MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

G. G. VRANCEANU

Interprétation géométrique des processus probabilistiques continus

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 167 (1969)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1969__167__1_0>

© Gauthier-Villars, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémorial des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

BSM 4622

G. G. VRANCEANU
Maître de Conférence
à l'Institut de Constructions de Bucarest

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE
DES
PROCESSUS PROBABILISTIQUES CONTINUS

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Directeur : H. VILLAT

FASCICULE CLXVII

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ÉDITEUR
1969

S - DO... SERVICE DE MATH... PURES

© Gauthier-Villars, 1969.
Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction, par tous procédés y compris la photographie et le microfilm, réservés pour tous pays.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES PROCESSUS PROBABILISTIQUES CONTINUS

Par M. G. G. VRANCEANU,

Maître de Conférence
à l'Institut de Constructions de Bucarest.

INTRODUCTION.

Dans ce travail on étudie quelques aspects de la théorie des processus probabilistiques continus ou bien processus markoviens en utilisant des propriétés géométriques obtenues en utilisant un système de vecteurs ([1], [2]) (¹).

Le travail est divisé en trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré aux processus probabilistiques simples avec un ensemble tout au plus dénombrable des états. Dans le premier paragraphe on montre comment on peut interpréter les résultats de M. Fréchet [3], en utilisant un système (μ) de n vecteurs et son dual (λ) ainsi que les systèmes dérivés correspondants $(\mu)'$ et $(\lambda)'$. Dans les autres paragraphes on traite les divers exemples de processus probabilistiques continus et l'on retrouve ainsi pour $n = 2$ les formules de M. Fréchet et l'on détermine une classe de processus Markov avec trois états. Pour n arbitraire, on trouve une classe de vecteurs qui engendre les probabilités fondamentales, dépendant de n fonctions arbitraires.

Dans le deuxième chapitre on étudie les processus probabilistiques continus multiples. On sait que pour obtenir les équations différentielles correspondantes, il fallait résoudre le problème de trouver un analogue de la relation de Chapman-Kolmogorov [9] qui joue un rôle central dans la théorie des processus markoviens simples. En généralisant la relation classique de Chapman pour une chaîne de Markov simple,

(¹) Les nombres entre crochets se réfèrent à la bibliographie qu'on trouve à la fin de ce fascicule.

O. Onicescu [4] (2) a donné la relation fonctionnelle à laquelle doivent satisfaire les probabilités fondamentales d'une chaîne multiple. En utilisant cette relation, R. Theodorescu [5] (3) a donné la relation fonctionnelle analogue à celle de Chapmam-Kolmogorov vérifiée par les probabilités fondamentales d'un processus probabilistique multiple et il a établi leurs équations différentielles.

Dans le premier paragraphe du chapitre II, on montre comment on peut attacher une métrique à un processus probabilistique et l'on considère en particulier le cas $n = 2$.

Dans le second paragraphe on montre comment on peut construire un système de probabilités dans les espaces à courbure constante négative et dans le troisième paragraphe, on montre comment on peut associer un transport parallèle en introduisant la notion de connexion probabilistique.

Dans le paragraphe 4, on montre comment un processus probabilistique peut être considéré comme une $\mathfrak{G}$-structure affine.

Dans le dernier paragraphe, on considère quelques exemples.

Dans le troisième chapitre on fait quelques applications aux phénomènes démographiques, à la théorie de l'invalidité et aux processus Markov qu'on peut associer à un groupe de Lie.

CHAPITRE I.

Processus markoviens simples.

1. Formules de Fréchet. — Nous considérons un processus markovien simple avec n états. Un tel processus est caractérisé par une répartition initiale et une matrice de passage formée par des éléments non négatifs [6]

$$P(s, t) = \| P^i_j(s, t) \| \text{ (4)} \quad (s \leq t) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

qui jouit de la propriété

$$\sum_{j=1}^{n} P^i_j(s, t) = 1 \tag{1}$$

(2) *Voir* aussi O. Onicescu, G. Mihoc et Ionescu Tulcea [14].

(3) *Voir* aussi G. Ciucu et R. Theodorescu [11].

(4) Nous utilisons la notation $P^i_j(s, t)$ au lieu de $P_{ij}(s, t)$ pour être d'accord avec l'interprétation géométrique qui est considérée dans ce travail.

et nous avons

$$(2) \qquad P^i_j(s, t) = P^i_k(s, u)\, P^k_j(u, t) \quad (^5) \qquad (s \leqq u \leqq t)$$

pour toutes les valeurs de u, ($k = 1, 2, \ldots, n$).

Il faut supposer de même que nous avons

$$(3) \qquad P^i_j(s, s) = \delta^i_j$$

δ^i_j étant le symbole de Kronecker, donc δ^i_j est égal à zéro si $i \neq j$ est égal à 1 si $i = j$.

Il en résulte que la détermination des processus markoviens simples avec un ensemble fini d'états, revient à trouver les solutions positives $P^i_j(s, t)$ des équations (1), (2) et (3).

On observe que les équations (1) sont linéaires, mais les équations (2) sont des équations fonctionnelles et la résolution de ces équations a été faite pour la première fois par Fréchet qui a montré qu'en supposant que $P^i_j(s, t)$ sont des fonctions continues, nous pouvons écrire la solution sous la forme

$$(2') \qquad P^i_j(s, t) = \mu^i_a(s)\, \lambda^a_j(t), \quad (a = 1, 2, \ldots, n)$$

où le déterminant $\Delta = |\mu^i_a|$ est différent de zéro et où λ^a_j sont les réciproques du déterminant Δ, donc nous avons les conditions

$$(2'') \qquad \mu^i_a(s)\, \lambda^a_j(s) = \delta^i_j.$$

Nous voulons donner ici une démonstration très simple des formules (2') de Fréchet (6).

Pour cela, supposons en premier lieu qu'on désigne par $\lambda^i_j(t)$ les valeurs $P^i_j(0, t)$, donc les valeurs des P^i_j dans $s = 0$. Nous allons montrer qu'il existe une seule solution des équations (2) déterminée par $\lambda^i_j(t)$, c'est la solution de Fréchet.

Pour cela observons, en premier lieu que les conditions (3) pour $s = 0$, nous donnent

$$(2''') \qquad \lambda^i_j(0) = \delta^i_j,$$

donc le déterminant $D(t) = |\lambda^i_j(t)|$, se réduit pour $t = 0$, au déterminant unité. Comme nous supposons que $\lambda^i_j(t)$ sont des fonctions continues, il en résulte qu'il en existe un nombre $\alpha > 0$ de façon que $D(t)$ soit différent de zéro dans l'intervalle $0 \leqq t \leqq \alpha$. On peut construire alors dans cet intervalle les réciproques du déterminant $D(t)$,

(5) On adopte la convention d'Einstein que si un indice se répète, on doit sommer par rapport à cet indice.

(6) Pour une autre démonstration de ces formules, *voir* J. Aczel ([7], [8]).

donc les formules (3) sont vérifiées et alors les formules (2′) nous donnent évidemment une solution des équations fonctionnelles (2).

Nous allons démontrer, que cette solution est unique. Pour cela cherchons une solution des équations (2) de la forme

$$Q^i_j(s, t) = \mu^i_a(s)\,\lambda^a_j(t) + R^i_j(s, t), \tag{4}$$

où $R^i_j(0, t) = 0$, $R^i_j(s, s) = 0$, donc une solution qui coïncide avec $P^i_j(s, t)$ pour $s = 0$. Il s'agit de montrer que $R^i_j(s, t)$ sont des fonctions identiques nulles.

Pour cela, écrivons que les Q^i_j données par les formules (4) satisfont aux équations fonctionnelles (2). Nous avons

$$\begin{aligned} Q^i_j(s, t) &= Q^i_k(s, u)\,Q^k_j(u, t) \\ &= [\mu^i_a(s)\,\lambda^a_k(u) + R^i_k(s, u)]\,[\mu^k_b(u)\,\lambda^b_j(t) + R^k_j(u, t)]. \end{aligned}$$

Donc nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} Q^i_j(s, t) = {} & \mu^i_a(s)\,\lambda^a_j(t) + \mu^i_a(s)\,\lambda^a_k(u)\,R^k_j(u, t) \\ & + \mu^k_b(u)\,\lambda^b_j(t)\,R^i_k(s, u) + R^i_k(s, u)\,R^k_j(u, t), \end{aligned}$$

ou bien, en tenant compte de (4), il en résulte

$$\begin{aligned} R^i_j(s, t) = {} & \mu^i_a(s)\,\lambda^a_k(u)\,R^k_j(u, t) \\ & + \mu^k_b(u)\,\lambda^b_j(t)\,R^i_k(s, u) + R^i_k(s, u)\,R^k_j(u, t). \end{aligned}$$

Si dans ces formules nous posons $s = 0$ et si nous tenons compte que $R^i_j(0, t) = 0$, on obtient les formules

$$\lambda^a_k(u)\,R^k_j(u, t) = 0. \tag{4′}$$

En multipliant par $\mu^i_a(u)$ et en sommant par rapport à l'indice a il en résulte, en tenant compte des formules (2″), que nous avons

$$R^i_j(u, t) = 0,$$

quels que soient u et t entre zéro et α, ce qui démontre :

Théorème 1. — *Il existe une seule solution $P^i_j(s, t)$ des équations* (2) *et* (3), *qui se réduit à $\lambda^i_j(t)$ pour $s = 0$, c'est la solution de Fréchet.*

Il est d'ailleurs à remarquer que la condition de la continuité est intervenue seulement pour s'assurer que le déterminant $D(t)$ est différent de zéro pour $0 \leq t \leq \alpha$. Donc les résultats sont valables même si les fonctions $\lambda^i_j(t)$ ne sont pas continues, mais le déterminant $D(t)$ est différent de zéro pour $0 \leq t \leq \alpha$. Le cas où le déterminant $D(t)$ est nul a été considéré par J. Aczel et l'on obtient des résultats analogues en ce qui concerne la solution des équations fonctionnelles (2).

2. **Systèmes de vecteurs associés.** — Nous allons observer qu'on peut interpréter les $\mu^i_a(s)$ comme les composantes de n vecteurs contrevariants μ^i_a $(a = 1, 2, \ldots, n)$ indépendantes et alors les $\lambda^a_i(s)$ sont les composantes de n vecteurs covariants [7].

Nous avons alors :

THÉORÈME 2. — *Étant donné un système de probabilités fondamentales* $P^i_j(s, t)$, *il en résulte un système* (μ) *de vecteurs indépendants de sorte que* $P^i_j(s, t)$ *s'expriment par les formules* (2′) *où* λ^a_j *sont les composantes du système dual* (λ) *du système* (μ).

Observons maintenant qu'on peut s'arranger de façon que les conditions (1) soient remplacées par les conditions

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda^a_j(t) = 1, \tag{5}$$

ou ce qui est la même chose par les conditions

$$\sum_{a=1}^{n} \mu^i_a(s) = 1. \tag{5'}$$

En effet, en tenant compte que les probabilités sont définies par les formules (2′), les équations (1) nous donnent

$$\mu^i_a(s) \sum_{j=1}^{n} \lambda^a_j(t) = 1. \tag{6}$$

En posant alors

$$c^a(t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda^a_j(t) \tag{7}$$

et en multipliant les équations (6) par $\lambda^b_i(s)$ et en sommant, nous obtenons

$$c^a(t) = c^a(s),$$

donc c^a sont des constantes, donc nous avons les formules

$$\mu^i_a(s)\, c^a = 1,$$

c'est-à-dire les constantes c^a ne peuvent pas être toutes nulles.

---

[7] On emploie la notation utilisée par G. Vranceanu [13].

Maintenant nous observons que les formules (2′) sont invariantes à une transformation linéaire

$$(7') \qquad \bar{\lambda}^a_j = c^a_b \lambda^b_j, \qquad \mu^i_a = c^b_a \bar{\mu}^i_b,$$

où c^a_b sont des constantes. Par une telle transformation, nous avons

$$\bar{c}^a = \sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}^a_j = c^a_b c^b,$$

donc $\bar{c}^a$ se comporte par rapport à une transformation linéaire (7) comme un vecteur contrevariant.

Il en résulte qu'on peut utiliser les constantes c^a_b pour réduire les constantes c^a à une forme canonique, par exemple pour avoir $c^a = \delta^a_1$, forme indiquée par Fréchet, ce qui revient à avoir les conditions

$$(8) \qquad \mu^i_1 = 1, \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda^a_j = \delta^a_1$$

et les premières de ces conditions nous disent que le vecteur μ^i_1 a toutes les composantes égales à l'unité. On peut de même supposer que toutes les composantes c^a sont égales à l'unité et dans ce cas les vecteurs μ^i_a satisfont aux conditions (5′) tandis que les vecteurs duals λ^a_i satisfont aux conditions (5).

Dans ce qui suit, nous utiliserons surtout les formes canoniques (5) et (5′) à cause de la symétrie des formules et l'analogie avec la formule (1) à laquelle satisfont les probabilités fondamentales. On peut voir qu'il est possible de passer des formules (5′) aux premières formules (8), $\bar{\mu}^i_1 = 1$, en faisant la transformation des vecteurs

$$\mu^i_1 = \bar{\mu}^i_1 - \bar{\mu}^i_2 - \ldots - \bar{\mu}^i_n, \qquad \mu^i_a = \bar{\mu}^i_a \qquad (a > 2).$$

Les transformations (7) qui conservent les conditions (5′), satisfont à la condition

$$(8') \qquad \sum_{a=1}^{n} c^a_b = 1.$$

D'autre part, dans les formules (7) on ne peut pas supposer qu'il existe des fonctions de la variable s ou t, parce que alors les formules (2′) ne sont pas invariantes. Il en résulte :

Théorème 3. — *A tout système de probabilités fondamentales on associe un système de vecteurs* (μ) *qui satisfont aux conditions* (5′) *et ce système* *de vecteurs est déterminé, abstraction faite d'une transformation linéaire à coefficients constants :*

$$\mu^i_a = c^b_a \overline{\mu}^i_b, \tag{8''}$$

où c^a_b satisfont aux équations (8').

Nous allons maintenant observer que la réciproque n'est pas vraie. Étant donné le système de vecteurs (μ) satisfaisant les conditions (5'), pour que ces vecteurs définissent un système de probabilités fondamentales, il faut que les conditions $P^i_j(s, t) \geqq 0$ soient aussi vérifiées.

Comme d'autre part nous avons $P^i_j(s, s) = \delta^i_j$, il en résulte qu'il faut s'assurer que pour $t > s$ nous avons tout au moins pour t assez proche de s, les conditions

$$P^i_j(s, t) \geqq 0 \qquad (i \neq j). \tag{9}$$

3. **Théorème de Kolmogorov.** — Pour trouver les conditions nécessaires et suffisantes dans lesquelles le système de vecteurs (μ) peut définir un système de probabilités, considérons le système dérivé du système (μ), c'est-à-dire les vecteurs $(\mu^i_a)'$, la dérivation étant faite par rapport à la variable s. Alors on peut exprimer le système $(\mu)'$ à l'aide du système (μ) par les formules de la forme

$$(\mu^i_a)' = \Gamma^i_j \mu^j_a, \tag{9'}$$

où Γ^i_j sont des fonctions de la variable s, définies par les formules

$$\Gamma^i_j = (\mu^i_a)' \lambda^a_j.$$

Dérivant la relation (5'), nous obtenons

$$\sum_{a=1}^{n} (\mu^i_a)' = 0. \tag{9''}$$

Mais compte tenu de (9'), nous avons

$$\sum_{a=1}^{n} (\mu^i_a)' = \sum_{a=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \Gamma^i_j \mu^j_a \right) = \sum_{j=1}^{n} \left[\Gamma^i_j \left(\sum_{a=1}^{n} \mu^j_a \right) \right] = \sum_{j=1}^{n} \Gamma^i_j,$$

donc

$$\sum_{j=1}^{n} \Gamma^i_j = 0. \tag{10}$$

De même, en dérivant les relations (2″), nous obtenons

$$\sum_{a=1}^{n} (\mu_a^i)' \lambda_j^a + \sum_{a=1}^{n} \mu_a^i (\lambda_j^a)' = 0$$

et donc tenant compte de (9″) et (2″) :

$$-\Gamma_j^i = \mu_a^i (\lambda_j^a)',$$

c'est-à-dire

$$(\lambda_j^a)' = -\Gamma_j^k \lambda_k^a. \tag{10'}$$

Par conséquent, en dérivant les formules (2′) par rapport à t, s restant fixe, nous obtenons

$$\frac{d\mathrm{P}_j^i(s,\, t)}{dt} = \mu_a^i(s) \frac{d\lambda_j^a(t)}{dt} = -\Gamma_j^k(t)\, \mu_a^i(s)\, \lambda_k^a(t),$$

ce qui nous donne

$$\left(\frac{d\mathrm{P}_j^i(s,\, t)}{dt}\right)_{t=s} = -\Gamma_j^i(s).$$

Par conséquent les probabilités $\mathrm{P}_j^i(s, t)$ $(i \neq j)$ sont positives pour $t \geqq s$ si

$$\Gamma_j^i(s) \leqq 0 \qquad (i \neq j). \tag{10''}$$

Donc, nous avons le théorème de Kolmogorov [9] sous la forme :

THÉORÈME 4. — *La condition nécessaire et suffisante pour que le système de vecteurs satisfaisant les conditions (5′) définisse un système de probabilités dans le voisinage du point s, il faut que dans ce point les quantités* $\Gamma_j^i(s)$ $(i \neq j)$ *soient toutes non positives.*

En tenant compte des relations (10) il résulte que Γ_i^i doivent être positives ou nulles. En considérant alors la dérivée du déterminant $\Delta = |\mu_a^i|$ nous avons, en tenant compte de (9′) :

$$\Delta' = \Delta \sum_{i=1}^{n} \Gamma_i^i.$$

D'autre part la somme des quantités Γ_i^i ne peut être nulle que si toutes les quantités Γ_i^i et par conséquent toutes les quantités Γ_j^i $(i \neq j)$ sont nulles, et en ce cas, μ_a^i sont constantes. Il en résulte que le déterminant Δ ne peut pas être constant pour un système de probabilités P_j^i non constantes, donc qui ne se réduisent pas à δ_j^i.

Maintenant nous allons donner une autre forme du théorème de Kolmogorov. Pour cela nous pouvons observer qu'on peut trouver une solution des équations (5′) dans le cas général, en posant

$$(11)\qquad \mu^i_a = \frac{1}{n} - m^i_a \quad (i \neq a), \qquad \mu^i_i = \frac{1}{n} + \sum_{a \neq i} m^i_a$$

et dans ce cas le déterminant Δ est nul pour les valeurs nulles de $n(n-1)$ fonctions m^i_a.

Montrons que le théorème de Kolmogorov peut s'exprimer seulement avec $n(n-1)$ fonctions m^i_a $(i \neq a)$, et les quantités Γ^i_j, $(i \neq j)$.

Pour cela on observe qu'en tenant compte des conditions (9′) et des équations (11) pour $i = a$, nous avons

$$-(m^i_a)' = \sum_{j \neq a} \Gamma^i_j \left(\frac{1}{n} - m^j_a\right) + \Gamma^i_a \left(\frac{1}{n} + \sum_{b \neq a} m^a_b\right),$$

où i et a sont des indices fixes. Ces formules, en tenant compte de (10) s'écrivent

$$(12)\qquad (m^i_a)' = \sum_{j \neq i \neq a} \Gamma^i_j m^j_a - \Gamma^i_a \sum_{b \neq a} m^a_b - m^i_a \sum_{j \neq i} \Gamma^i_j.$$

Les équations (12) représentent un système de $n(n-1)$ équations différentielles dans les inconnues m^i_a $(i \neq a)$. Pour que le système de vecteurs (μ) donné par les formules (11) puisse définir un système de probabilités, il faut que dans le système (12), Γ^i_j, $(i \neq j)$ soient non positives.

