centre est* D; *d'un point* O *de la circonférence, on abaisse sur les côtés* AB, AC, BC, des perpendiculaires OM, ON, OP, *qui rencontrent ces côtés en des points* M, N, P. *Les points* M, N, P, *sont sur une droite qui passe par le milieu du rayon* OD, *et ce milieu est le centre des moyennes distances des pieds des trois perpendiculaires*, M, N, P.

Des points P, N, D, j'abaisse sur AB, les perpendiculaires PF, NG, DH. Les droites ON, OP, faisant avec AB des angles de 30°, on aura :

(1) $\quad ON=2(NG-OM),\qquad$ (2) $\quad OP=2(OM-PF)$.

D'ailleurs, la somme algébrique des perpendiculaires abaissées, de différents points, sur les côtés d'un triangle équilatéral, étant invariable, on a :

(3) $\qquad ON+OM-OP=3.DH.$

De la somme des égalités (2) et (3), je retranche (1), il vient :

$$OM=3.DH+4OM-2(NG+PF),\ \text{d'où}\ \frac{NG+PF}{3}=\frac{OM+DH}{2}.$$

Cette dernière égalité montre que le centre des trois points N, P, M, et le milieu du rayon OD, sont à la même distance de AB. On démontrerait de même que ce centre et le milieu de OD, sont à des distances égales de AC; donc, ces deux points coïncident.

La situation en ligne droite des trois points M, N, P, est une propriété connue, et qui existe même lorsque le triangle inscrit est quelconque. Ce théorème a été découvert par *Robert Simpson.*

PROBLÈME 11 (page 59).

4. *Inscrire dans une ellipse un triangle semblable à un triangle donné.*

Par un point, D, pris sur l'ellipse (*fig.* 39), je mène deux cordes DE, DF, faisant entre elles un angle EDF égal à l'angle BAC du triangle donné; puis, je joins le centre O de l'ellipse aux milieux G, H, de ces cordes, par les diamètres OGX, OHY. A partir des points G, H, je prends sur les directions GD, HD, des longueurs GI, HL, proportionnelles aux côtés BA, CA; par les points I, L, je conduis parallèlement aux diamètres OX, OY, les droites IM, LM, qui se coupent au point M; je joins le centre au point M par la droite OM qui coupe l'ellipse au point A′, et enfin par le point A′ je mène les cordes A′B′, A′C′, parallèles aux cordes DE, DF. Le triangle A′B′C′, ainsi déterminé, est semblable au triangle ABC.

Car les diamètres OX, OY, divisent en parties égales les cordes A′B′, A′C′, aux points R, S; et de plus, on a: A′R : A′S :: GI : HL :: AB : AC; d'où A′B′: A′C′ :: AB : AC. D'ailleurs l'angle B′A′C′ est égal à l'angle EDF; et par suite il est égal à l'angle BAC. Donc les deux triangles A′B′C′, ABC, sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels.