NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LEVYLIER

Solution du problème 8 (page 59). Exprimer l'aire d'un triangle en fonction des médianes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 139-142

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__139_1>

SOLUTION DU PROBLÈME 8 (page 59).

EXPRIMER L'AIRE D'UN TRIANGLE EN FONCTION DES MÉDIANES.

PAR M. LEVYLIER,
Élève du collége Louis-le-Grand (Institution Mayer).

—

1. Désignons par α, β, γ, les longueurs des droites AD, BE, CF (*fig.* 36), menées des sommets du triangle ABC, aux milieux des côtés opposés. On sait que ces trois droites se coupent en un point O, tel que

$$\mathrm{OD} = \frac{\alpha}{3}, \quad \mathrm{OE} = \frac{\beta}{3}, \quad \mathrm{OF} = \frac{\gamma}{3}.$$

Et de plus, chacun des trois triangles BOC, AOC, AOB, est équivalent au tiers du triangle ABC.

Cela posé, prolongeons la droite OD, d'une longueur DG égale à OD, et menons les droites GC, GB : le quadrilatère BOCG sera un parallélogramme, puisque les diagonales OG, BC, se coupent mutuellement en deux parties égales ; les triangles GOC, BOC, seront équivalents entre eux, car chacun de ces triangles est la moitié du parallélogramme BOCG. Par conséquent, on aura BAC=3.GOC. D'ailleurs,

$$GC = BO = \frac{2}{3}\,BE.$$

Si, maintenant, on désigne par $2s$ la somme $\alpha+\beta+\gamma$, le demi-périmètre du triangle OGC, aura pour valeur $\frac{2.s}{3}$; et, d'après la formule qui donne l'aire d'un triangle en fonction des trois côtés, on aura :

$$GOC=\sqrt{\frac{2}{3}\,s\,.\,\frac{2}{3}(s-\alpha).\,\frac{2}{3}(s-\beta).\,\frac{2}{3}(s-\gamma)}$$

$$=\frac{4}{9}\sqrt{s\,(s-\alpha)\,(s-\beta)\,(s-\gamma)}.$$

Substituant dans l'égalité BAC=3.GOC, on a, en nommant t la surface BAC :

$$t=\frac{4}{3}\sqrt{s(s-\alpha)\,(s-\beta).(s-\gamma)}\,,$$

ou bien :

$$t=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4}{16}}$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4}.$$

Ce qu'il fallait trouver.

2. On parvient au même résultat par le calcul suivant : Soient a, b, c, les valeurs des côtés BC, AC, AB, du triangle ABC. On a, d'après une proposition connue :

$$(1)\qquad a^2+b^2-\frac{c^2}{2}=2\gamma^2,$$

$$(2)\qquad a^2+c^2-\frac{b^2}{2}=2\beta^2,$$

$$(3)\qquad b^2+c^2-\frac{a^2}{2}=2\alpha^2.$$

Et, en désignant par p le demi-périmètre du triangle ABC, et par t la surface du triangle,

$$t^2=p(p-a)(p-b)(p-c),$$

ou bien

$$(4)\qquad t^2=\frac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{16}.$$

Pour obtenir t en fonction de α, β, γ, il suffit d'éliminer a, b, c, entre les équations (1), (2), (3), (4).

En additionnant les équations (1), (2), (3), on obtient immédiatement :

$$(5)\qquad \frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)=2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).$$

En multipliant deux à deux les équations (1), (2), (3), additionnant les équations résultantes, on trouve, toutes réductions faites,

$$(6)\qquad \frac{9}{4}(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)=4(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2).$$

Multipliez par 4 les deux membres de l'équation (6), élevez au carré les deux membres de l'équation (5), puis retranchez l'une de l'autre les deux équations ainsi obtenues, il viendra :

$$\frac{9}{4}[2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4]$$
$$=4[2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4].$$

Cette dernière équation donne la valeur de

$$2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4,$$

en fonction de α, β, γ; substituant dans l'équation (4), on a :

$$t^2 = \frac{1}{9}\left[2\alpha^2\beta^2 + 2\alpha^2\gamma^2 + 2\beta^2\gamma^2 - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4\right],$$

et, par suite :

$$t = \frac{1}{3}\sqrt{2\alpha^2\beta^2 + 2\alpha^2\gamma^2 + 2\beta^2\gamma^2 - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4}.$$