Nous avons donc :

THÉORÈME 5. — *La condition nécessaire et suffisante pour que les vecteurs définis par les formules* (11) *constituent un système de n vecteurs probabilistiques, est que m^i_a soient les solutions d'un système d'équations différentielles* (12) *dans lequel Γ^i_j $(i \neq j)$ sont des quantités nulles ou négatives.*

Le cas des fonctions non dérivables. Dans le théorème précédent on suppose que m^i_a et donc μ^i_a sont des fonctions dérivables. Mais, on peut donner une condition pour que le système de vecteurs (μ) soit probabilistique sans utiliser la notion de dérivée.

En effet, en multipliant les formules (2′) avec $\mu^j_b(t)$ et en sommant par rapport à j, nous avons

$$(13)\qquad \sum_{j=1}^{n} P^i_j(s, t)\, \mu^j_b(t) = \mu^i_b(s).$$

Supposons dans ces formules $i \neq a$. Alors (13) s'écrivent, compte tenu de (11) :

$$(13') \qquad \sum_{j \neq i \neq b} P^i_j \left[m^i_b(t) - m^j_b(t)\right] + P^i_b \left[\sum_{a \neq b} m^a_b(t) + m^i_b(t)\right] = m^i_b(t) - m^i_b(s),$$

dans lesquelles interviennent seulement les probabilités $P^i_j(s, t)$ $(i \neq j)$. Pour un i fixe, elles constituent $(n-1)$ équations dans les quantités $P^i_j(s, t)$ $(i \neq j)$ et par conséquent nous avons :

Théorème 6. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de vecteurs* (μ) *soit probabilistique est qu'il soit donné par les formules* (11) *et que les solutions* P^i_j $(i \neq j)$ *des équations* (13') *soient toutes positives pour* $s \leqq t$.

4. **Probabilités stationnaires.** — Étant donné un système de probabilités fondamentales (2'), la matrice formée avec $P^i_j(s, t)$ constitue une matrice de passage. Si une des variables est considérée fixe et l'autre considérée variable, nous obtenons une famille de matrices de passage dépendant d'un paramètre. Si s a une valeur fixe, par exemple zéro, nous avons alors pour t positive une famille de matrices stochastiques dépendant du paramètre t,

$$(14) \qquad P^i_j(0, t) = Q^i_j(t) = \mu^i_a(0)\,\lambda^a_j(t).$$

Nous voulons voir dans quelles conditions les matrices $\| Q^i_j(t) \|$ satisfont à la condition d'additivité

$$(15) \qquad Q^i_j(u + t) = Q^i_k(u)\, Q^k_j(t)$$

et montrer que cette condition se transforme dans une condition relative au système de vecteurs.

En effet, supposons que la matrice $\| \mu^i_a(0) \|$ est la matrice unité, ce qui peut être toujours supposé en faisant une transformation (7'). Si $\| \mu^i_a(0) \|$ n'est pas la matrice unité, alors faisant la transformation

$$\mu^i_a(0) = c^b_a \overline{\mu}^i_b(0),$$

la matrice $\| \overline{\mu}^i_b(0) \|$ devient la matrice unité si nous prenons $c^i_a = \mu^i_a(0)$. En supposant $\|\mu^i_a(0)\|$ la matrice unité, les formules (14) deviennent

$$Q^i_j(t) = \lambda^i_j(t)$$

et donc les équations (15) sont vérifiées si elles satisfont les conditions

$$(16) \qquad \lambda^i_j(u + t) = \lambda^i_k(u)\, \lambda^k_j(t).$$

Ces conditions étant vérifiées, supposons que nous donnons à t la valeur $-u$, donc $t+u=0$. Dans le premier membre des équations (16) nous avons $\lambda^i_j(0)$, donc la matrice $\|\lambda^i_j(0)\|$ est la matrice unité, de sorte que les formules (16) nous donnent

$$\lambda^i_k(u)\,\lambda^k_j(-u)=\delta^i_j.$$

D'autre part, nous avons les formules (2″), c'est-à-dire

$$\lambda^i_k(u)\,\mu^k_j(u)=\delta^i_j.$$

Il en résulte

$$\mu^k_j(u)=\lambda^k_j(-u).$$

Donc les systèmes duals (λ), (μ) s'obtiennent un dans l'autre par le changement du signe de la variable.

Dérivons alors les équations (16) par rapport à t; nous avons

$$[\lambda^i_j(u+t)]'=\lambda^i_k(u)\,[\lambda^k_j(t)]'.$$

Compte tenu de (10′), ces formules s'écrivent

$$\Gamma^i_s(u+t)\,\lambda^s_j(u+t)=\Gamma^i_s(t)\,\lambda^s_k(u)\,\lambda^k_j(t),$$

ce qui nous donne, en utilisant les conditions (16) :

$$\Gamma^i_j(t)=\Gamma^i_j(u+t),$$

donc les quantités Γ^i_j sont constantes. Nous obtenons :

THÉORÈME 7. — *Si les probabilités* $Q^i_j(t)$ *satisfont les équations fonctionnelles* (15), *alors* Γ^i_j *qui interviennent dans les formules* (9′) *et* (10′) *sont des constantes* (8).

Dans ce cas le processus est stationnaire.

En revenant alors aux formules (2′) et en posant $t=s+u$, nous avons

$$P^i_j(s,\,s+u)=\mu^i_a(s)\,\lambda^a_j(s+u),$$

mais compte tenu de (16), il en résulte

$$P^i_j(s,\,s+u)=\mu^i_a(s)\,\lambda^a_k(s)\,\lambda^k_j(u)=\lambda^i_j(u),$$

ce qui nous montre que les probabilités fondamentales dépendent seulement de la variable u, donc elles dépendent seulement de la différence $t-s$.

---

(8) *Voir* aussi Runnenburg [10].

Supposons qu'on prend comme système de vecteurs λ^i_k le système

$$\lambda^i_i = \frac{1}{n} - \sum_{a \neq i} n^i_a, \qquad \lambda^i_a = \frac{1}{n} + n^i_a \qquad (i \neq a).$$

Dans ce cas, les équations (16) s'écrivent

$$(16') \qquad n^i_j(u+t) = n^i_k(u)\, n^k_j(t) + \left[\frac{1}{n} - \sum_{a \neq i} n^i_a(u)\right] n^i_j(t)$$
$$+ n^i_j(u)\left[\frac{1}{n} - \sum_{a \neq j} n^j_a(t)\right] \qquad (i \neq j)$$

et nous avons un système des équations fonctionnelles dans les inconnues n^i_j $(i \neq j)$. Si nous sommes dans le cas $n = 2$, nous pouvons prendre

$$n^1_2 = \alpha, \qquad n^2_1 = \beta$$

et les équations (16′) s'écrivent

$$\alpha(u+t) = [1 - \alpha(u)]\,\alpha(t) + [1 - \beta(t)]\,\alpha(u),$$

$$\beta(u+t) = [1 - \beta(u)]\,\beta(t) + [1 - \alpha(t)]\,\beta(u).$$

5. Détermination des probabilités pour $n = 2$ et 3. — Utilisons maintenant les résultats du premier paragraphe pour trouver les probabilités fondamentales pour $n = 2$. Dans ce cas on peut prendre comme formules (11) :

$$(17) \quad \mu^1_1 = \frac{1}{2} + \varphi, \qquad \mu^1_2 = \frac{1}{2} - \varphi, \qquad \mu^2_1 = \frac{1}{2} - \psi, \qquad \mu^2_2 = \frac{1}{2} + \psi.$$

Par suite, nous avons $\Delta = \varphi + \psi$ et obtenons

$$(17') \quad \begin{cases} \lambda^1_1 = \dfrac{1}{\Delta}\left(\dfrac{1}{2} + \psi\right), & \lambda^2_1 = -\dfrac{1}{\Delta}\left(\dfrac{1}{2} - \psi\right), \quad \Delta \neq 0 \\ \lambda^1_2 = -\dfrac{1}{\Delta}\left(\dfrac{1}{2} - \varphi\right), & \lambda^2_2 = \dfrac{1}{\Delta}\left(\dfrac{1}{2} + \varphi\right), \end{cases}$$

où

$$\lambda^1_1 = \frac{\mu^2_2}{\Delta}, \qquad \lambda^2_1 = -\frac{\mu^2_1}{\Delta}, \qquad \lambda^1_2 = -\frac{\mu^1_2}{\Delta}, \qquad \lambda^2_2 = \frac{\mu^1_1}{\Delta}$$

et les probabilités fondamentales sont données, compte tenu de (2′) par les formules de Fréchet ([9]) :

$$(18)\qquad \begin{cases} P_1^1(s,t) = \dfrac{\varphi(s)+\psi(t)}{\varphi(t)+\psi(t)}, & P_2^1(s,t) = \dfrac{\varphi(t)-\varphi(s)}{\varphi(t)+\psi(t)}, \\ P_1^2(s,t) = \dfrac{\psi(t)-\psi(s)}{\varphi(t)+\psi(t)}, & P_2^2(s,t) = \dfrac{\varphi(t)+\psi(s)}{\varphi(t)+\psi(t)}. \end{cases}$$

Ces formules nous montrent qu'en supposant que $\varphi + \psi$ est positive dans le point s, les formules (18) définissent un système de probabilités pour $t \geqq s$ si les fonctions φ, ψ sont non décroissantes. Si $\varphi + \psi$ est négative dans le point s, alors (18) définissent un système de probabilités, si φ, ψ sont des fonctions non croissantes.

D'autre part on peut remarquer que les formules (18) nous montrent que les probabilités ne changent pas si l'on change le signe de φ et ψ en même temps.

Nous avons donc :

THÉORÈME 8. — *Le système de probabilités le plus général pour $n = 2$ est donné par les formules* (18) *où $\varphi(s) + \psi(s)$ est une fonction positive et $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sont des fonctions non croissantes pour $t \geqq s$.*

Nous allons maintenant dire qu'un système de probabilités $P_j^i(s, t)$ est symétrique s'il satisfait les conditions

$$P_j^i(s,t) = P_i^j(s,t), \qquad P_i^i(s,t) = P_j^j(s,t) \qquad (i \neq j).$$

On voit que dans le cas (18), nous avons

$$P_2^1(s,t) = P_1^2(s,t)$$

si φ, ψ satisfont les conditions

$$\varphi(t) - \varphi(s) = \psi(t) - \psi(s),$$

donc la fonction $\varphi(t) - \psi(t)$ est une constante et par conséquent nous avons

$$\psi(t) = \varphi(t) + a$$

et alors on voit que nous avons aussi

$$P_1^1(s,t) = P_2^2(s,t) = \frac{\varphi(s)+\varphi(t)+a}{2\varphi(t)+a}.$$

Donc, nous avons :

THÉORÈME 9. — *Dans le cas $n = 2$ les probabilités* (18) *sont symétriques si la différence $\varphi(s) - \psi(s)$ est une constante et inversement.*

([9]) M. FRÉCHET, *loc. cit.*, p. 242.

Passons maintenant au cas $n = 3$. Nous pouvons écrire dans ce cas les formules (11) sous la forme

$$(19)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \mu_1^1 = \frac{1}{3} + \varphi + u, & \mu_2^1 = \frac{1}{3} - \varphi, & \mu_3^1 = \frac{1}{3} - u; \\ \mu_1^2 = \frac{1}{3} - \psi, & \mu_2^2 = \frac{1}{3} + \psi + v, & \mu_3^2 = \frac{1}{3} - v; \\ \mu_1^3 = \frac{1}{3} - \theta, & \mu_2^3 = \frac{1}{3} - w, & \mu_3^3 = \frac{1}{3} + \theta + w. \end{array}\right.$$

Pour calculer les probabilités, il faut calculer les quantités λ_j^i. Or, nous avons dans ce cas :

$$(20)\qquad \mu_1^i \lambda_j^1 + \mu_2^i \lambda_j^2 + \mu_3^i \lambda_j^3 = \delta_j^i \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

et il s'agit de résoudre trois systèmes linéaires dans trois inconnues λ_j^1, λ_j^2, λ_j^3 $(j = 1, 2, 3)$, le déterminant de ces systèmes étant toujours $D = |\mu_a^i|$ où μ_a^i sont évidemment donnés par les formules (19). En ajoutant les colonnes, on peut écrire

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} - \varphi & \frac{1}{3} - u \\ 1 & \frac{1}{3} + \psi + v & \frac{1}{3} - v \\ 1 & \frac{1}{3} - w & \frac{1}{3} + \theta + w \end{vmatrix}$$

En retranchant la première ligne des autres lignes, on arrive facilement à la formule

$$D = \varphi(\theta + v + w) + \psi(\theta + u + w) + v\theta + vu + uw.$$

Considérons maintenant les équations (20) pour $j = 1$. Nous obtenons

$$\mu_1^1 \lambda_1^1 + \mu_2^1 \lambda_1^2 + \mu_3^1 \lambda_1^3 = 1,$$
$$\mu_1^2 \lambda_1^1 + \mu_2^2 \lambda_1^2 + \mu_3^2 \lambda_1^3 = 0,$$
$$\mu_1^3 \lambda_1^1 + \mu_2^3 \lambda_1^2 + \mu_3^3 \lambda_1^3 = 0.$$

Il en résulte que nous avons $\lambda_1^1 = \frac{D_1}{D}$, où D_1 est donné par la formule

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} - \varphi & \frac{1}{3} - u \\ 0 & \frac{1}{3} + \psi + v & \frac{1}{3} - v \\ 0 & \frac{1}{3} - w & \frac{1}{3} + \theta + w \end{vmatrix},$$

ce qui nous donne

$$D_1 = \frac{1}{3}(2v + 2w + \psi + \theta) + \psi\theta + \psi w + \theta v.$$

De même nous avons

$$\lambda_1^2 = \frac{D_2}{D}, \qquad \lambda_1^3 = \frac{D_3}{D},$$

où

$$D_2 = \frac{1}{3}(\psi - 2\theta - v - w) + \psi\theta + \psi w + \theta v,$$

$$D_3 = \frac{1}{3}(\theta - 2\psi - v - w) + \psi\theta + \psi w + \theta v.$$

D'une manière analogue on peut calculer les autres moments λ_j^i et nous avons le tableau suivant :

$$\lambda_2^1 = \frac{1}{D}\left[\frac{1}{3}(\varphi - 2w - u - \theta) + \varphi\theta + \varphi w + uw\right],$$

$$\lambda_2^2 = \frac{1}{D}\left[\frac{1}{3}(\varphi + 2u + 2\theta + w) + \varphi\theta + \varphi w + uw\right],$$

$$\lambda_2^3 = \frac{1}{D}\left[\frac{1}{3}(w - 2\varphi - u - \theta) + \varphi\theta + \varphi w + uw\right],$$

$$\lambda_3^1 = \frac{1}{D}\left[\frac{1}{3}(u - 2v - \varphi - \psi) + \psi u + uv + \varphi v\right],$$

$$\lambda_3^2 = \frac{1}{D}\left[\frac{1}{3}(v - 2u - \varphi - \psi) + \psi u + uv + \varphi v\right],$$

$$\lambda_3^3 = \frac{1}{D}\left[\frac{1}{3}(2\varphi + 2\psi + u + v) + \psi u + uv + \varphi v\right],$$

Ces formules nous permettent de calculer les probabilités $P_j^i(s, t)$ par les formules (2′). Nous avons

$$P_1^1(s, t) = \frac{1}{D(t)}\left\{\left[\frac{1}{3} + \varphi(s) + u(s)\right]D_1(t) + \left[\frac{1}{3} - \varphi(s)\right]D_2(t) + \left[\frac{1}{3} - u(s)\right]D_3(t)\right\}$$

$$= \frac{1}{D(t)}\{\psi(t)\theta(t) + \psi(t)w(t) + v(t)\theta(t) + \varphi(s)[v(t) + w(t) + \theta(t)] + u(s)[v(t) + w(t) + \psi(t)]\};$$

D'une manière analogue on détient $P_1^2(s, t)$ et $P_1^3(s, t)$ de même que les autres probabilités. On obtient ainsi les neuf probabilités $P_j^i(s, t)$ $(i, j = 1, 2, 3)$:

$$
(21)\quad \left\{
\begin{aligned}
P_2^1(s, t) &= \frac{1}{D(t)} \{ u(t)w(t) + w(t)\varphi(t) + \varphi(t)\theta(t) \\
&\qquad - \varphi(s)[u(t) + w(t) + \theta(t)] + u(s)[\varphi(t) - \theta(t)] \}, \\
P_3^1(s, t) &= \frac{1}{D(t)} \{ u(t)v(t) + v(t)\varphi(t) + u(t)\psi(t) \\
&\qquad + \varphi(s)[u(t) - v(t)] - u(s)[v(t) + \varphi(t) + \psi(t)] \}, \\
P_1^2(s, t) &= \frac{1}{D(t)} \{ v(t)\theta(t) + w(t)\psi(t) + \psi(t)\theta(t) \\
&\qquad + v(s)[\psi(t) - \theta(t)] - \psi(s)[v(t) + w(t) + \theta(t)] \}, \\
P_2^2(s, t) &= \frac{1}{D(t)} \{ u(t)w(t) + w(t)\varphi(t) + \varphi(t)\theta(t) \\
&\qquad + v(s)[u(t) + \varphi(t) + \theta(t)] \\
&\qquad\qquad + \psi(s)[u(t) + w(t) + \theta(t)] \}, \\
P_3^2(s, t) &= \frac{1}{D(t)} \{ u(t)v(t) + u(t)\psi(t) + v(t)\varphi(t) \\
&\qquad + \psi(s)[v(t) - u(t)] - v(s)[u(t) + \varphi(t) + \psi(t)] \}, \\
P_1^3(s, t) &= \frac{1}{D(t)} \{ v(t)\theta(t) + w(t)\psi(t) + \psi(t)\theta(t) \\
&\qquad + w(s)[\theta(t) - \psi(t)] - \theta(s)[v(t) + w(t) + \psi(t)] \}, \\
P_2^3(s, t) &= \frac{1}{D(t)} \{ u(t)w(t) + w(t)\varphi(t) + \varphi(t)\theta(t) \\
&\qquad + \theta(s)[w(t) - \varphi(t)] - w(s)[u(t) + \varphi(t) + \theta(t)[\}, \\
P_3^3(s, t) &= \frac{1}{D(t)} \{ u(t)v(t) + v(t)\varphi(t) + u(t)\psi(t) \\
&\qquad + \theta(s)[\varphi(t) + v(t) + \psi(t)] \\
&\qquad\qquad + w(s)[u(t) + \varphi(t) + \psi(t)] \},
\end{aligned}
\right.
$$

où nous avons posé

$$
\begin{aligned}
D(t) = \varphi(t)[\theta(t) + v(t) + w(t)] + \psi(t)[u(t) + w(t) + \theta(t)] \\
+ u(t)v(t) + u(t)w(t) + v(t)\theta(t).
\end{aligned}
$$

Naturellement les fonctions φ, ψ, θ, u, v, w doivent être choisies de façon que $P_j^i(s, t)$ $(i \neq j)$ soient toutes positives. Si ces fonctions sont dérivables, les fonctions (12) deviennent

$$
(22)\quad \left\{
\begin{aligned}
\varphi' &= \Gamma_3^1(w - \varphi) - \Gamma_2^1(v + \varphi + \psi), \\
u' &= \Gamma_2^1(v - u) - \Gamma_3^1(u + w + \theta), \\
\psi' &= \Gamma_3^2(\theta - \psi) - \Gamma_1^2(u + \varphi + \psi), \\
v' &= \Gamma_1^2(u - v) - \Gamma_3^2(v + w + \theta), \\
\theta' &= \Gamma_2^3(\psi - \theta) - \Gamma_1^3(u + \varphi + \theta), \\
w' &= \Gamma_1^3(\varphi - w) - \Gamma_2^3(v + w + \psi).
\end{aligned}
\right.
$$

Donc il en résulte :

THÉORÈME 10. — *Le système de vecteurs probabilistiques le plus général pour $n = 3$ s'obtient en considérant dans* (19) *les solutions du système* (22) *de six équations différentielles linéaires, ou* Γ_2^1, Γ_3^1, Γ_1^2, Γ_3^2, Γ_1^3, Γ_2^3 *sont des fonctions réelles non positives quelconques dans la variable s.*

Si Γ_2^1, Γ_3^1, Γ_1^2, Γ_3^2, Γ_1^3, Γ_2^3 sont des constantes négatives ou nulles, nous obtenons un processus stationnaire avec trois états.

