ROUGEVIN

Démonstration du théorème 1 (page 57)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 138-139

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__138_0>

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1 (page 57).

PAR M. ROUGEVIN,
Élève de la classe de Mathématiques élémentaires du collége Louis-le-Grand.
(Institution Loriol).

—

Soient AD, BE, CF (*fig.* 34), les bissectrices des angles du triangle ABC: si AD=CF, on aura BC=BA.

Les deux triangles FBC, ABD, ont des bases FC, AD, égales entre elles, par hypothèse; l'angle FBC opposé à la base FC, dans le premier triangle, est le même que l'angle ABD opposé à la base AD du second triangle; la bissectrice BO de l'angle FBC, est aussi la bissectrice de l'angle ABD. On en peut conclure que les triangles FBC, ABD, sont égaux entre eux.

En effet, supposons qu'on ait placé la base CF, sur DA, de manière que le point C coïncide avec D, et le point F avec A; puis, décrivons sur la base commune DA, un segment AHD (*fig.* 35) capable de l'angle ABD (*fig.* 34), les deux triangles ABD, FBC, (*fig.* 34), seront inscrits dans le segment AHD. Le sommet B, du premier, tombera en un point B′ de l'arc AHD, et le sommet B du triangle FBC tombera en un autre point B″ de l'arc AHD; car la corde AB″ est moindre que AB′, puisqu'on a BF<BA. Les bissectrices B′O′, B″O″, des angles B′, B″ passeront par le milieu M de l'arc AMD, et de plus elles couperont la droite AD en des points O′, O″, tels qu'on aura B′O′=B″O″, puisque chacune des droites B′O′, B″O″, est égale à BO (*fig.* 34). Il est maintenant facile de reconnaître que les deux droites MB′, MB″, doivent faire des angles égaux avec le diamètre MIH, perpendiculaire sur le milieu I de la corde AD. Car si

l'angle B'MH était, par exemple, plus grand que B''MH, les deux triangles B'MH, B''MH, ayant l'hypoténuse MH commune, il faudrait qu'on eût MB'$<$MB''; d'ailleurs, les deux triangles rectangles MIO', MIO'', donneraient MO'$>$MO''; et de ces deux inégalités, on conclurait B'O'$<$B''O'', ce qui est contraire à l'hypothèse. L'égalité des angles B'MH, B''MH, montre que les arcs HB', HB'', sont égaux entre eux; on en conclut l'égalité des arcs B'D, B''A, et celle des arcs B''D, B'A; il en résulte que les cordes B'D, B''A, sont égales entre elles, et il en est de même des cordes B''D, B'A. Donc, les deux triangles AB'D, AB''D, ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun.

Puisque les cordes B'A, B''D, sont égales, le côté AB, du triangle ABD (*fig.* 34), est égal au côté CB du triangle CBF. C'est ce qu'il fallait démontrer.