Nous montrerons maintenant que l'intégration du système (22) se réduit à l'intégration à deux systèmes des équations différentielles linéaires et homogènes avec deux inconnues et à deux quadratures.

En effet, prenant dans le système (22) comme nouvelle inconnue

$$x = \varphi - w, \tag{23}$$

en dérivant cette relation et compte tenu des expressions de φ' et w', nous trouvons

$$x' = -(\Gamma_2^1 + \Gamma_3^1 + \Gamma_1^3)x + (\Gamma_2^3 - \Gamma_2^1)(v + w + \psi).$$

Si nous prenons comme nouvelle inconnue

$$y = v + w + \psi, \tag{23'}$$

il en résulte

$$x' = -(\Gamma_2^1 + \Gamma_3^1 + \Gamma_1^3)x + (\Gamma_2^3 - \Gamma_2^1)y.$$

Dérivons alors y et compte tenu de (22), on a

$$y' = -(\Gamma_1^2 + \Gamma_3^2 + \Gamma_2^3)y + (\Gamma_1^3 - \Gamma_1^2)x.$$

Il en résulte que x, y sont des solutions d'un système linéaire et homogène du premier ordre donné par les équations

$$\left\{ \begin{aligned} x' &= (\Gamma_2^3 - \Gamma_2^1)y - (\Gamma_2^1 + \Gamma_3^1 + \Gamma_1^3)x, \\ y' &= (\Gamma_1^3 - \Gamma_1^2)x - (\Gamma_1^2 + \Gamma_3^2 + \Gamma_2^3)y. \end{aligned} \right. \tag{24}$$

En prenant comme nouvelles variables

$$\xi = v - u, \qquad \eta = u + w + \theta \tag{25}$$

et dérivant, compte tenu de (22), nous obtenons pour ξ' et η' le système.

$$\left\{ \begin{aligned} \xi' &= (\Gamma_3^1 - \Gamma_3^2)\eta - (\Gamma_2^1 + \Gamma_1^2 + \Gamma_3^2)\xi, \\ \eta' &= (\Gamma_2^1 - \Gamma_2^3)\xi - (\Gamma_3^1 + \Gamma_1^3 + \Gamma_2^3)\eta. \end{aligned} \right. \tag{26}$$

SERVICE DE

Les équations (23), (23′) et (25) nous montrent que nous pouvons considérer comme nouvelles inconnues, x, y, ξ, η, u, w au lieu de φ, v, ψ, c, u, w parce que nous avons

$$(26')\qquad \begin{cases} \varphi = x + w, & v = \xi + u; \\ \psi = y - \xi - u - w, & \theta = \eta - u - w. \end{cases}$$

D'autre part, les formules (22) nous donnent pour u', w' :

$$(27)\qquad u' = \Gamma^1_2 \xi - \Gamma^1_3 \eta, \qquad w' = \Gamma^3_1 x - \Gamma^3_2 y.$$

Il en résulte que l'intégration du système probabilistique (22) pour $n = 3$ se réduit à l'intégration des systèmes (24), (26) de deux équations linéaires et homogènes et à deux quadratures (27).

Considérons maintenant quelques cas particuliers. Si $\Gamma^1_2 = \Gamma^3_2$, alors la première équation du système (24) s'intègre par des quadratures et nous avons

$$x = \mathrm{A}\, e^{-\int_0^s (\Gamma^1_2 + \Gamma^1_3 + \Gamma^3_1)\, ds}.$$

La dernière équation (26) nous donne

$$\eta = \mathrm{B}\, e^{-\int_0^s (\Gamma^1_3 + \Gamma^3_1 + \Gamma^3_2)\, ds}$$

et les autres sont des équations linéaires en y et ξ.

Si $\Gamma^1_2 = \Gamma^3_2$ et $\Gamma^1_3 = \Gamma^2_3$, nous obtenons encore

$$\xi = \mathrm{C}\, e^{-\int_0^s (\Gamma^1_2 + \Gamma^2_1 + \Gamma^2_3)\, ds}.$$

Si $\Gamma^1_2 = \Gamma^3_2$, $\Gamma^1_3 = \Gamma^2_1 = \Gamma^3_1$, le système (22) s'intègre par une seule quadrature et nous avons

$$y = \mathrm{D}\, e^{-\int_0^s (\Gamma^2_1 + \Gamma^2_3 + \Gamma^3_2)\, ds}.$$

Si Γ^1_2, Γ^1_3, Γ^2_1, Γ^2_3, Γ^3_1, Γ^3_2 sont des constantes, le système dépend de l'équation caractéristique qui est la même pour les deux systèmes (24) et (26) :

$$(27')\qquad \rho^2 + (\Gamma^1_2 + \Gamma^1_3 + \Gamma^2_1 + \Gamma^2_3 + \Gamma^3_1 + \Gamma^3_2)\rho + \Gamma^1_2\Gamma^2_3 + \Gamma^1_2\Gamma^3_1 \\ + \Gamma^1_2\Gamma^3_2 + \Gamma^1_3\Gamma^2_1 + \Gamma^1_3\Gamma^2_3 + \Gamma^1_3\Gamma^3_2 + \Gamma^3_1\Gamma^2_1 + \Gamma^3_1\Gamma^2_3 + \Gamma^2_1\Gamma^3_2 = 0.$$

Observons alors que le système (24) se réduit à une équation de Riccati, en posant $Y = \frac{y}{x} \cdot$ En effet, si nous dérivons et compte tenu de (23) et (23'), on déduit

$$(28) \quad Y' = (\Gamma^1_3 - \Gamma^3_2)\,Y^2 + (\Gamma^2_1 + \Gamma^1_3 + \Gamma^3_1 - \Gamma^2_1 - \Gamma^2_3 - \Gamma^3_2)\,Y + \Gamma^3_1 - \Gamma^2_1.$$

De même, le système (26) se réduit à une équation de Riccati en posant $Z = \frac{\xi}{\eta}$ parce que en dérivant Z' et compte tenu de (26), il en résulte

$$(28') \quad Z' = (\Gamma^3_1 - \Gamma^1_2)\,Z^2 + (\Gamma^1_3 + \Gamma^3_1 + \Gamma^3_2 - \Gamma^1_2 - \Gamma^2_1 - \Gamma^2_3)\,Z + \Gamma^3_1 - \Gamma^2_1.$$

On observe que si nous faisons la transformation $Z = - Y - 1$, l'équation (28') se transforme en (28), donc l'intégration du système (22) dépend de l'intégration d'une seule équation de Riccati.

Nous avons donc :

THÉORÈME 11. — *L'intégration du système probabilistique* (22) *se réduit à l'intégration d'une seule équation de Riccati* (28) *et des quadratures.*

En effet, supposons que nous connaissons Y, solution de l'équation (28). Dans ce cas, nous avons $y = Yx$, et x est défini par la première équation (24) qui s'écrit

$$x' = (\Gamma^3_2 - \Gamma^1_2)\,Y_x - (\Gamma^1_2 + \Gamma^1_3 + \Gamma^3_1)\,x,$$

donc x s'obtient par une quadrature. De la même façon on obtient les autres fonctions.

Observons maintenant que le système (22) peut être résolu par rapport à Γ^1_2, Γ^1_3, Γ^2_1, Γ^2_3, Γ^3_1, Γ^3_2 et nous obtenons

$$(29) \quad \begin{cases} \Gamma^1_2 = -\dfrac{\varphi' u - \varphi u' + \varphi'(\theta + w) + u' w}{\Delta}, \\[2mm] \Gamma^1_3 = -\dfrac{u' \varphi - u \varphi' + u'(\psi + v) + \varphi' v}{\Delta}, \\[2mm] \Gamma^2_1 = -\dfrac{\psi' v - \psi v' + \psi'(\theta + w) + v' \theta}{\Delta}, \\[2mm] \Gamma^2_3 = -\dfrac{v' \psi - v \psi' + v'(\varphi + u) + \psi' u}{\Delta}, \\[2mm] \Gamma^3_1 = -\dfrac{\theta' w - \theta w' + \theta'(\psi + v) + \psi w'}{\Delta}, \\[2mm] \Gamma^3_2 = -\dfrac{w' \theta - w \theta' + w'(\varphi + u) + \varphi \theta'}{\Delta}; \end{cases}$$

où

$$\Delta = \varphi(\theta + v + w) + \psi(\theta + u + w) + \theta v + uv + uw.$$

Il en résulte que nous obtenons un système probabilistique pour $n = 3$, si nous prenons un système de fonctions φ, ψ, θ, u, v, w positives, avec la condition que les numérateurs de ces formules soient positifs. Mais on observe que ces numérateurs ont seulement des termes positifs si φ, ψ, θ, u, v, w sont des fonctions croissantes sauf les termes

$$\varphi' u - \varphi u', \qquad \psi' v - \psi v', \qquad \theta' w - \theta w' \tag{30}$$

qui interviennent en Γ_2^1, Γ_1^2, Γ_1^3 respectivement avec le signe $+$ tandis que dans Γ_3^1, Γ_3^2, Γ_2^3 ils apparaissent avec le signe $-$.

Donc dans le cas où ces termes sont nuls, le système est probabilistique si les fonctions φ, ψ, θ, u, v, w sont positives non décroissantes et il en est de même si elles sont négatives non croissantes. Le fait que les termes de (30) sont nuls, signifie que les rapports $\frac{\varphi}{u}$, $\frac{\psi}{v}$, $\frac{\theta}{w}$ sont des constantes. On peut prendre

$$\varphi = \alpha\Phi, \qquad u = \beta\Phi, \qquad \psi = \gamma\Psi, \qquad v = \delta\Psi, \qquad \theta = \lambda\Theta, \qquad w = \mu\Theta, \tag{31}$$

où α, β, γ, δ, λ, μ sont des constantes positives et Φ, Ψ, Θ sont des fonctions quelconques. Dans ce cas les formules (29) s'écrivent

$$\left\{\begin{aligned} \Gamma_2^1 &= -\frac{m}{\Delta}\Phi'\Theta, \\ \Gamma_3^1 &= -\frac{n}{\Delta}\Phi'\Psi, \\ \Gamma_1^2 &= -\frac{p}{\Delta}\Psi'\Theta, \\ \Gamma_3^2 &= -\frac{n}{\Delta}\Psi'\Phi, \\ \Gamma_1^3 &= -\frac{p}{\Delta}\Theta'\Psi, \\ \Gamma_2^3 &= -\frac{m}{\Delta}\Theta'\Phi, \end{aligned}\right. \tag{31'}$$

où

$$\Delta = m\Phi\Theta + n\Phi\Psi + p\Psi\Theta \tag{32}$$

et où

$$m = \alpha\lambda + \alpha\mu + \beta\mu, \qquad n = \beta\gamma + \beta\delta + \alpha\delta, \qquad p = \gamma\lambda + \gamma\mu + \delta\lambda,$$

Nous obtenons donc un système probabilistique si m, n, p sont des constantes positives (négatives) et Φ, Ψ, Θ, fonctions positives (non décroissantes) ou négatives (non croissantes).

Supposons maintenant dans les formules (31) que les fonctions Φ, Ψ, Θ sont égales. Alors les formules (29) s'écrivent

$$\Gamma_2^1 = -\frac{m\Phi'}{(m+n+p)\Phi},$$
$$\Gamma_3^1 = -\frac{n\Phi'}{(m+n+p)\Phi},$$
$$\Gamma_1^2 = -\frac{p\Phi'}{(m+n+p)\Phi},$$
$$\Gamma_3^2 = -\frac{n\Phi'}{(m+n+p)\Phi},$$
$$\Gamma_1^3 = -\frac{p\Phi'}{(m+n+p)\Phi},$$
$$\Gamma_2^3 = -\frac{m\Phi'}{(m+n+p)\Phi},$$

Donc on obtient une solution stationnaire si $\frac{\Phi'}{\Phi}$ est une constante, c'est-à-dire si $\Phi = e^{ks}$, où k est une constante. Nous obtenons ainsi :

THÉORÈME 12. — *Si dans les formules* (31), $\Phi = \Psi = \Theta = e^{ks}$, *on obtient une solution probabilistique stationnaire si k est une constante positive et si m, n, p sont des constantes positives.*

Observons maintenant que si l'on tient compte des formules (31) dans les formules (21), on obtient un système de probabilités qui dépendent de trois constantes arbitraires et trois fonctions arbitraires qui s'écrit

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned}
P_1^1(s, t) &= \frac{p\Psi(t)\Theta(t) + \Psi(s)[n\Psi(t) + m\Theta(t)]}{D(t)},\\
P_2^1(s, t) &= \frac{m\Theta(t)[\Phi(t) - \Phi(s)]}{D(t)},\\
P_3^1(s, t) &= \frac{n\Psi(t)[\Phi(t) - \Phi(s)]}{D(t)},\\
P_1^2(s, t) &= \frac{p\Theta(t)[\Psi(t) - \Psi(s)]}{D(t)},\\
P_2^2(s, t) &= \frac{m\Phi(t)\Theta(t) + \Psi(s)[n\Phi(t) + p\Theta(t)]}{D(t)},\\
P_3^2(s, t) &= \frac{n\Phi(t)[\Psi(t) - \Psi(s)]}{D(t)},\\
P_1^3(s, t) &= \frac{p\Psi(t)[\Theta(t) - \Theta(s)]}{D(t)},\\
P_2^3(s, t) &= \frac{m\Phi(t)[\Theta(t) - \Theta(s)]}{D(t)},\\
P_3^3(s, t) &= \frac{n\Phi(t)\Psi(t) + \Theta(s)[m\Phi(t) + p\Psi(t)]}{D(t)},
\end{aligned}\right.$$

où

$$D(t) = n\Phi(t)\Psi(t) + p\Psi(t)\Theta(t) + m\Theta(t)\Phi(t).$$

Nous avons donc :

THÉORÈME 13. — *Les formules* (33) *définissent un système de probabilités si m, n, p sont positives et si* Φ, Ψ, Θ *sont des fonctions positives non décroissantes* (*ou négatives non croissantes*).

Autrement dit il n'est pas plus nécessaire de savoir si Φ, Ψ, Θ sont dérivables ou non.

Nous considérons maintenant le cas particulier quand $u = \varphi$, $v = \psi$, $w = \theta$, donc

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = \lambda = \mu = 1.$$

Dans ce cas le déterminant $\Delta = |\mu_a^i|$, s'écrit

$$(34)\qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{3}+2\varphi & \frac{1}{3}-\varphi & \frac{1}{3}-\varphi \\ \frac{1}{3}-\psi & \frac{1}{3}+2\psi & \frac{1}{3}-\psi \\ \frac{1}{3}-\theta & \frac{1}{3}-\theta & \frac{1}{3}+2\theta \end{vmatrix}$$

et l'on peut montrer directement que le système de vecteurs (19) est probabilistique et φ, ψ, θ sont fonctions non décroissantes ou négatives non croissantes sans supposer que φ, ψ, θ sont dérivables.

En effet dans ce cas, nous avons

$$\Delta = 3(\varphi\psi + \psi\theta + \theta\varphi)$$

et les valeurs de λ_j^i $(i, j = 1, 2, 3)$ s'écrivent

$$(34')\quad \begin{cases} \lambda_1^1 = \dfrac{\psi+\theta+3\psi\theta}{\Delta}, & \lambda_1^2 = \dfrac{3\psi\theta-\theta}{\Delta}, & \lambda_1^3 = \dfrac{3\psi\theta-\psi}{\Delta}, \\ \lambda_2^1 = \dfrac{3\varphi\theta-\theta}{\Delta}, & \lambda_2^2 = \dfrac{\varphi+\theta+3\varphi\theta}{\Delta}, & \lambda_2^3 = \dfrac{3\varphi\theta-\varphi}{\Delta}, \\ \lambda_3^1 = \dfrac{3\varphi\psi-\psi}{\Delta}, & \lambda_3^2 = \dfrac{3\varphi\psi-\varphi}{\Delta}, & \lambda_3^3 = \dfrac{\varphi+\psi+3\varphi\psi}{\Delta}, \end{cases}$$

de sorte que nous trouvons

$$
(35)\qquad \left\{
\begin{aligned}
P_1^1(s,t) &= \frac{\theta(t)\psi(t)+\varphi(s)[\theta(t)+\psi(t)]}{\Delta(t)},\\
P_2^1(s,t) &= \frac{\theta(t)[\varphi(t)-\varphi(s)]}{\Delta(t)},\\
P_3^1(s,t) &= \frac{\psi(t)[\varphi(t)-\varphi(s)]}{\Delta(t)},\\
P_1^2(s,t) &= \frac{\theta(t)[\psi(t)-\psi(s)]}{\Delta(t)},\\
P_2^2(s,t) &= \frac{\varphi(t)\theta(t)+\psi(s)[\theta(t)+\varphi(t)]}{\Delta(t)},\\
P_3^2(s,t) &= \frac{\varphi(t)[\psi(t)-\psi(s)]}{\Delta(t)},\\
P_1^3(s,t) &= \frac{\psi(t)[\theta(t)-\theta(s)]}{\Delta(t)},\\
P_2^3(s,t) &= \frac{\varphi(t)[\theta(t)-\theta(s)]}{\Delta(t)},\\
P_3^3(s,t) &= \frac{\varphi(t)\psi(t)+\theta(s)[\varphi(t)+\psi(t)]}{\Delta(t)},
\end{aligned}
\right.
$$

ce qui nous montre que $P_j^i(s,t)$ $(i, j = 1, 2, 3)$ sont en effet positives, si φ, ψ, θ sont positives non décroissantes ou négatives non croissantes.

D'autre part en ce cas aussi on peut remarquer que les probabilités (35) ne changent pas si l'on change en même temps le signe des fonctions φ, ψ, θ, donc nous avons :

Théorème 14. — *Les formules* (35) *définissent un système de probabilités si* φ, ψ, θ *sont des fonctions positives non décroissantes.*

6. **Exemples de systèmes de probabilités pour** $n > 3$. — Nous montrerons maintenant que les formules (35) du cas $n = 3$ se généralisent pour n quelconque. Pour cela donnons premièrement une nouvelle forme aux formules (35) en divisant les nominateurs et les dénominateurs avec $\varphi(t)\,\psi(t)\,\theta(t)$. Nous avons alors

$$
P_1^1(s,t) = \frac{\dfrac{1}{\varphi(t)}+\dfrac{\varphi(s)}{\varphi(t)}\left[\dfrac{1}{\theta(t)}+\dfrac{1}{\psi(t)}\right]}{S(t)}, \qquad \left(S(t) = \frac{1}{\varphi(t)}+\frac{1}{\psi(t)}+\frac{1}{\theta(t)}\right),
$$

$$
P_1^2(s,t) = \frac{\psi(t)-\psi(s)}{\varphi(t)\psi(t)S(t)}
$$

et des formules analogues.

Il en résulte qu'en notant φ, ψ, θ avec φ_1, φ_2, φ_3 nous obtenons un système de probabilités fondamentales, en prenant

$$(36)\qquad \begin{cases} P^i_j(s,t) = \dfrac{\varphi_i(t)-\varphi_i(s)}{\varphi_i(t)\varphi_j(t)S(t)} & (i\neq j), \\ P^i_i(s,t) = \dfrac{\varphi_i(s)}{\varphi_i(t)} + \dfrac{\varphi_i(t)-\varphi_i(s)}{\varphi_i^2(t)S(t)} & (i,j=1,2,3), \end{cases}$$

ces formules peuvent s'étendre pour les indices qui varient entre 1 et n. Dans ce cas, S a l'expression

$$(37)\qquad S = \frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2} + \ldots + \frac{1}{\varphi_n}.$$

De même on peut supposer que n tend vers l'infini avec la condition que S soit convergente.

Nous allons montrer maintenant que le système défini par le déterminant qui généralise (34) :

$$(38)\qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{n}+(n-1)\varphi_1 & \frac{1}{n}-\varphi_1 & \ldots & \frac{1}{n}-\varphi_1 \\ \frac{1}{n}-\varphi_2 & \frac{1}{n}+(n-1)\varphi_2 & \ldots & \frac{1}{n}-\varphi_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \frac{1}{n}-\varphi_n & \frac{1}{n}-\varphi_n & \ldots & \frac{1}{n}+(n-1)\varphi_n \end{vmatrix}$$

engendre les probabilités (36) $(i, j = 1, \ldots, n)$, où φ_i sont des fonctions positives non décroissantes ou négatives non croissantes.

En effet, observons que dans ce cas, nous avons

$$(38')\qquad m^i_a = \varphi_i \qquad (i\neq a)$$

et donc les équations (12) s'écrivent

$$\varphi'_i = \sum_{j\neq i\neq a} \Gamma^i_j\varphi_j - (n-1)\Gamma^i_a\varphi_a - \varphi_i\sum_{j\neq i}\Gamma^i_j,$$

équations qui s'écrivent encore sous la forme

$$(39)\qquad \varphi'_i = \sum_{j\neq i}\Gamma^i_j\varphi_j - n\Gamma^i_a\varphi_a - \varphi_i\sum_{j\neq i}\Gamma^i_j.$$

Par suite étant données deux valeurs, a, b, différentes de i, il en résulte par soustraction qu'il faut avoir

$$\Gamma^i_a\varphi_a = \Gamma^i_b\varphi_b,$$

Nous avons des formules de la forme

$$\Gamma^i_a = \frac{k^i}{\varphi_a},$$

qui introduites dans les équations (39), nous donnent

$$\varphi'_i = -\varphi_i k^i \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\varphi_j}, \qquad k^i = -\frac{\varphi'_i}{\varphi_i \mathrm{S}}$$

et donc

$$\Gamma^i_a = -\frac{\varphi'_i}{\varphi_a \varphi_i \mathrm{S}} \qquad (a \neq i), \tag{40}$$

ce qui nous montre qu'en effet Γ^i_a sont non positives si φ_i sont des fonctions positives non décroissantes et non des fonctions négatives non croissantes, donc le système de vecteurs donné par la formule (38) est dans ces conditions un système probabilistique.

Pour trouver les probabilités fondamentales, calculons premièrement le déterminant donné par la formule (38). On observe pour cela que si nous ajoutons à la première colonne les autres et puis les soustrairons à la première ligne des autres, nous obtenons pour Δ comme un déterminant de l'ordre $n-1$ de la forme

$$\begin{vmatrix} (n-1)\varphi_2 + \varphi_1 & -\varphi_2 + \varphi_1 & \ldots & -\varphi_2 + \varphi_1 \\ -\varphi_3 + \varphi_1 & (n-1)\varphi_3 + \varphi_1 & \ldots & -\varphi_3 + \varphi_1 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ -\varphi_n + \varphi_1 & -\varphi_n + \varphi_1 & \ldots & (n-1)\varphi_n + \varphi_1 \end{vmatrix}.$$

Cette formule nous montre que le déterminant Δ est un polynome homogène du ~~grade~~ $(n-1)$ en $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ et que le coefficient A de φ est

$$\mathrm{A} = \begin{vmatrix} (n-1)\varphi_2 & -\varphi_2 & \ldots & -\varphi_2 \\ -\varphi_3 & (n-1)\varphi_3 & \ldots & -\varphi_3 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ -\varphi_n & -\varphi_n & \ldots & (n-1)\varphi_n \end{vmatrix}.$$

Si dans ce déterminant nous sommons les autres colonnes à la première et puis la première colonne aux autres, nous obtenons

$$\mathrm{A} = n^{n-2}\varphi_2 \ldots \varphi_n.$$

Compte tenu que Δ est une fonction symétrique qui dépend de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, il résulte que nous avons la formule

$$\Delta = n^{n-2}\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_n \mathrm{S} \qquad \left(\mathrm{S} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\varphi_i}\right). \tag{41}$$

Par conséquent, le déterminant Δ est différent de zéro si une des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ est non nulle.

Pour calculer les probabilités P^i_j, on peut calculer premièrement le système dual (λ^a_i) et puis de considérer les formules (2').

Utilisons les formules (13'), en tenant compte de (38')

$$\sum_{j\neq i} P^i_j \varphi_i(t) - \sum_{j\neq i\neq a} P^i_j \varphi_j(t) + (n-1)P^i_a \varphi_a(t) = \varphi_i(t) - \varphi_i(s) \qquad (a\neq i),$$

formules qui peuvent s'écrire

$$(42) \qquad \sum_{j\neq i} P^i_j [\varphi_i(t) - \varphi_j(t)] + n P^i_a \varphi_a(t) = \varphi_i(t) - \varphi_i(s) \qquad (a \neq i).$$

Ces formules nous montrent que si a, b sont deux indices différents de i, ce qui peut avoir lieu si $n \geqq 3$, il en résulte que nous avons

$$(43) \qquad P^i_a \varphi_a = P^i_b \varphi_b \quad (a,\, b\neq i), \qquad P^i_a = \frac{q_i}{\varphi_a}, \quad i\neq a$$

Compte tenu de ces formules dans les équations (42), nous obtenons

$$q_i \varphi_i(t)\left[S(t) - \frac{1}{\varphi_i(t)}\right] - (n-1)q_i + nq_i = \varphi_i(t) - \varphi_i(s),$$

où $S(t)$ est donné par la formule (37). Nous trouvons

$$q_i = \frac{\varphi_i(t) - \varphi_i(s)}{S(t)\varphi_i(t)}$$

et par conséquent les formules (39) nous donnent

$$(44) \qquad P^i_j(s,\, t) = \frac{\varphi_i(t) - \varphi_i(s)}{\varphi_i(t)\varphi_j(t)S(t)} \qquad (i\neq j).$$

Il en résulte que [10]

$$(44)' \qquad P^i_i(s,\, t) = 1 - \sum_{j\neq i} P^i_j(s,\, t) = \frac{\varphi_i(s)}{\varphi_i(t)} + \frac{\varphi_i(t) - \varphi_i(s)}{\varphi_i^2(t)S(t)}.$$

Donc nous avons :

THÉORÈME 15. — *Si les vecteurs* (μ) *sont définis par les formules* (38), *les probabilités fondamentales sont définies par les formules* (44) *et* (44').

---

(10) $$\sum_{j\neq i} P^i_j(s,\, t) = \frac{\varphi_i(t) - \varphi_i(s)}{\varphi_i(t)S(t)} \sum_{j\neq i} \frac{1}{\varphi_j(t)} = \frac{\varphi_i(t) - \varphi_i(s)}{\varphi_i(t)S(t)}\left(S - \frac{1}{\varphi_i(t)}\right).$$

Nous voulons maintenant trouver les conditions dans lesquelles les formules (44) et (44′) constituent un système symétrique de probabilités. Pour cela les formules (44) nous disent que nous avons

$$\frac{\varphi_i(t) - \varphi_i(s)}{\varphi_i(t)\,\varphi_j(t)} = \varphi_j(t) - \varphi_j(s),$$

donc les différences $\varphi_j(t) - \varphi_i(t)$ sont des constantes. On peut donc prendre

$$\varphi_j(t) = \varphi_i(t) + a_j \qquad (j = 2, \ldots, n).$$

En tenant compte de la formule (44′), il en résulte

$$P_1^1(s, t) = \frac{\varphi_1(s)}{\varphi_1(t)} + \frac{\varphi_1(t) - \varphi_1(s)}{\varphi_1^2(t)\,S(t)},$$

$$P_j^j(s, t) = \frac{\varphi_1(s) + a_j}{\varphi_1(t) + a_j} + \frac{\varphi_1(t) - \varphi_1(s)}{[\varphi_1(t) + a_j]^2\,S(t)} \qquad (j = 2, \ldots, n).$$

Considérons maintenant la différence entre P_2^2 et P_1^1. Nous avons

$$\frac{\varphi_1(s) + a_2}{\varphi_1(t) + a_2} + \frac{\varphi_1(t) - \varphi_1(s)}{[\varphi_1(t) + a_2]^2\,S(t)} - \frac{\varphi_1(s)}{\varphi_1(t)} - \frac{\varphi_1(t) - \varphi_1(s)}{\varphi_1^2(t)\,S(t)}.$$

En tenant compte que nous avons

$$S(t) = \frac{1}{\varphi_1(t)} + \frac{1}{\varphi_1(t) + a_2} + \ldots + \frac{1}{\varphi_1(t) + a_n},$$

la différence devient

$$\frac{a_2[\varphi_1(t) - \varphi_1(s)]}{\varphi_1^2(t)[\varphi_1(t) + a_2]^2} \sum_{k=3}^{n} \frac{\varphi_1(t)[\varphi_1(t) + a_2]}{\varphi_1(t) + a_k},$$

Donc elle peut être nulle seulement si a_2 est nulle.

Il en résulte que (44) et (44′) sont symétriques pour $n \geqq 3$ seulement si toutes les fonctions sont égales entre elles.

Si l'on suppose $\varphi_i = \varphi$, les probabilités (44) et (44′) sont données par les formules

$$(45) \qquad \begin{cases} P_i^i(s, t) = \dfrac{1}{n}\left[1 + (n-1)\dfrac{\varphi(s)}{\varphi(t)}\right], \\[2ex] P_j^i(s, t) = \dfrac{1}{n}\left[1 - \dfrac{\varphi(s)}{\varphi(t)}\right] \end{cases}$$

quels que soient i et $j = 1, 2, \ldots, n$.

Nous avons :

THÉORÈME 16. — *Les probabilités (44) et (44′) sont symétriques seulement si elles sont données par les formules (45) où φ est une fonction positive non décroissante.*

Par suite nous avons des exemples, pour chaque valeur de n, de probabilités fondamentales qui dépendent de n fonctions arbitraires $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. D'autre part il est facile d'observer que nous obtenons un système plus général de probabilités, en prenant

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} P^i_j(s,t) &= \frac{\varphi_i(t)-\varphi_i(s)}{\varphi_i(t)\varphi_j(t)}\,\frac{c_j}{\sum(t)} \qquad \left[\sum(t) = \frac{c_1}{\varphi_1}+\ldots+\frac{c_n}{\varphi_n}\right],\\ P^i_i(s,t) &= \frac{\varphi_i(t)-\varphi_i(s)}{\varphi_i(t)}\left[1-\frac{c_i}{\varphi_i(t)\sum(t)}\right],\end{aligned}\right.$$

où c_j sont des constantes positives ou nulles mais $\varphi_i (i=1, 2, \ldots, n)$ sont des fonctions positives non décroissantes ou des fonctions négatives non croissantes, ce qui généralise les formules (33).

Revenons au cas des formules (18) et observons que ces formules peuvent se généraliser en prenant

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} P^i_i(s,t) &= \frac{\varphi(s)+\varphi_i(t)-\varphi_i(s)}{\varphi(t)},\\ P^i_j(s,t) &= \frac{\varphi_j(t)-\varphi_j(s)}{\varphi(t)} \qquad (i\neq j),\end{aligned}\right.$$

où $\varphi=\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n$ mais φ_i sont des fonctions positives non décroissantes ou des fonctions négatives non croissantes. En effet, les formules satisfont évidemment les conditions (1) et (3). De même nous avons pour $i\neq j$:

$$P^i_j(s,t) = \sum_{k\neq i\neq j} P^i_k(s,u)P^k_j(u,t) + P^i_i(s,u)P^i_j(u,t) + P^i_j(s,u)P^j_j(u,t),$$

formules qui s'écrivent, compte tenu de la relation (47), sous la forme

$$\begin{aligned} P^i_j(s,t) = &\left\{\sum_{k\neq i\neq j}[\varphi_k(u)-\varphi_k(s)]+\varphi(s)+\varphi_i(u)-\varphi_i(s)\right\}\frac{\varphi_j(t)-\varphi_j(u)}{\varphi(u)\varphi(t)}\\ &+\frac{[\varphi_j(u)-\varphi_j(s)][\varphi(u)+\varphi_j(t)-\varphi_j(u)]}{\varphi(u)\varphi(t)},\end{aligned}$$

qui nous donne

$$(48)\qquad P^i_j(s,t) = \frac{\varphi_j(t)-\varphi_j(s)}{\varphi(t)},$$

donc les formules (2) sont vérifiées pour $i\neq j$.

De même on peut montrer qu'elles sont vérifiées pour $i=j$.

Les formules (47) nous donnent par conséquent un système de probabilités fondamentales si $\varphi_i(s)$ sont positives non décroissantes ou négatives non croissantes.

Nous montrerons qu'on peut obtenir un système probabilistique stationnaire si nous considérons les fonctions m^i_a proportionnelles avec des constantes multipliées avec la même fonction e^{ks} si

$$m^i_a = c^i_a e^{ks},$$

où c^i_a sont des constantes. En effet, dans ce cas les formules (12), s'écrivent

$$kc^i_a = \sum_{j\neq i\neq a} \Gamma^i_j c^j_a - \Gamma^i_a \sum_{b\neq a} c^a_b - c^i_a \sum_{j\neq i} \Gamma^i_j \tag{49}$$

et par conséquent Γ^i_j sont des constantes, elles étaient des constantes non positives, cas qui a été considéré pour $n = 3$. Nous allons remarquer aussi que les probabilités (47) sont symétriques si la différence des fonctions est une constante comme dans le cas $n = 2$.

7. Vecteurs probabilistiques le long d'une courbe. — Étant donnée une courbe plane (C) :

$$x = f(s), \qquad y = \varphi(s),$$

nous pouvons nous demander comment on peut définir deux vecteurs probabilistiques le long de cette courbe, un de ces vecteurs étant le vecteur tangent. Alors nous pouvons prendre [18]

$$\mu^1_2 = \beta, \qquad \mu^2_2 = \alpha \qquad \left(\alpha = \frac{dx}{ds},\ \beta = \frac{dy}{ds}\right). \tag{50}$$

Il en résulte que le deuxième vecteur est défini par les relations

$$\sum_{a=1}^{2} \mu^i_a = 1,$$

donc nous avons

$$\mu^1_1 = 1 - \beta, \qquad \mu^2_1 = 1 - \alpha.$$

D'autre part (9′) pour $n = 2$, s'écrit

$$\frac{d\mu^1_2}{ds} = \frac{d\beta}{ds} = \Gamma^1_1 \beta + \Gamma^1_2 \alpha,$$

$$\frac{d\mu^2_2}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} = \Gamma^2_1 \beta + \Gamma^2_2 \alpha,$$

Parce que nous avons

$$\Gamma^1_2 = -\Gamma^1_1, \qquad \Gamma^2_1 = -\Gamma^2_2,$$ (10)

il en résulte les formules

$$\Gamma^1_1 = \frac{1}{\beta-\alpha}\frac{d\beta}{ds}, \qquad \Gamma^2_2 = \frac{1}{\alpha-\beta}\frac{d\alpha}{ds}, \tag{51}$$

qu'il faut définir Γ^1_1, Γ^2_2 comme des fonctions positives le long de la courbe.

Les formules (51) nous montrent qu'il faut supposer $\alpha \neq \beta$ et que $\frac{d\alpha}{ds}$ ou $\frac{d\beta}{ds}$ ne sont pas nulles, donc la tangente n'est pas parallèle à la première bissectrice et x, y ne passent pas par un extrémum.

Ainsi supposons que nous choisissons comme origine O un point dans lequel la tangente est parallèle à la première bissectrice et où les axes ainsi que la courbe sont situés sous la première bissectrice. Si nous déplaçons dans le sens où la variable x est positive, $\alpha - \beta$ croît et $\frac{d\alpha}{ds}$ est positive, donc Γ^2_2 est positive. De même Γ^1_1 est positive et cette propriété reste valable le long de la courbe jusqu'à la rencontre d'un point où x, ou y passent par un extrémum ou un point où la tangente est parallèle à la première bissectrice. Nous avons donc :

THÉORÈME 17. — *Dans l'intervalle* OP *où* P *est un point où x ou y passent par un extrémum, on peut définir un processus de Markov au long de la courbe* (C).

Par suite sur une courbe fermée nous ne pouvons pas définir un processus de Markov le long de la courbe entière, un de ces vecteurs étant le vecteur tangent à la courbe.

Supposons maintenant que la courbe (C) est donnée par l'équation

$$y = f(x), \tag{52}$$

où $f(x)$ est une fonction continue et dérivable de sorte qu'à chaque valeur de x dans l'intervalle (α, β) correspond une valeur pour y. Les paramètres directeurs de la tangente sont donc dans le point (x, y) de la courbe donnés par 1 et $f'(x)$. Prenons alors comme deuxième vecteur probabilistique le vecteur tangent à la courbe. Cela revient à prendre

$$\begin{aligned} \mu^1_1 &= 1 - f'(x), & \mu^2_1 &= 0, \\ \mu^1_2 &= f'(x), & \mu^2_2 &= 1. \end{aligned}$$

Les formules de Kolmogorov, $\sum_{j=1}^{2} \Gamma^i_j = 0$ et (9′) nous donnent

$$\begin{aligned} \Gamma^1_1 &= \frac{f''(x)}{f'(x)-1}, & \Gamma^1_2 &= -\Gamma^1_1, \\ \Gamma^2_1 &= 0, & \Gamma^2_2 &= 0. \end{aligned}$$

Supposons que nous avons un point (x_0, y_0) situé sur la courbe où la tangente à la courbe est la première bissectrice et si nous développons en série autour du point x_0, y_0, on obtient

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots.$$

Il en résulte donc que si la courbe est située sous la première bissectrice c'est-à-dire $f'(x) - 1 < 0$, alors $f''(x)$ est négative, donc Γ_1^1 est positive et cette propriété se conserve quand

$$(52') \qquad f'(x) - 1 < 0, \qquad f''(x) < 0,$$

donc aussi longtemps que nous ne trouvons pas un point $P_1(x_1, y_1)$ où la tangente est parallèle à la première bissectrice ou nous ne rencontrons pas un point $P''(x'', y'')$ où $f''(x'')$ soit zéro, donc un point d'inflexion.

Nous avons :

THÉORÈME 18. — *Étant donné un point ordinaire* $P_0(x_0, y_0)$ *de la courbe* (52) *où la tangente est parallèle à la première bissectrice, la courbe étant sous cette tangente nous pouvons définir un processus probabilistique au long de la courbe* (C) *jusqu'à un point* P_1 *ou un point* P_2.

Il en résulte donc que s'il n'existe pas à la droite de P_0 des points P_1 ou P_2, le processus peut s'étendre dans l'intervalle (x, ∞).

Considérons par exemple la parabole (P)

$$x^2 + 2py = 0 \qquad (p > 0).$$

Dans ce cas :

$$y = -\frac{x^2}{2p}, \qquad \Gamma_1^1 = \frac{1}{x+p},$$

donc nous avons un processus probabilistique pour $x > -p$. En tenant compte que dans ce cas, nous avons

$$\mu_1^1 = 1 + \frac{x}{p}, \qquad \mu_1^2 = 0,$$

$$\mu_2^1 = -\frac{x}{p}, \qquad \mu_2^2 = 1,$$

il en résulte en tenant compte des formules (2")

$$\lambda_1^1 = \frac{p}{x+p}, \qquad \lambda_1^2 = 0,$$

$$\lambda_2^1 = \frac{x}{x+p}, \qquad \lambda_2^2 = 1$$

et les probabilités sont données par les formules (2')

$$(53) \qquad \begin{cases} P_1^1(s, t) = \dfrac{s+p}{t+p}, & P_2^1(s, t) = \dfrac{t-s}{t+p}, \\ P_1^2(s, t) = 0, & P_2^2(s, t) = 1. \end{cases}$$

Nous avons donc :

THÉORÈME 19. — *Le système de probabilités* (53) *peut être considéré associé à la parabole* (P).

On observe que pour p plus grand, l'intervalle $(-p, \infty)$ où est défini le processus est plus étendu.

Dans le cas d'une courbe quelconque (52), nous avons

$$\lambda_1^1 = \frac{1}{1-f'(x)}, \qquad \lambda_1^2 = 0,$$

$$\lambda_2^1 = -\frac{f'(x)}{1-f'(x)}, \qquad \lambda_2^2 = 1$$

et les probabilités sont définies analoguement par les formules

$$(54) \qquad \begin{cases} P_1^1(s, t) = \dfrac{1-f'(s)}{1-f'(t)}, & P_2^1(s, t) = \dfrac{f'(s)-f'(t)}{1-f'(t)}, \\ P_1^2(s, t) = 0, & P_2^2(s. t) = 1. \end{cases}$$

Nous avons donc :

THÉORÈME 20. — *A toute courbe plane* (52), (52'), *on peut associer les probabilités définies par les formules* (54).

Supposons maintenant que nous avons

$$(55) \qquad f(x) = x - a^2 x^2 + \frac{x^3}{3}.$$

En ce cas, les conditions (52') s'écrivent

$$x(x-2a^2) < 0, \qquad -a^2 + x < 0$$

et elles sont vérifiées si nous avons

$$0 < x < a^2.$$

Quant aux formules (54), elles nous donnent

$$(56) \qquad \begin{cases} P_1^1(s, t) = \dfrac{s(2a^2-s)}{t(2a^2-t)}, & P_2^1(s, t) = \dfrac{(t-s)(2a^2-t-s)}{t(2a^2-t)}, \\ P_1^2(s, t) = 0, & P_2^2(s, t) = 1. \end{cases}$$

On voit donc que les probabilités (56) sont associées à la parabole cubique

$$y = x - a^2 x^2 + \frac{x^3}{3} \tag{57}$$

dans l'intervalle $0 < x < a^2$.

CHAPITRE II.

Processus markoviens multiples.

1. Métriques probabilistiques. — Considérons maintenant un processus markovien de multiplicité p avec un nombre m d'états dépendant d'un nombre quelconque de paramètres (chap. I, § 6). Nous montrerons qu'à un tel processus on peut y associer une métrique riemanienne.

Pour cela soit une variété $V_p(s^1, s^2, \ldots, s^p)$ de dimension p et P^i_j des fonctions de deux séries de variables $s^1, s^2, \ldots, s^p, t^1, t^2, \ldots, t^p$, donc fonctions des deux points $P(s)$ et $Q(t)$ de la variété V_p. Les indices i et j varient de 1 à n. Dans le cas probabilistique, $n = m^p$.

Supposons de même que $P^i_j(s, t)$ ont les propriétés des probabilités fondamentales, donc elles satisfont les équations fonctionnelles :

$$\text{(1)} \quad \left\{ \begin{aligned} & P^i_j(s, s) = \delta^i_j, \qquad \sum_{j=1}^{n} P^i_j(s, t) = 1, \\ & P^i_j(s, t) = P^i_k(s, u)\, P^k_j(u, t), \qquad 0 \leqq s \leqq t \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned} \right.$$

où nous désignons par $u(u^1, u^2, \ldots, u^n)$ un autre système de variables $s^1, s^2, \ldots, s^p$ donc les coordonnées d'un autre point de V_p.

Supposons que pour

$$s^i \leqq t^i,$$

nous avons

$$P^i_j(s, t) \geqq 0. \tag{1'}$$

D'après les résultats de Fréchet [11] et de Aczel [12], les équations fonctionnelles (1) ont comme dans le cas d'une seule variable, les solutions

$$\text{(2)} \qquad P^i_j(s, t) = \mu^i_a(s)\, \lambda^a_j(t), \qquad \mu^i_a(s)\, \lambda^a_j(s) = \delta^i_j \qquad a = 1, 2 \ldots n,$$

---

[11] M. Fréchet, *loc. cit.*, p. 229.

[12] J. Aczel, *Vorlesungen über Fonctional gleichungen*, Deutcher Verlag, Berlin, 1961, p. 247.

et

$$\sum_{a=1}^{n} \mu_a^i(s) = 1, \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^a(s) = 1. \tag{3}$$

Les dernières équations nous montrent que le déterminant $\Delta = |\mu_a^i(s)|$ de n fonctions $\mu_a^i(s)$ est différent de zéro, car en notant avec Δ' le déterminant $|\lambda_j^a(s)|$ nous avons $\Delta\Delta' = 1$. De même il résulte que $\lambda_j^a(s)$ sont les réciproques des éléments du déterminant $|\mu_a^i|$, c'est-à-dire nous avons les formules

$$\mu_b^i(s)\,\lambda_i^a(s) = \delta_b^a \qquad b = 1, 2, \ldots, n.$$

Donc si nous interprétons les μ_a^i comme les paramètres d'un système de congruences indépendantes dans l'espace à n dimensions, alors λ_j^a sont les moments de ces congruences. Par suite nous avons :

THÉORÈME 1. — *Étant donné un système de congruences indépendantes dans un espace* S_n *à n dimensions, où* μ_a^i *sont des paramètres et* λ_j^a *les moments supposés fonctions des variables* $s^1, s^2, \ldots, s^p$ *satisfaisant les dernières équations* (2), *nous avons une solution* $P_j^i(s, t)$ *des équations* (1) *donnée par les formules* (2).

De même il faut remarquer qu'on peut définir un système de probabilités par les formules

$$P_b^a(s, t) = \lambda_i^a(s)\,\mu_b^i(t).$$

On voit donc que si l'on donne la probabilité fondamentale $P_j^i(s, t)$, cela revient à donner sur la variété V_p un déterminant $|\lambda_j^a| \neq 0$ satisfaisant les conditions

$$\lambda_j^a(t) = P_j^i(s, t)\,\lambda_i^a(s), \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^a = 1,$$

ce qui définit les λ_j^a avec les valeurs dans un point.

Étant donné un processus markovien continu (2), cela signifie se donner un système de n vecteurs contravariants $\mu_a^i(s)$ $(a = 1, 2, \ldots, n)$, de façon que si l'on considère le système de n vecteurs covariants dual $\lambda_i^a(s)$ $(a = 1, 2, \ldots, n)$, les équations (3) soient vérifiées. Nous dirons qu'en ce cas les vecteurs μ_a^i sont dés vecteurs probabilistiques (13).

Si l'on considère les formes de Pfaff (14) :

$$d\sigma^a = \lambda_i^a\, ds^i \tag{3'}$$

(13) G. G. VRANCEANU, *Théorie géométrique des chaînes probabilistiques* [*Bull. Acad. roy. Belgique* (Classe des Sciences), 5e série, t. 51, 1965, p. 1158-1167].

(14) G. VRANCEANU, *Leçons de Géométrie différentielle*, Gauthier-Villars, Paris, vol. I, chap. I, 1957.

et la métrique

$$d\sigma^2 = (d\sigma^1)^2 + (d\sigma^2)^2 + \dots + (d\sigma^n)^2 = a_{ij}\, ds^i\, ds^j, \tag{4}$$

nous avons évidemment

$$a_{ij} = \lambda_i^a \lambda_j^a. \tag{5}$$

Donc nous avons :

THÉORÈME 2. — *Étant donné un système de n vecteurs probabilistiques, on peut leur associer d'une manière invariante un espace de Riemann* V_n.

Nous dirons que la métrique (4) est la métrique naturelle associée au système probabilistique correspondant. On peut d'ailleurs observer que la métrique (4) satisfait à certaines conditions algèbriques. En effet si l'on somme dans les formules (5) par rapport à j de 1 à n et si l'on tient compte de la seconde formule (3), nous obtenons

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{a=1}^{n} \lambda_i^a,$$

donc en sommant encore par rapport à i, il en résulte

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} = n. \tag{6}$$

Cette condition peut s'interpréter en observant que si les différentielles ds^i sont toutes égales, nous avons $ds^i = ds$, il en résulte

$$d\sigma^2 = n\, ds^2,$$

comme si la métrique serait euclidienne et donnée par la formule de Pythagore :

$$d\sigma^2 = (ds^1)^2 + (ds^2)^2 + \dots + (ds^n)^2. \tag{7}$$

Nous avons donc :

THÉORÈME 3. — *La métrique* (7) *est euclidienne pour deux points* $P(s^i)$ *et* $Q(s^i + ds)$.

Inversement, étant donné un espace de Riemann, on peut se demander si l'on peut associer à cet espace un système de vecteurs probabilistiques.

Nous allons considérer premièrement le cas $n = 2$. Dans ce cas, les formules (3), peuvent s'écrire sous la forme (17), (17') (chap. I).

où $\Delta = \varphi + \psi$. Les probabilités fondamentales sont données en tenant compte de (2) par les formules de Fréchet [3], (18) (chap. I).

Ces formules nous montrent qu'en supposant que $\varphi + \psi$ est une fonction positive, dans le point s, les formules (18) (chap. I) définirons un système de probabilités pour $t > s$ si φ, ψ sont des fonctions non décroissantes. Si $\varphi + \psi$ est négative dans le point s, elle définit un système de probabilités si φ, ψ sont des fonctions non croissantes. On peut réduire un cas à l'autre en changeant les signes des fonctions.

Quant à la métrique (4), elle est donnée par la formule

$$d\sigma^2 = a_{11}(ds^1)^2 + 2a_{12}ds^1\,ds^2 + a_{22}(ds^2)^2. \tag{8}$$

En ce cas les formules (5) nous donnent, en tenant compte des formules (17′) (chap. I) où l'on suppose φ, ψ, fonctions de deux variables s^1, s^2 :

$$a_{11} = \frac{1 + 4\psi^2}{2\Delta^2}, \qquad a_{12} = \frac{4\varphi\psi - 1}{2\Delta^2}, \qquad a_{22} = \frac{1 + 4\varphi^2}{2\Delta^2}, \tag{9}$$

de façon que la métrique s'écrit

$$d\sigma^2 = \frac{(ds^1 - ds^2)^2 + 4(\psi\,ds^1 + \varphi\,ds^2)^2}{2(\varphi + \psi)^2}. \tag{10}$$

Observons que nous ne pouvons pas avoir $a_{12} = 0$, donc $4\varphi\psi - 1 = 0$, parce que alors si φ est croissante, ψ est décroissante.

Par conséquent, les coordonnées s^1, s^2 ne peuvent pas constituer un système de coordonnées orthogonales pour $d\sigma^2$ que si φ, ψ sont des constantes et alors les vecteurs sont constants et la métrique est euclidienne.

Nous avons dans la formule (10) une métrique a deux variables qui dépend de deux fonctions arbitraires qui se caractérisent algébriquement par le fait que nous avons en accord avec la formule (6) :

$$a_{11} + a_{22} + 2a_{12} = 2. \tag{11}$$

On peut se demander dans quelles conditions, cette métrique est la métrique naturelle associée aux probabilités (18) (chap. I). Pour cela, observons que les formules (9) nous donnent

$$\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \frac{1}{(\varphi + \psi)^2}.$$

Cela signifie que le discriminant δ de la métrique (8) est toujours une fonction positive non croissante si $\varphi + \psi$ est non décroissante comme nous le supposons. En tenant compte de cette formule, les formules (9) s'écrivent

$$
(12) \qquad \begin{cases} 1 + 4\psi^2 = \dfrac{2a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \qquad 1 + 4\varphi^2 = \dfrac{2a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \\ 4\varphi\psi - 1 = \dfrac{2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}. \end{cases}
$$

On voit donc que la métrique (8), (9) est une métrique naturelle d'un système de probabilités à deux dimensions, si les seconds membres des deux premières formules (12) sont des fonctions positives non décroissantes plus grandes que l'unité.

Si nous posons

$$a_{22} - a_{11} = 2\rho, \qquad a_{22} + a_{11} = 1 + 2\lambda,$$

nous avons alors

$$a_{22} = \frac{1}{2} + \rho + \lambda, \qquad a_{11} = \frac{1}{2} + \lambda - \rho$$

et par conséquent nous avons les formules

$$4\psi^2 = \frac{(\rho - 1)^2}{2\lambda - \rho^2}, \qquad 4\rho^2 = \frac{(\rho + 1)^2}{2\lambda - \rho^2},$$

$$4\varphi\psi = \frac{1 - \rho^2}{2\lambda - \rho^2}, \qquad 2\lambda - \rho^2 = \frac{1}{(\varphi + \psi)^2}.$$

Étant donné le fait que les fonctions φ, ψ doivent être positives et non décroissantes, il en résulte que ρ doit être compris entre -1 et 1 et que $2\lambda - \rho^2$ doit être une fonction positive non croissante. En posant donc

$$2\lambda - \rho^2 = \frac{1}{h^2},$$

h doit être une fonction positive non décroissante. Comme nous avons

$$(13) \qquad \psi = \frac{1}{2}h(1 - \rho), \qquad \varphi = \frac{1}{2}h(1 + \rho),$$

il en résulte que les seconds membres doivent être des fonctions positives non décroissantes. En supposant s^1, s^2, fonction d'une variable s, il faut que les dérivées par rapport à s de $h(1 - \rho)$ et $h(1 + \rho)$, doivent être positives.

Donc il faut avoir

$$(14) \qquad \frac{h'}{h} + \frac{\rho'}{1 - \rho} > 0, \qquad \frac{h'}{h} - \frac{\rho'}{1 + \rho} > 0,$$

en tenant compte que h et h' sont des quantités positives. Nous avons donc [12] :

THÉORÈME 4. — *Les formules*

$$a_{11} = \frac{(\rho - 1)^2}{2} + \frac{1}{2h^2}, \qquad a_{22} = \frac{(\rho + 1)^2}{2} + \frac{1}{2h^2}, \qquad a_{12} = \frac{1 - \rho^2}{2} - \frac{1}{2h^2},$$

définissent la métrique naturelle d'un processus probabilistique si h est une fonction positive non décroissante si ρ est compris entre -1 et 1 et satisfait aux conditions (14).

En ce cas les fonctions φ, ψ sont définies par les formules (13).

Nous allons remarquer, que la condition algébrique (11) peut toujours être réalisée. En effet, étant donnée une métrique quelconque (8), on peut toujours choisir un système de variables disons s'^1, s'^2 de façon que dans ce système de variables, nous ayons

$$(11') \qquad a'_{11} + a'_{12} + 2a'_{12} = 2.$$

Supposons par exemple que nous prenons une métrique $d\sigma^2$ sous la forme géodésique, ce qui est toujours possible; nous avons

$$d\sigma^2 = du^2 + G\, dv^2.$$

En ce cas, si l'on considère la transformation de variables

$$u = \frac{s^1 + s^2}{2}, \qquad v = f\left(\frac{s^1 + s^2}{2}, \frac{s^1 - s^2}{2}\right),$$

nous avons en notant avec a_{11}, a_{12}, a_{22} les coefficients de la métrique dans les nouvelles variables s^1, s^2 :

$$a_{11} = \frac{1}{4}[1 + G(f_1 + f_2)^2], \qquad a_{12} = \frac{1}{4}[1 + G(f_1^2 - f_2^2)],$$

$$a_{22} = \frac{1}{4}[1 + G(f_1 - f_2)^2],$$

où f_1 est la dérivée de f par rapport à $\frac{s^1 + s^2}{2}$ et f_2 la dérivée de f par rapport à $\frac{s^1 - s^2}{2}$.

Pour que a_{11}, a_{12}, a_{22} satisfassent à la condition (11), il faut que nous ayons

$$1 + Gf_1^2 = 2,$$

ce qui nous dit qu'on doit avoir

$$(15) \qquad \frac{df}{du} = \frac{1}{\sqrt{G(u, f)}}.$$

Nous avons :

THÉORÈME 5. — *On peut passer de la forme géodésique d'une métrique à la forme probabilistique en intégrant l'équation différentielle* (15).

Dans le cas où $\varphi = \psi$, les probabilités (18) (chap. I), deviennent

$$(15') \qquad \begin{aligned} P_1^1(s,t) = P_2^2(s,t) &= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\varphi(s)}{\varphi(t)}\right], \\ P_2^1(s,t) = P_1^2(s,t) &= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\varphi(s)}{\varphi(t)}\right] \end{aligned}$$

et la métrique (10) s'écrit

$$d\sigma^2 = \frac{(ds^1 - ds^2)^2}{8\varphi^2} + \frac{(ds^1 + ds^2)^2}{2}.$$

Si l'on considère la transformation de variables

$$s^1 + s^2 = \sqrt{2}\,\alpha, \qquad s^1 - s^2 = 2\sqrt{2}\,\beta,$$

cette métrique devient

$$d\sigma^2 = d\alpha^2 + \frac{d\beta^2}{\varphi^2},$$

ce qui nous dit que la métrique est de la forme géodésique.

En tenant compte que la courbure de Gauss est donnée en ce cas par la formule

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{\alpha\alpha}}{G} = -\varphi\left(\frac{1}{\varphi}\right)_{\alpha\alpha}$$

nous pouvons nous demander si cette courbure peut être une constante. Cela arrive évidemment si φ ne dépend pas de α quand la courbure K est nulle, donc φ dépend seulement de β. Mais alors φ ne peut pas être une fonction croissante de s^1, s^2 que si φ est une constante, donc les vecteurs et les probabilités sont constantes, ce qui est le cas banal.

Si la courbure K est une constante non nulle, la fonction $\frac{1}{\varphi} = \rho$, doit satisfaire à l'équation différentielle

$$\rho'' + K\rho = 0$$

Si $K < 0$, on peut prendre comme solution $\rho = e^{-\sqrt{-K}\,\alpha}$, donc

$$\varphi = e^{\sqrt{-K}\,\alpha}.$$

On voit que les conditions (1′) sont vérifiées quelsque soient $s^i \leqq t^i$ $(i = 1, 2)$, donc quels que soient les points $P(s^1, s^2)$ et $Q(t^1, t^2)$ du plan de Lobacevski.

Dans ce cas, les probabilités (15′) sont données par les formules

$$P_1^1(s,t) = P_2^2(s,t) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{e^{\sqrt{-K}\frac{s^1+s^2}{\sqrt{2}}}}{e^{\sqrt{-K}\frac{t^1+t^2}{\sqrt{2}}}}\right),$$

$$P_2^1(s,t) = P_1^2(s,t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{e^{\sqrt{-K}\frac{s^1+s^2}{\sqrt{2}}}}{e^{\sqrt{-K}\frac{t^1+t^2}{\sqrt{2}}}}\right).$$

Si $K > 0$, on peut prendre $\rho = \cos\sqrt{K}\alpha$, donc

$$\varphi = \frac{1}{\cos\sqrt{K}\alpha}$$

Dans ce cas, en supposant pour simplifier $K = 1$, φ est une fonction qui croît de 1 à l'infini si α varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, puis c'est une fonction qui croît de $-\infty$ à -1 quand α varie de $\frac{\pi}{2}$ à π donc pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ cette fonction est discontinue.

Cela signifie qu'il n'y a pas un système de vecteurs probabilistiques sur toute la sphère mais il y a un tel système sur une demi-sphère.

En effet, on sait qu'étant donnée la sphère de rayon 1,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

nous pouvons considérer la représentation paramétrique

$$x = \sin\alpha\cos\beta, \qquad y = \sin\alpha\sin\beta, \qquad z = \cos\alpha,$$

où β est la longitude qui varie de 0 à 2π et α la colatitude qui varie de 0 à π. En ce cas, la métrique de la sphère est donnée par la formule

$$d\sigma^2 = d\alpha^2 + \sin^2\alpha\, d\beta^2,$$

donc nous avons un champ probabilistique de vecteurs tangents à la sphère seulement pour une demie-sphère et les probabilités sont symétriques et sont données par les formules

$$P_1^1(s,t) = P_2^2(s,t) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\cos t}{\cos s}\right),$$

$$P_2^1(s,t) = P_1^2(s,t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\cos t}{\cos s}\right),$$

où $s \leqq t$ sont deux valeurs de l'angle α entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, Donc ces probabilités sont les mêmes quelle que soit la valeur β, donc la longitude.

Considérons aussi le cas particulier $n=3$ quand le déterminant $\Delta=|\mu_a^i|$ est donné par la formule (34) (chap. I) et les λ_j^a par les formules (34′) (chap. I). Dans ce cas les coefficients a_{ij} $(i, j=1, 2, 3)$ sont donnés par les formules

$$a_{11}=\frac{1}{\Delta^2}(2\psi^2+2\theta^2+2\psi\theta+27\psi^2\theta^2),$$

$$a_{22}=\frac{1}{\Delta^2}(2\varphi^2+2\theta^2+2\varphi\theta+27\varphi^2\theta^2),$$

$$a_{33}=\frac{1}{\Delta^2}(2\varphi^2+2\psi^2+2\varphi\psi+27\varphi^2\psi^2),$$

$$a_{12}=\frac{1}{\Delta^2}(\varphi\psi-\varphi\theta-\psi\theta-2\theta^2+27\varphi\psi\theta^2),$$

$$a_{13}=\frac{1}{\Delta^2}(\varphi\theta-\varphi\psi-\psi\theta-2\psi^2+27\varphi\psi^2\theta),$$

$$a_{23}=\frac{1}{\Delta^2}(\psi\theta-\varphi\psi-\varphi\theta-2\varphi^2+27\varphi^2\psi\theta),$$

où

$$\Delta=3(\varphi\psi+\psi\theta+\theta\varphi).$$

On voit que dans ce cas la détermination des fonctions φ, ψ, θ quand la métrique est donnée, est en général difficile.

Supposons alors que $\varphi=\psi=\theta$. Alors, nous avons les formules

$$a_{11}=a_{22}=a_{33}=\frac{2+9\varphi^2}{27\varphi^2},$$

$$a_{12}=a_{13}=a_{23}=\frac{9\varphi^2-1}{27\varphi^2},$$

ce qui nous dit que nous avons la condition

$$a_{11}+2a_{12}=1.$$

La métrique s'écrit

$$d\sigma^2=\frac{2+9\varphi^2}{27\varphi^2}[(ds^1)^2+(ds^2)^2+(ds^3)^2] \\ +2\frac{9\varphi^2-1}{27\varphi^2}(ds^1\,ds^2+ds^2\,ds^3+ds^3\,ds^1)$$

qui peut encore s'écrire

$$(15'') \qquad d\sigma^2=a_{11}[(ds^1)^2+(ds^2)^2+(ds^3)^2]-a_{11}(ds^1\,ds^2 \\ +ds^2\,ds^3+ds^3\,ds^1)+ds^1\,ds^2+ds^2\,ds^3+ds^3\,ds^1,$$

ou

$$d\sigma^2=a_{11}[(ds^1)^2+(ds^2)^2+(ds^3)^2]+(1-a_{11})(ds^1\,ds^2+ds^2\,ds^3+ds^3\,ds^1).$$

Comme nous avons

$$\varphi^2 = \frac{2}{9(3a_{11} - 1)},$$

il en résulte qu'une métrique (15″) conduit à un système probabilistique (34) (chap. I) à fonctions φ, ψ, θ égales si $a_{11} > \frac{1}{3}$ et avec a_{11}, fonction décroissante des variables s^1, s^2, s^3.

Dans le cas où $\varphi = e^{ks}$ nous avons un système probabilistique stationnaire.

La métrique devient

$$d\sigma^2 = \frac{2 + 9e^{2k(s^1+s^2+s^3)}}{27e^{2k(s^1+s^2+s^3)}}[(ds^1)^2 + (ds^2)^2 + (ds^3)^2]$$

$$+ 2\left(\frac{5}{9} - e^{k(s^1+s^2+s^3)}\right)(ds^1\, ds^2 + ds^2\, ds^3 + ds^3\, ds^1).$$

Considérons le cas où

$$\varphi = \theta = v, \qquad \psi = w = u,$$

qui correspond au déterminant circulant [10].

Pour λ_j^a $(a, j = 1, 2, 3)$, nous avons les formules

$$\lambda_1^1 = \lambda_2^2 = \lambda_3^3 = \frac{1}{D}(u^2 + uv + v^2 + u + v),$$

$$\lambda_3^1 = \lambda_1^2 = \lambda_2^3 = \frac{1}{D}(u^2 + uv + v^2 - v),$$

$$\lambda_2^1 = \lambda_1^3 = \lambda_3^2 = \frac{1}{D}(u^2 + uv + v^2 - u),$$

où

$$D = 3(u^2 + uv + v^2).$$

Pour trouver les coefficients de la métrique a_{ij}, nous utiliserons la formule

$$a_{ij} = \sum_{a=1}^{3} \lambda_i^a \lambda_j^a \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Nous avons

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9(u^2 + uv + v^2)},$$

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9(u^2 + uv + v^2)}.$$

Dans ce cas, la métrique s'écrit

$$(15''')\quad d\sigma^2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9(u^2+uv+v^2)}\right)[(ds^1)^2 + (ds^2)^2 + (ds^3)^2] + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{9(u^2+uv+v^2)}\right)(ds^1\,ds^2 + ds^2\,ds^3 + ds^3\,ds^1).$$

Cette formule nous dit que la métrique n'est pas en général suffisante pour définir le processus markovien, parce que les probabilités dépendent de deux fonctions u, v, tandis que la métrique (15''') dépend seulement de la fonction $u^2 + uv + v^2$. En effet on trouve facilement que nous avons

$$P_2^1(s,t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{D}\Big[v(s)[2u(t) + v(t)] - u(s)[v(t) - u(t)]\Big],$$

$$P_3^1(s,t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{D}\Big[u(s)[2v(t) + u(t)] - v(s)[u(t) - v(t)]\Big]$$

et des formules analogues pour les autres P_j^i, $(i, j = 1, 2, 3)$.

2. **Métriques à courbure constante négative.** — Montrons maintenant que la métrique naturelle (10) peut être à courbure constante négative aussi pour $\varphi \neq \psi$. En effet en prenant

$$\varphi = e^{s^2}, \qquad \psi = e^{s^1},$$

on trouve un système probabilistique. Or, en ce cas la métrique s'écrit

$$(16)\qquad d\sigma^2 = \frac{(ds^1 - ds^2)^2 + 4[d(e^{s^1} + e^{s^2})]^2}{2(e^{s^1} + e^{s^2})^2}$$

et il suffit de poser

$$(16')\qquad x = s^1 - s^2 \qquad y = 2(e^{s^1} + e^{s^2}),$$

pour que la métrique devienne

$$d\sigma^2 = 2\,\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

et coïncide donc, abstraction faite du facteur 2, avec la métrique du semi-plan de Poincaré $y > 0$, donc du plan de Lobacevski-Bolyai. Quant aux formules qui nous donnent $P_j^i(s,t)$, compte tenu des formules (18) (chap. I), elles s'écrivent

$$(17)\qquad \begin{cases} P_1^1(s,t) = \dfrac{e^{s^2} + e^{t^1}}{e^{t^1} + e^{t^2}}, & P_2^1(s,t) = \dfrac{e^{t^2} - e^{s^2}}{e^{t^1} + e^{t^2}}, \\[2ex] P_1^2(s,t) = \dfrac{e^{t^1} - e^{s^1}}{e^{t^1} + e^{t^2}}, & P_2^2(s,t) = \dfrac{e^{t^2} + e^{s^1}}{e^{t^1} + e^{t^2}}, \end{cases}$$

et $P_j^i(s,t)$ $(i, j = 1, 2)$ sont positives si $s^1 \leqq t^1$, $s^2 \leqq t^2$.

Nous avons :

THÉORÈME 6. — *Sur le plan de Bolyai-Lyobacevski, il y a des champs probabilistiques définis dans tout le plan, dépendant d'une ou de deux variables.*

En effet à tout point (x, y) avec $y > 0$, correspond un point (s^1, s^2) défini par les inverses des formules (16'). Si l'on suppose que s^1, s^2 sont fonctions d'une seule variable s nous avons des champs dépendant d'une seule variable.

Les formules inverses des formules (16') s'écrivent sous la forme

$$e^{s^1} = \frac{y\,e^x}{2(1+e^x)}, \qquad e^{s^2} = \frac{y}{2(1+e^x)}. \tag{17'}$$

Si l'on note avec x', y' les valeurs correspondantes aux t^1, t^2, nous considérons les formules

$$e^{t^1} = \frac{y'\,e^{x'}}{2(1+e^{x'})}, \qquad e^{t^2} = \frac{y'}{2(1+e^{x'})};$$

les probabilités (17) sont données par les formules

$$\left\{\begin{aligned} P_1^1(x, y;\, x', y') &= \frac{y}{y'}\frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^{-x'}},\\ P_2^1(x, y;\, y', y') &= -\frac{y}{y'}\frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^{x'}},\\ P_1^2(x, y;\, x', y') &= -\frac{y}{y'}\frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{1}{1+e^{-x'}},\\ P_2^2(x, y;\, x', y') &= \frac{y}{y'}\frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{1}{1+e^{x'}}. \end{aligned}\right. \tag{17''}$$

On voit donc que P_1^1, P_2^2 sont toujours positifs si y, y' sont positifs, ce qui arrive dans le semi-plan de Poincaré. En ce qui concerne P_2^1, P_1^2 ils sont aussi positifs si nous avons les conditions

$$\frac{y'}{1+e^{x'}} \geqq \frac{y}{1+e^x}, \qquad \frac{y'}{1+e^{-x'}} \geqq \frac{y}{1+e^{-x}}.$$

Si l'on considère comme courbes coordonnées

$$u = 2e^{s^1} = \frac{y\,e^x}{1+e^x}, \qquad v = 2e^{s^2} = \frac{y}{1+e^x}, \tag{18}$$

les courbes $u = u_0$, et $v = v_0$ ou u_0, v_0 sont des constantes positives, sont donc asymptotes aux droites $y = u_0$, $y = v_0$ et coupent l'axe y en des points ayant comme ordonnées $y = 2u_0$, $y = 2v_0$.

Dans les coordonnées u, v, la métrique (16) s'écrit

$$(18') \qquad d\sigma^2 = \frac{v\,du^2 + u\,dv^2}{uv(u+v)}.$$

Elle nous donne donc une métrique à courbure constante négative dans le quart de plan $u > 0$, $v > 0$. Dans les variables u, v les probabilités s'écrivent

$$P_1^1(u, v; u', v') = \frac{u'+v}{u'+v'}, \qquad P_2^1(u, v; u', v') = \frac{v'-v}{u'+v'},$$

$$P_1^2(u, v; u', v') = \frac{u'-u}{u'+v'}, \qquad P_2^2(u, v; u', v') = \frac{u+v'}{u'+v'}.$$

Les géodésiques du semi-plan de Poincaré sont des demi-cercles

$$(x-a)^2 + y^2 = r^2,$$

donc

$$x = a + r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

où θ est un angle compris entre 0 et π.

Comme nous avons

$$x = \ln\frac{u}{v}, \qquad y = u + v,$$

un point $P(u, v)$ de la géodésique est le commencement d'un système de probabilités seulement pour les points $P'(u', v')$ qui nous donnent $u' + v' > u + v$, donc $\sin\theta' > \sin\theta$. Nous avons le :

THÉORÈME 7. — *Si l'on suppose que x, y sont des points d'une géodésique, le point x', y' correspondant à un système de probabilités doit se trouver sur la partie du cercle au-dessous de la corde $Y = y$.*

Nous allons maintenant montrer que nous avons des propriétés analogues dans le cas général $n > 2$.

Supposons en effet que nous avons comme système de vecteurs contravariants μ_a^i, le système défini par les formules

$$(18'') \qquad \begin{cases} \mu_a^i = \dfrac{1}{n} - e^{s^a} & (i \neq a), \\[2ex] \mu_i^i = \dfrac{1}{n} - e^{s^i} + \Delta_n(s), \end{cases}$$

où a, i sont des indices fixes et où nous avons posé

$$\Delta_n(s) = e^{s^1} + e^{s^2} + \ldots + e^{s^n}.$$

Comme il est facile à voir, $\Delta_n(s)$ est en même temps le déterminant $|\mu^i_a|$, donc le système de vecteurs μ^i_a est un système de vecteurs indépendants dans tout l'espace.

En ce qui concerne les vecteurs covariants duals, leurs composantes s'écrivent

$$\lambda^a_i = \frac{1}{\Delta_n(s)}\left[-\frac{1}{n}+e^{s^i}\right] \qquad (a \neq i),$$

$$\lambda^i_i = \frac{1}{\Delta_n(s)}\left[\frac{n-1}{n}+e^{s^i}\right],$$

où a, i sont des indices fixes.

En ce qui concerne, les probabilités elles sont données par les formules

$$(18''') \qquad P^i_j = \frac{e^{t^j}-e^{s^j}}{\Delta_n(t)} \quad (i \neq j), \qquad P^i_i = \frac{\Delta_n(s)+e^{t^i}-e^{s^i}}{\Delta_n(t)}$$

et les formules nous montrent que les probabilités sont définies dans tout l'espace des variables $s^1, \ldots, s^n$.

Pour calculer la métrique observons que les formes de Pfaff (3′) s'écrivent dans ce cas :

$$(19) \qquad d\sigma^a = \frac{1}{\Delta_n(s)}\left[ds^a - \frac{ds^1+\ldots+ds^n}{n}\right] + \frac{d\Delta_n(s)}{\Delta_n(s)},$$

donc la métrique associée s'écrit

$$(19') \qquad d\sigma^2 = \frac{1}{n\,\Delta^2_n(s)}\left[\Phi_n + n^2[d\,\Delta_n(s)]^2\right],$$

où nous avons noté par Φ_n la forme quadratique

$$(19'') \qquad \Phi_n = (n-1)\,ds^i\,ds^i - 2\,ds^j\,ds^k \qquad (j \neq k).$$

Comme le discriminant de cette forme quadratique dans les différentielles ds^i $(i=1, \ldots, n)$ s'écrit

$$\begin{vmatrix} n-1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & n-1 & \ldots & -1 \\ -1 & -1 & \ldots & n-1 \end{vmatrix}$$

ce déterminant est nul donc la forme Φ_n est dégénérée et elle peut s'écrire sous la forme

$$\Phi_n = (dy^2)^2 + \ldots + (dy^n)^2,$$

où $y^2, \ldots, y^n$ sont des combinaisons linéaires des variables $s^1, \ldots, s^n$. En posant aussi

$$y^1 = n\,\Delta_n(s),$$

la métrique (19′) s'écrit

$$d\sigma^2 = n\,\frac{(dy^1)^2 + \ldots + (dy^n)^2}{(y^1)^2}, \tag{20}$$

ce qui nous dit que cette métrique est à courbure constante négative.

Nous allons maintenant observer que la métrique (19′), (19″) constitute une forme intéressante qu'on peut donner à une métrique à courbure constante négative.

Pour obtenir une transformation de variables qui conduit à la forme canonique (20), nous allons observer qu'en passant de n à $n+1$ nous avons

$$\Phi_{n+1} = \frac{n+1}{n}\Phi_n + \frac{1}{n}[n\,ds^{n+1} - ds^1 - \ldots - ds^n]^2$$

donc à une réduction à la forme canonique de Φ_n, correspond une réduction à la forme canonique de Φ_{n+1}. Comme nous avons

$$\Phi_2 = (ds^2 - ds^1)^2,$$

il en résulte que nous avons

$$\Phi_3 = \frac{3}{2}[ds^2 - ds^1]^2 + \frac{1}{2}[2\,ds^3 - ds^1 - ds^2]^2,$$

$$\Phi_4 = 2\,[ds^2 - ds^1]^2 + \frac{2}{3}[2\,ds^3 - ds^1 - ds^2]^2 + \frac{1}{3}[3\,ds^4 - ds^1 - ds^2 - ds^3]^2$$

et ainsi de suite, ce qui nous conduit à une formule de la forme

$$\Phi_n = a_2[ds^2 - ds^1]^2 + \ldots + a_n[(n-1)\,ds^n - ds^1 - \ldots - ds^{n-1}]^2,$$

où a_2, a_3, …, a_n sont des constantes positives. Cela signifie que si l'on considère comme nouvelles variables

$$\left\{\begin{array}{ll} Z^1 = e^{s^1} + \ldots + e^{s^n}, & \\ Z^p = [(p-1)Z^p - Z^1 - \ldots - Z^{p-1}] & (p = 2, \ldots, n), \end{array}\right. \tag{20′}$$

la métrique (19′) contiendra seulement les carrés des différentielles dZ^i ($i = 1, \ldots, n$) donc nous aurons comme variables $y^1, \ldots, y^n$ dans la métrique (20) des quantités proportionnelles respectivement aux $Z^1, \ldots, Z^n$.

En tenant compte que les formules (20′) nous donnent une transformation de variables qui change l'espace entier $E_n(s^1, \ldots, s^n)$ dans le semi-plan $Z^1 > 0$, de l'espace $F_n(Z^1, \ldots, Z^n)$ il en résulte :

THÉORÈME 8. — *Les formules* (18‴) *nous donnent un système de probabilités définies dans tout l'espace ouvert à courbure constante négative* (19′), (19″).

3. Connexions affines probabilistiques. — Supposons maintenant que la variété $V_n(s^1, \ldots, s^n)$ dans laquelle nous avons le processus markovien continu, possède une connexion affine définie à l'aide des quantités Γ^i_{jk}. En ce cas en transportant par parallélisme les vecteurs (λ, μ), qui définissent les probabilités P^i_j, nous avons des formules de la forme

$$(21)\qquad d\mu^i_a = \Gamma^i_{k\alpha}\mu^k_a ds^\alpha, \qquad d\lambda^a_j = -\Gamma^k_{j\alpha}\lambda^a_k ds^\alpha \qquad (i, j, k, a, \alpha = 1, \ldots, n)$$

en passant d'un point $P(s^1, \ldots, s^n)$ de V_n au point voisin $Q(s^i + ds^i)$. Si l'on veut que les $d\mu^i_a$, $d\lambda^a_j$ soient les différentielles des μ^i_a, λ^a_j, donc si l'on veut que nous ayons

$$(21')\qquad \frac{\partial\mu^i_a}{\partial s^\alpha} = \Gamma^i_{k\alpha}\mu^k_a, \qquad \frac{\partial\lambda^a_j}{\partial s^\alpha} = -\Gamma^k_{j\alpha}\lambda^a_k,$$

les $\Gamma^i_{k\alpha}$ sont bien déterminées dans tout l'espace V_n où le processus est défini et nous avons les formules

$$(22)\qquad \Gamma^i_{k\alpha} = \frac{\partial\mu^i_a}{\partial s^\alpha}\lambda^a_k.$$

La connexion affine ainsi déterminée est alors une connexion intégrable, car les formules (21′) constituent des équations aux dérivées partielles formant un système complètement intégrable. Par conséquent nous avons les équations

$$(22')\qquad \Gamma^i_{j\alpha\beta} = \frac{\partial\Gamma^i_{j\alpha}}{\partial s^\beta} - \frac{\partial\Gamma^i_{j\beta}}{\partial s^\alpha} + \Gamma^i_{k\alpha}\Gamma^k_{j\beta} - \Gamma^i_{k\beta}\Gamma^k_{j\alpha} = 0$$

qui expriment le fait que toutes les composantes $\Gamma^i_{j\alpha\beta}$ du tenseur de courbure de la connexion affine $\Gamma^i_{j\alpha}$ sont nulles.

En sommant les formules (22) par rapport à k et en tenant compte des formules (3), nous obtenons les formules

$$(22'')\qquad \sum_{k=1}^{n}\Gamma^i_{k\alpha} = 0.$$

Nous avons donc :

Théorème 9. — *Un processus markovien induit dans la variété* V_n *un transport parallèle sans courbure dont la connexion est définie par les formules* (22) *et* (22″).

En tenant compte des formules (2) et (21) nous trouvons

$$dP^i_j(s, t) = \Gamma^i_{k\alpha}(s)\,\mu^k_a(s)\,\lambda^a_j(t)\,ds^\alpha - \Gamma^k_{j\alpha}(t)\,\mu^i_a(s)\,\lambda^a_k(t)\,dt^\alpha,$$

donc nous pouvons écrire les formules

$$(23) \qquad dP^i_j(s, t) = \Gamma^i_{k\alpha}(s)\, P^k_j(s, t)\, ds^\alpha - \Gamma^k_{j\alpha}(t)\, P^i_k(s, t)\, dt^\alpha,$$

qui constituent les formules de transport par parallélisme des probabilités fondamentales $P^i_j(s, t)$. Il en résulte donc que si le transport parallèle est intégrable, les équations aux dérivées partielles

$$(23') \qquad \frac{\partial P^i_j(s, t)}{\partial s^\alpha} = \Gamma^i_{k\alpha}(s)\, P^k_j(s, t), \qquad \frac{\partial P^i_j(s, t)}{\partial t^\alpha} = -\Gamma^k_{j\alpha}(t)\, P^i_k(s, t)$$

constituent un système complètement intégrable.

On voit par conséquent que pour ces probabilités, l'indice i est un indice de contrevariance quand on dérive par rapport aux variables s et j est un indice de covariance quand on dérive par rapport aux variables t.

En tenant compte de ce fait et en considérant les composantes des probabilités, P^i_j dans le système de congruences défini par les vecteurs (λ, μ), donc en considérant les quantités

$$P^a_b(s, t) = P^i_j(s, t)\, \lambda^a_i(s)\, \mu^j_b(t),$$

il en résulte que P^a_b sont égales à δ^a_b.

Par conséquent, nous avons :

THÉORÈME 10. — *Les vecteurs (λ, μ) à l'aide desquels s'expriment les probabilités $P^i_j(s, t)$ sont caractérisés par le fait que les composantes $P^a_b(s, t)$ dans le système de congruences (λ, μ) sont égales à δ^a_b.*

En supposant $t^i \geqq s^i$ et en posant $t^i = s^i + u^i$ il en résulte que u^i sont des quantités positives. Cela dit considérons les formules

$$P^i_k(s, s+u) = P^i_k(s, s) + \left(\frac{\partial P^i_k(s, t)}{\partial u^\alpha}\right)_{u^\alpha = 0} u^\alpha + \ldots,$$

donc nous avons

$$P^i_k(s, s+u) = \delta^i_k + \left(\frac{\partial P^i_k}{\partial u^\alpha}\right)_{u^\alpha = 0} u^\alpha + \ldots,$$

les termes non écrits étant du second ordre dans u^α.

Compte tenu de (1'), il en résulte qu'il faut avoir

$$\left(\frac{\partial P^i_k}{\partial u^\alpha}\right)_{u^\alpha = 0} = \left(\frac{\partial P^i_k}{\partial t^\alpha}\right)_{t^\alpha = s^\alpha} \geqq 0 \qquad (i \neq k).$$

Parce que la deuxième équation (23′) nous donne

$$\left(\frac{\partial P^i_k}{\partial t^\alpha}\right)_{t^\alpha = s^\alpha} = - \Gamma^i_{k\alpha}(s),$$

on trouve les conditions

$$\Gamma^i_{k\alpha}(s) \leqq 0. \tag{23''}$$

D'autre part, compte tenu de (22″) qui peuvent s'écrire

$$\Gamma^i_{i\alpha} = - \sum_{k \neq i} \Gamma^i_{k\alpha}, \tag{23'''}$$

on déduit $\Gamma^i_{i\alpha} \geqq 0$. Par suite nous avons :

Théorème 11. — *Le transport parallèle probabilistique* (23) *associé à un processus markovien multiple satisfait aux conditions* (22″) *et* (23″).

Nous allons observer que si pour un certain indice fixe i, nous avons $\Gamma^i_{i\alpha} = 0$, alors nous avons aussi $\Gamma^i_{k\alpha} = 0$ $(i \neq k)$ et par conséquent μ^i_α ne dépend pas de s^α.

De même parce que nous avons les formules

$$\frac{\partial \ln \Delta}{\partial s^\alpha} = \frac{\partial \mu^i_a}{\partial s^\alpha} \lambda^a_i,$$

où $\Delta = |\mu^i_a|$, il en résulte que si l'on tient compte des équations (21′), nous avons

$$\frac{\partial \ln \Delta}{\partial s^\alpha} = \Gamma^i_{k\alpha} \mu^k_a \lambda^a_i = \Gamma_\alpha \qquad (\Gamma_\alpha = \Gamma^i_{i\alpha}),$$

donc la connexion contractée Γ_α est nulle si le déterminant est constant. Mais parce que $\Gamma^i_{i\alpha}$ sont pour chaque i des quantités positives, il en résulte que dans ce cas $\Gamma^i_{i\alpha}$ sont toutes nulles et par conséquent compte tenu de (22) et (23″), il en est de même de $\Gamma^i_{k\alpha}$ $(i \neq k)$, donc μ^i_a et λ^a_j sont des constantes et $P^i_j = \delta^i_j$.

Il en résulte donc qu'en laissant de côté ce cas particulier où les probabilités sont l'identité, le déterminant Δ n'est pas constant.

Observons maintenant qu'étant donné dans l'espace $V_n(s^1, \ldots, s^n)$ un système de vecteurs contrevariants μ^i_a, ou bien le système dual des vecteurs λ^a_i et un autre système de vecteurs $\bar{\mu}^i_a$, $\bar{\lambda}^a_j$, nous avons des formules de la forme

$$\mu^i_a = c^b_a \bar{\mu}^i_b, \qquad \bar{\lambda}^a_j = c^a_b \lambda^b_j \tag{24}$$

où c^a_b sont des fonctions des variables $s^1, \ldots, s^n$ à déterminant $|c^a_b|$ différent de zéro.

ST VICT DE MAT. ES

Cela fait les probabilités

$$P^i_j = \mu^i_a(s)\,\lambda^a_j(t), \qquad \overline{P}^i_j = \overline{\mu}^i_a(s)\,\overline{\lambda}^a_j(t)$$

associées respectivement au système de vecteurs (μ^i_a, λ^b_j) et au système de vecteurs $(\overline{\mu}^i_a, \overline{\lambda}^b_j)$ sont différentes sauf si c^a_b sont des constantes satisfaisant aux conditions

$$(24') \qquad \sum_{b=1}^{n} c^a_b = 1,$$

ce qu'on peut facilement voir. Nous avons donc le :

THÉORÈME 12. — *Deux systèmes de vecteurs* (μ, λ) *et* $(\overline{\mu}, \overline{\lambda})$ *définissent les mêmes probabilités si et seulement si ils sont liés par les formules* (24), *où* c^a_b *sont des constantes satisfaisant à la condition* (24').

En tenant compte des formules (21), il en résulte que les composantes $\Gamma^i_{k\alpha}$ sont des invariants aux transformations (24), (24'), avec c^a_b des constantes, donc la connexion $\Gamma^i_{k\alpha}$ ne change pas si l'on change le système (μ, λ), dans le système $(\overline{\mu}, \overline{\lambda})$, si les probabilités restent les mêmes, propriété qui est aussi une conséquence des formules (23'), qui définissent le transport parallèle des probabilités $P^i_j(s, t)$.

On voit donc que les composantes de la connexion $\Gamma^i_{k\alpha}$ servent à définir les propriétés des probabilités. Si ces composantes sont des constantes, le système de probabilités est stationnaire et si la connexion est intégrable, les formules (21') nous disent qu'on doit avoir pour une connexion constante

$$\Gamma^i_{k\alpha}\Gamma^k_{j\beta} = \Gamma^i_{k\beta}\Gamma^k_{j\alpha}.$$

Nous allons maintenant observer qu'en général on doit supposer que les composantes $\Gamma^i_{k\alpha}$ ne sont pas symétriques dans les indices inférieurs, donc que la connexion est avec torsion, c'est-à-dire qu'on doit supposer que les quantités

$$T^i_{k\alpha} = \Gamma^i_{k\alpha} - \Gamma^i_{\alpha k}$$

ne sont pas toutes nulles. En effet supposons que nous avons $i = k \neq \alpha$, donc qu'on considère les composantes de la torsion

$$T^i_{i\alpha} = \Gamma^i_{i\alpha} - \Gamma^i_{\alpha i},$$

on voit alors que $T^i_{i\alpha}$ doivent être positives car $\Gamma^i_{i\alpha}$ sont positives, tandis que $\Gamma^i_{\alpha i}$ sont négatives. Autrement dit les $T^i_{i\alpha}$ ne peuvent pas être nulles que dans le cas où les probabilités P^i_j sont égales à δ^i_j.

Nous avons donc le :

THÉORÈME 13. — *La connexion intégrable* (22) *associée aux probabilités* P^i_j *est avec torsion, les quantités* $T^i_{i\alpha}$ *étant positives.*

Si l'on considère les quantités

$$T_\alpha = \sum_{i=1}^{n} T^i_{i\alpha},$$

il en résulte que T_α sont elles aussi des quantités positives. Si l'on considère donc la forme de Pfaff :

$$d\varphi = T_\alpha ds^\alpha,$$

cette forme de Pfaff est un invariant du système probabilistique, donc la connexion $\Gamma^i_{k\alpha}$ est à forme de Pfaff invariante dans le sens de G. Vranceanu [13].

4. Groupes probabilistiques. — Étant donné un système de vecteurs (λ, μ) dans l'espace V_n, on peut associer à ces vecteurs les formes de Pfaff (3′). De même étant donné un autre système $(\bar\lambda, \bar\mu)$, nous pouvons associer les formes de Pfaff :

$$d\bar\sigma^a = \bar\lambda^a_i \, ds^i$$

et les formules (24) nous disent que nous avons

$$d\bar\sigma^a = c^a_b \, ds^b. \tag{24''}$$

Il en résulte qu'à chaque système de probabilités P^i_j défini par le système de vecteurs (λ, μ), nous pouvons associer un groupe de transformations de congruences (24″), où c^a_b sont des constantes et satisfont aux conditions (24′).

On voit que le groupe (24″), (24′) est un groupe affine de transformations de congruences qui a la propriété de conserver les courbes satisfaisantes aux conditions

$$\frac{d\sigma^a}{dt} = \lambda^a_j \frac{ds^j}{dt} = 1 \qquad (a = 1, \ldots, n).$$

En effet pour le groupe (24″), (24′) il en résulte

$$\frac{d\bar\sigma^a}{dt} = 1.$$

Autrement dit le groupe conserve les courbes satisfaisant au système différentiel

$$\frac{ds^j}{dt} = 1,$$

où t est un certain paramètre.

En tenant compte qu'un groupe de transformations de congruences défini une $\mathcal{G}$ structure [16], nous avons le :

THÉORÈME 14. — *Un système de probabilités* P^i_j *définit dans la variété* V_n *une structure affine* (24″), (24′).

On sait que le groupe affine de transformations de congruences possède un système complet d'invariants [13], qui s'obtiennent en utilisant les coefficients des covariants bilinéaires des formes $d\sigma^a$, qu'on peut écrire

$$\Delta\sigma^a = w^a_{bc}\, d\sigma^b\, \delta\sigma^c \qquad [\Delta\sigma^a = \delta\, d\sigma^a - d\delta\sigma^a],$$

où nous avons posé

$$w^a_{bc} = \left[\frac{\partial\lambda^a_i}{\partial s^j} - \frac{\partial\lambda^a_j}{\partial s^i}\right]\mu^i_b\,\mu^j_c.$$

Par une transformation (24″), les quantités w^a_{bc} se changent comme les composantes d'un tenseur affine du troisième ordre

$$\overline{w}^a_{ef}\, c^e_b\, c^f_c = w^f_{bc}\, c^a_f. \tag{25}$$

Si l'on somme par rapport à c et si l'on tient compte des (24′), on obtient les formules

$$\overline{w}^a_e\, c^e_b = w^f_b\, c^a_f \qquad \left[w^a_b = \sum_{c=1}^{n} w^a_{bc}\right] \tag{25'}$$

qui nous disent que w^a_b sont les composantes d'un tenseur mixte.

Il en résulte :

THÉORÈME 15. — *Le groupe probabilistique* (24″), (24′) *possède un tenseur mixte du second ordre* (25′).

Nous allons montrer que ce tenseur n'est pas nul en général. En effet si l'on tient compte des formules (21′), il en résulte

$$w^a_{bc} = (\Gamma^k_{\alpha j} - \Gamma^k_{j\alpha})\,\lambda^a_k\,\mu^j_b\,\mu^\alpha_c$$

et naturellement nous avons aussi les formules inverses

$$\Gamma^k_{\alpha j} - \Gamma^k_{j\alpha} = w^a_{bc}\,\mu^k_a\,\lambda^b_j\,\lambda^c_\alpha.$$

Supposons maintenant qu'on somme par rapport à α

Nous obtenons en tenant compte des formules (22″) :

$$(25'') \qquad -\sum_{\alpha=1}^{n} \Gamma^{k}_{j\alpha} = w^{a}_{b} \mu^{k}_{a} \lambda^{b}_{j}.$$

De même nous avons les formules inverses

$$w^{a}_{b} = -\sum_{\alpha=1}^{n} \Gamma^{k}_{j\alpha} \mu^{j}_{b} \lambda^{a}_{k}.$$

Or ces formules nous disent que si $k \neq j$, le premier membre des (25″) est toujours positif, tandis qu'il est négatif si $k = j$. Donc w^{a}_{b} ne peut pas être nul.

On sait d'autre part qu'un tenseur mixte peut être réduit à la forme canonique de Jordan ([15], p. 96) et alors les formes $d\sigma^{a}$ sont en général uniquement déterminées et la recherche des invariants se réduit à ce qu'on appelle le problème spécial d'équivalence d'Élie Cartan, quand les invariants sont w^{a}_{bc} et leurs dérivés par rapport aux formes $d\sigma$.

Dans le cas où les w^{a}_{bc} sont des constantes, les $d\sigma^{a}$ définissent un groupe simplement transitif continu $\mathcal{G}_{n}$, qui laisse invariant ces formes. En ce cas le processus probabilistique est associé au groupe continu $\mathcal{G}_{n}$.

Comme exemple d'un tel processus nous avons le cas où les $d\sigma^{a}$ sont définies par les formules (19). En effet en ce cas, toutes les quantités w^{a}_{bc} avec a, b, c différents, sont nulles tandis que nous avons

$$w^{a}_{ac} = \frac{1}{n},$$

où a, c sont deux nombres fixes distincts.

Nous avons donc :

THÉORÈME 16. — *Le processus markovien* (18‴) *est un processus associé à un groupe de Lie* $\mathcal{G}_{n}$, *groupe qui représente en même temps le groupe de mouvement simplement transitif de l'espace à courbure constante négative* V_{n}.

En revenant au groupe (24″), (24′). nous allons observer que si l'on considère comme nouvelles formes de Pfaff :

$$d\rho^{k} = d\sigma^{k} - d\sigma^{n}, \qquad d\rho^{n} = d\sigma^{n} \qquad (k < n),$$

les formes $d\rho^k$, $d\rho^n$ subissent par le groupe une transformation de la forme

$$d\bar{\rho}^k = a_l^k \, d\rho^l \qquad [a_l^k = c_l^k - c_l^n,\ k,\ l < n],$$
$$d\bar{\rho}^n = d\rho^n + a_k \, d\rho^k \qquad [a_k = c_k^n].$$

Comme on voit ce groupe conserve le système de Pfaff :

$$d\rho^k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n-1)$$

et l'on peut dire qu'il conserve l'axe (n) dans le système de coordonnées associées aux formes $d\rho$. On peut donc dire que le groupe (24″), (24′), est un groupe axial.

Si l'on désigne par v_{bc}^a les coefficients des covariants bilinéaires des formes $d\rho^a$, les formules (25), (25′) s'écrivent

$$\bar{v}_{ef}^k c_l^e c_r^f = v_{lr}^f c_f^k \qquad (k,\ l,\ r,\ e,\ f = 1, \ldots, n-1),$$
$$\bar{v}_{ln}^k c_l^e = v_{ln}^f e_f^k.$$

Les dernières de ces formules nous disent que les quantités v_{ln}^k sont les composantes d'un tenseur mixte du second ordre.

Notons maintenant avec Q_j^i les composantes des probabilités P_j^i par rapport au système de formes $d\rho$. Il est facile à voir que nous avons les formules

$$Q_l^k = P_l^k - P_l^n, \qquad Q_l^n = P_l^n, \qquad Q_n^n = 1, \qquad Q_n^k = 0.$$

De même si nous notons par π_a^i, σ_j^a les composantes dans les formes $d\rho$, des vecteurs μ_a^i, λ_j^a on y trouve que les conditions (3) deviennent

$$\sum_{a=1}^{n} \pi_a^n = 1, \qquad \sum_{a=1}^{n} \pi_a^k = 0, \qquad \sigma_n^a = 1.$$

Parce que nous avons évidemment

$$Q_l^n = \pi_a^n(s)\, \sigma_l^a(t), \qquad Q_l^k = \pi_a^k(s)\, \sigma_l^a(t) \qquad (k,\ l < n),$$

il en résulte les formules

(26) $$P_l^n(s, t) = \pi_a^n(s)\, \sigma_l^a(t), \qquad P_l^k(s, t) = [\pi_a^k(s) + \pi_a^n(s)]\, \sigma_l^a(t)$$

et par conséquent nous avons conformément à la deuxième formule (1) :

(26′) $$\left\{\begin{aligned} P_n^n(s, t) &= 1 - \pi_a^n(s) \sum_{l=1}^{n} \sigma_l^a(t), \\ P_k^n(s, t) &= 1 - [\pi_a^k(s) + \pi_a^n(s)] \sum_{l=1}^{n} \sigma_l^a(t) \end{aligned}\right.$$

Donc, nous obtenons :

THÉORÈME 17. — *Étant donné un système de vecteurs covariants indépendants de type Fréchet* σ^a_j *avec* $\sigma^a_n = 1$ *dans chaque point de* V_n *nous avons un système de probabilités fondamentales* P^i_j *défini par les formules* (26) *et* (26′) *où* π^i_b *sont les réciproques du déterminant* $|\sigma^a_j|$.

Il faut observer de même qu'en notant avec $\gamma^i_{j\alpha}$ les composantes de la connexion dans le système de formes $d\rho$, nous avons les formules

$$(27)\qquad \gamma^k_{n\alpha} = \gamma^n_{n\alpha} = 0, \qquad \gamma^n_{l\alpha} = \Gamma^n_{l\alpha}, \qquad \gamma^k_{l\alpha} = \Gamma^k_{l\alpha} - \Gamma^n_{l\alpha},$$

de sorte que les formules (23″) nous montrent qu'il faut avoir

$$(27')\qquad \gamma^n_{l\alpha} \leqq 0, \qquad \gamma^k_{l\alpha} + \gamma^n_{l\alpha} \leqq 0 \qquad (k \neq l).$$

Par suite on observe que les équations (22′) dans la connexion γ sont identiquement vérifiées si $j = n$, et nous avons un système d'équations aux dérivées partielles, dans les inconnues $\gamma^n_{l\alpha}$, $\gamma^k_{l\alpha}$ qu'il faut satisfaire aux inégalités (27′).

5. **Exemples.** — Compte tenu des formules (23″′) il en résulte que les équations (22′) pour $i = j$ sont une conséquence des équations $\Gamma^i_{j\alpha\beta}$ $(i \neq j)$, parce que nous avons

$$\Gamma^i_{i\alpha\beta} = -\sum_{j \neq i} \Gamma^i_{j\alpha\beta}.$$

D'autre part, les équations $\Gamma^i_{j\alpha\beta} = 0$ $(i \neq j)$ peuvent s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial \Gamma^i_{j\alpha}}{\partial s^\beta} - \frac{\partial \Gamma^i_{j\beta}}{\partial s^\alpha} + M^i_{j\alpha\beta} = 0,$$

où $M^i_{j\alpha\beta}$ sont des formes quadratiques en $\Gamma^k_{l\lambda}$ $(k \neq l)$.

Par conséquent on voit qu'à une solution constante négative de $\Gamma^k_{l\lambda}$ $(k \neq l)$, donc à un processus stationnaire, correspond une solution positive $-\Gamma^k_{l\lambda}$ des équations (22′), c'est-à-dire à un système de probabilités fondamentales dans lequel $s \leqq t$.

Même à une solution négative $\Gamma^k_{l\lambda}$ $(k \neq l)$, dans laquelle $\Gamma^k_{l\lambda}$ sont des fonctions positives des variables s, nous avons une solution positive $-\Gamma^k_{l\lambda}$ qui correspond à un processus markovien dont les variables s, t ont changé de signes.

Considérons alors une solution particulière positive des équations (22′), (23″), (23″′), c'est-à-dire pour lequel toutes les composantes $\Gamma^i_{j\alpha}$ $(i \neq j)$, sont égales pour chaque α avec la dérivée d'une fonction quelconque $-\frac{f}{n}$, donc nous avons

$$\Gamma^{i}_{j\alpha} = -\frac{1}{n} f_\alpha, \qquad \Gamma^{i}_{i\alpha} = \frac{n-1}{n} f_\alpha \qquad (i \neq j), \tag{28}$$

où f_α est une fonction positive des variables $s^1, s^2, \ldots, s^n$.

Dans ce cas, les équations du transport parallèle des vecteurs μ^i_a s'écrivent

$$\frac{\partial \mu^i_a}{\partial s^\alpha} = -\frac{f_\alpha}{n} \sum_{j \neq i} \mu^j_a + \frac{n-1}{n} f_\alpha \mu^i_a. \tag{28'}$$

Posant $\sum_{j=1}^{n} \mu^j_a = \mu_a$, nous pouvons écrire ces équations sous la forme

$$\frac{\partial \mu^i_a}{\partial s^\alpha} = -\frac{f_\alpha}{n} \mu_a + f_\alpha \mu^i_a.$$

Faisant la somme par rapport à i, il en résulte que μ_a sont des constantes, donc nous avons comme solution pour μ^i_a :

$$\mu^i_a = \frac{\mu_a}{n} + c^i_a e^f, \tag{29}$$

où c^i_a sont des constantes. Compte tenu que $\sum_{a=1}^{n} \mu^i_a = 1$, les constantes μ^a_j, c^i_a, il faut satisfaire les conditions

$$\sum_{a=1}^{n} \mu_a = n, \qquad \sum_{a=1}^{n} c^i_a = 0. \tag{29'}$$

De même les équations de transport parallèle de λ^a_i s'écrivent, compte tenu que $\sum_{j=1}^{n} \lambda^a_j = 1$:

$$\frac{\partial \lambda^a_j}{\partial s^\alpha} = \frac{f_\alpha}{n} - f_\alpha \lambda^a_j \qquad \left(\lambda^a = \sum_{j=1}^{n} \lambda^a_j = 1\right),$$

de sorte qu'on obtient

$$\lambda^a_j = \frac{1}{n} + k^a_j e^{-f}, \tag{30}$$

où k^a_i sont des constantes satisfaisant les conditions

$$\sum_{j=1}^{n} k^a_i = 0. \tag{29''}$$

Multipliant les formules (29) et (30) et sommant par rapport à l indice a, on obtient

$$\mu^i_a(s)\,\lambda^a_j(s) = \frac{\mu_a}{n} + \frac{\lambda^a c^i_a}{n} e^{f(s)} + \frac{\mu_a k^a_j}{n} e^{-f(s)} + c^i_a k^a_j.$$

Il faut que ces quantités soient égales à δ^i_j; il en résulte les conditions

$$(30') \qquad \frac{\mu_a}{n} + c^i_a k^a_j = \delta^i_j, \qquad \mu_a k^a_j = 0, \qquad \lambda^a c^i_a = 0.$$

Par conséquent, les constantes μ_a, c^i_a, k^a_j doivent satisfaire les conditions (29'), (29'') et (30').

Compte tenu de ces conditions, les probabilités fondamentales s'écrivent

$$(31) \qquad P^i_j(s, t) = \frac{1}{n} + \left(\delta^i_j - \frac{1}{n}\right) e^{f(s)-f(t)},$$

où f est une fonction croissante dans la variable s.

Si f est une fonction linéaire, le processus est stationnaire et les probabilités fondamentales s'écrivent

$$(32) \qquad P^i_j(s, t) = \frac{1}{n} + \left(\delta^i_j - \frac{1}{n}\right) e^{k_\alpha(s^\alpha - t^\alpha)},$$

où k_α sont des constantes positives. Nous avons :

Théorème 18. — *Les formules* (32) *définissent pour $n = m^p$ un processus markovien avec m états de multiplicité p si f est une fonction croissante des variables $s^1, s^2, \ldots, s^p$ et le processus est stationnaire si f est une fonction linéaire à coefficients positifs.*

Les formules (32) nous donnent un exemple de processus dépendant d'une fonction arbitraire de p variables.

En général, si nous avons un système $(s^1, s^2, \ldots, s^p)$ où les indices varient entre 1 et l'infini et dans lequel la série

$$\sum_{a=1}^{\infty} \mu^i_a$$

est convergente et où il a comme somme 1, on peut considérer que le système des quantités λ^a_i associé est défini par les formules

$$\sum_{a=1}^{\infty} \mu^i_a \lambda^a_j = \delta^i_j, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^a_j = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^a_i \mu^i_b = \delta^a_b, \qquad \sum_{b=1}^{\infty} \mu^i_b = 1$$

et alors nous avons comme probabilités fondamentales d'un processus de Markov avec une infinité dénombrable des états

$$P^i_j(s, t) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \mu^i_\alpha(s)\, \lambda^\alpha_j(t),$$

seulement si cette série est convergente et $P^i_j \geqq 0$ pour $t > s$.

CHAPITRE III.

Applications statistiques.

1. **Phénomènes démographiques.** — Dans le cas $n = 2$, les probabilités sont définies par les formules (18) (chap. I). En ce cas si l'on admet l'existence de dérivées, les probabilités pour un intervalle $(s, s + \Delta s)$, s'écrivent

$$(1)\qquad \begin{cases} P^1_1(s, s+\Delta s) = 1 - \dfrac{\varphi'(s)}{\varphi(s)+\psi(s)}\Delta s + o(\Delta s), \\ P^1_2(s, s+\Delta s) = \dfrac{\varphi'(s)}{\varphi(s)+\psi(s)}\Delta s + o(\Delta s), \\ P^2_1(s, s+\Delta s) = \dfrac{\psi'(s)}{\varphi(s)+\psi(s)}\Delta s + o(\Delta s), \\ P^2_2(s, s+\Delta s) = 1 - \dfrac{\psi'(s)}{\varphi(s)+\psi(s)}\Delta s + o(\Delta s), \end{cases}$$

où l'on indique par $o(\Delta s)$ des termes du second ordre dans Δs.

Par conséquent si nous supposons $\varphi(s) + \psi(s) > 0$, il faut que $\varphi'(s)$ et $\psi'(s)$ soient non négatives et il en résulte que le processus avec une probabilité proche de 1, reste dans l'état où se trouve, dans l'intervalle $(s, s + \Delta s)$, où Δs est très petit. Donc c'est un processus de type Feller.

Le processus devient Poisson si les coefficients de Δs dans les seconds membres des formules (1) sont des constantes, donc si nous avons

$$(1')\qquad \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)+\psi(s)} = \lambda, \qquad \frac{\psi'(s)}{\varphi(s)+\psi(s)} = \mu,$$

où λ, μ sont des constantes positives [19].

En ajoutant ces équations, on obtient

$$\frac{\varphi'+\psi'}{\varphi+\psi} = \lambda + \mu,$$

donc nous avons

$$\varphi(s) + \psi(s) = k\, e^{(\lambda+\mu)s},$$

où k est une constante d'intégration. On peut pour simplifier, multiplier s par un facteur positif de façon que $\lambda + \mu = 1$. Cela fait que les formules (1') nous donnent

$$(1'') \qquad \varphi = \lambda k e^s + h, \qquad \psi = (1-\lambda) k e^s - h,$$

où h est une autre constante d'intégration.

Nous avons :

THÉORÈME 1. — *Le processus Markov continu à deux états est un processus Poisson si les probabilités sont données par les formules*

$$\begin{cases} P_1^1(s,t) = \dfrac{\lambda e^s + (1-\lambda) e^t}{e^t}, & P_2^1(s,t) = \dfrac{\lambda(e^t - e^s)}{e^t}, \\ P_1^2(s,t) = \dfrac{(1-\lambda)(e^t - e^s)}{e^t}, & P_2^2(s,t) = \dfrac{\lambda e^t + (1-\lambda) e^s}{e^t} \end{cases}$$

et inversement.

Supposons que $\psi = \mathrm{Cte}$. En ce cas les formules (1) s'écrivent abstraction faite des termes d'ordre supérieur

$$(2) \qquad \begin{cases} P_1^1(s, s+\Delta s) = 1 - \dfrac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} \Delta s, & P_2^1(s, s+\Delta s) = \dfrac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} \Delta s, \\ P_1^2(s, s+\Delta s) = 0, & P_2^2(s, s+\Delta s) = 1. \end{cases}$$

Si dans ce cas on considère que l'indice 1 en haut représente la vie, l'indice 2 en haut la mort et que la variable s est l'âge, alors $P_1^1(s,t)$ représente la probabilité qu'un individu de l'âge s soit en vie à l'âge t, $P_2^1(s,t)$ est la probabilité qu'un individu de l'âge s soit mort à l'âge t, alors les dernières formules (2) nous disent que l'état de la mort est définitif, un individu mort ne peut pas revenir à la vie.

De plus $\dfrac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}$ représente l'intensité de la mort notée habituellement par $\mu(s) = -\dfrac{l'(s)}{l(s)}$, où $l(s)$ est le nombre des individus de l'âge s [14]. Il est naturel d'admettre que $\mu(s)$ est une fonction continue et croissante parce que la probabilité de la mort croît avec l'âge.

Comme nous pouvons prendre $l(s)\,\varphi(s) = 1$, il en résulte que nous avons

$$P_1^1(s,t) = \frac{l(t)}{l(s)}, \qquad P_2^1(s,t) = 1 - \frac{l(t)}{l(s)},$$
$$P_1^2(s,t) = 0, \qquad P_2^2(s,t) = 1.$$

Observons qu'il est indispensable pour que

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty, \qquad \lim_{t\to\infty} l(t) = 0$$

qu'on ait $\lim\limits_{t \to \infty} P_1^1(s, t) = 0$, c'est-à-dire que l'homme de l'âge t ayant pour $t \to \infty$ une probabilité nulle d'être en vie.

Nous avons donc pour $\psi = \text{Cte}$ le processus classique de la mortalité pour un groupe d'individus. La mortalité entre d'ailleurs dans le type classique de successions des événements indépendants avec la probabilité constante, ce qui arrive si

$$\varphi(s) = e^s, \qquad l(s) = e^{-s}.$$

Supposons que nous avons un processus de Markov associé à une parabole [chap. I, formules (50)] :

$$P_1^1(s, t) = \frac{s + p}{t + p}, \qquad P_2^1(s, t) = \frac{t - s}{s + p},$$
$$P_1^2(s, t) = 0, \qquad P_2^2(s, t) = 1.$$

Dans ce cas nous pouvons prendre comme fonction $l(s)$ la fonction $l(s) = \frac{1}{s + p}$ et nous avons un des plus simples modèles qui peuvent être appliqués dans le cas de la mortalité. Dans ce cas

$$\mu(s) = \frac{1}{l(s)} = s + p,$$

où $\mu(s)$ est l'intensité de la mort, donc ce cas est caractérisé par le fait que le nombre des décédés croît proportionnellement avec l'âge.

Supposons encore que nous avons les probabilités (54) du chapitre I, associées à la parabole cubique (57). Dans ce cas l'intensité de la mort est donnée par la formule

$$\mu(s) = s(2a^2 - s)$$

et l'on voit que cette intensité est maximale pour $s = a^2$. D'autre part, nous avons

$$P_1^1(s, t) = \frac{s(2a^2 - s)}{t(2a^2 - t)}, \qquad P_2^1(s, t) = \frac{(t - s)(2a^2 - t - s)}{t(2a^2 - t)},$$

donc si l'âge de l'individu est très proche de a^2, nous avons

$$s = a^2 - \varepsilon,$$

où ε est une quantité positive très petite, alors les probabilités $P_1^1(s, t)$, $P_2^1(s, t)$ s'écrivent pour $t = a^2$:

$$P_1^1(s, t) = 1 - \frac{\varepsilon^2}{a^4}, \qquad P_2^1(s, t) = \frac{\varepsilon^2}{a^4}.$$

Il convient donc, en admettant que a^2 est l'âge maximal auquel peut arriver un individu, de supposer que $P_2^1(s, t)$ soit la probabilité qu'un individu à l'âge $s = a^2 - \varepsilon$ soit en vie à l'âge $t = a^2$, tandis que $P_1^1(s, t)$ soit la probabilité qu'un individu à l'âge $s = a^2 - \varepsilon$ soit mort à l'âge $t = a^2$.

2. **Invalidité.** — Supposons dans les formules (21) (chap. I), que $\theta = a$, $w = b$, où a, b sont des constantes. Alors les trois dernières de ces formules s'écrivent

$$P_1^3(s, t) = 0, \qquad P_2^3(s, t) = 0, \qquad P_3^3(s, t) = 1.$$

Nous avons encore

$$\begin{aligned}
P_1^1(s, t) &= \frac{1}{D(t)}\{ a\,v(t) + b\,w(t) + a\,\psi(t) \\
&\qquad + \varphi(s)[a + b + v(t)] + u(s)[b + v(t) + \psi(t)] \}, \\
P_2^1(s, t) &= \frac{1}{D(t)}\{ b\,u(t) + b\,\varphi(t) + a\,\varphi(t) \\
&\qquad - \varphi(s)[a + b + u(t)] + u(s)[\varphi(t) - a] \}, \\
P_3^1(s, t) &= \frac{1}{D(t)}\{ u(t)\,v(t) + v(t)\,\varphi(t) + u(t)\,\psi(t) \\
&\qquad + \varphi(s)[u(t) - v(t)] - u(s)[v(t) + \varphi(t) + \psi(t)] \}, \\
P_1^2(s, t) &= \frac{1}{D(t)}\{ a\,v(t) + b\,\psi(t) + a\,\psi(t) \\
&\qquad + v(s)[\psi(t) - a] - \psi(s)[v(t) + a + b] \}, \\
P_2^2(s, t) &= \frac{1}{D(t)}\{ b\,u(t) + b\,\varphi(t) + a\,\varphi(t) \\
&\qquad + v(s)[u(t) + \varphi(t) + a] + \psi(s)[u(t) + a + b] \}, \\
P_3^2(s, t) &= \frac{1}{D(t)}\{ u(t)\,v(t) + u(t)\,\psi(t) + v(t)\,\varphi(t) \\
&\qquad + \psi(s)[v(t) - u(t)] - v(s)[u(t) + \varphi(t) + \psi(t)] \},
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
D(t) = {}& \varphi(t)[v(t) + a + b] + \psi(t)[a + b + u(t)] \\
& + a\,v(t) + b\,u(t) + u(t)\,v(t).
\end{aligned}$$

On peut donc utiliser ces formules pour décrire la situation d'un groupe d'individus où l'état 3 (l'indice 3 en haut) correspond à la mort. Quant aux deux autres indices en haut ils peuvent représenter la vie et l'invalidité. Supposons que l'indice 1 représente la vie et l'indice 2 l'invalidité.

Dans ce cas, $P_1^1(s, t)$ est la probabilité qu'un individu de l'âge s soit en vie à l'âge t, $P_2^1(s, t)$ est la probabilité qu'un individu de l'âge s soit invalide à l'âge t, $P_3^1(s, t)$ est la probabilité qu'un individu de l'âge s soit mort à l'âge, t. $P_1^2(s, t)$ est la probabilité qu'un individu invalide de l'âge s soit en vie à l'âge t, $P_2^2(s, t)$ est la probabilité qu'un individu invalide de l'âge s soit invalide à l'âge t et $P_3^2(s, t)$ est la probabilité qu'un individu invalide à l'âge s soit mort à l'âge t.

Nous avons ainsi un schéma très général qui comprend quatre fonctions arbitraires u, v, φ, ψ et deux constantes arbitraires a, b.

Supposons que le système est homogène. En ce cas, l'équation (27′) (chap. I) dans laquelle on doit supposer $\Gamma_1^3 = \Gamma_2^3 = 0$ et les autres Γ des constantes négatives possèdent des racines réelles. En effet le discriminant de cette équation s'écrit

$$\begin{aligned} R = {} & (\Gamma_2^1)^2 + (\Gamma_3^1)^2 + (\Gamma_1^2)^2 + (\Gamma_3^2)^2 + 2\Gamma_2^1\Gamma_3^1 + 2\Gamma_2^1\Gamma_1^2 \\ & - 2\Gamma_2^1\Gamma_3^2 - 2\Gamma_3^1\Gamma_1^2 - 2\Gamma_3^1\Gamma_3^2 + 2\Gamma_1^2\Gamma_3^2, \end{aligned}$$

ou

$$R = (\Gamma_2^1 - \Gamma_1^2 + \Gamma_3^1 - \Gamma_3^2)^2 + 4\Gamma_2^1\Gamma_1^2,$$

donc $R \geqq 0$, car Γ sont supposées des quantités négatives. D'autre part, la somme et le produit des racines sont positifs, donc les racines ρ, λ sont positives et l'on peut supposer évidemment $\rho \geqq \lambda$. D'autre part si nous supposons $\theta = a$, $w = b$ où a, b sont des constantes nous avons des formules de la forme

$$\tag{3} \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \alpha_1 + \beta_1 e^{\rho s} + \gamma_1 e^{\lambda s}, \\ u &= \alpha_2 + \beta_2 e^{\rho s} + \gamma_2 e^{\lambda s}, \\ v &= \alpha_3 + \beta_3 e^{\rho s} + \gamma_3 e^{\lambda s}, \\ \psi &= \alpha_4 + \beta_4 e^{\rho s} + \gamma_4 e^{\lambda s}, \end{aligned} \right.$$

où α_i, β_i, γ_i $(i = 1, \ldots, 4)$ sont des constantes.

Dans ce cas les formules (29) (chap I), nous donnent pour Γ_2^1, Γ_3^1 :

$$\tag{4} \left\{ \begin{aligned} \Gamma_2^1 = -\frac{1}{\Delta}\{ & \rho e^{\rho s}[\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 + a\beta_1 + b(\beta_1 + \beta_2)] \\ & + \lambda e^{\lambda s}[\alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2 + a\gamma_1 + b(\gamma_1 + \gamma_2)] \\ & \qquad + (\rho - \lambda) e^{(\rho+\lambda)s}(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) \}, \\ \Gamma_3^1 = -\frac{1}{\Delta}\{ & \rho e^{\rho s}[\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_1 + \beta_2(\alpha_3 + \alpha_4)] \\ & + \lambda e^{\lambda s}[\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1 + \alpha_3\gamma_1 + \gamma_2(\alpha_3 + \alpha_4)] \\ & + \rho e^{(\rho+\lambda)s}[\beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2 + \beta_1\gamma_3 + \beta_2(\gamma_3 + \gamma_4)] \\ & + \lambda e^{(\rho+\lambda)s}[\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 + \beta_3\gamma_1 + \gamma_2(\beta_3 + \beta_4)] \\ & + \rho e^{2\rho s}[\beta_1\beta_3 + \beta_2(\beta_3 + \beta_4)] + \lambda e^{2\lambda s}[\gamma_1\gamma_3 + \gamma_2(\gamma_3 + \gamma_4)] \}. \end{aligned} \right.$$

Comme $\Delta(t)$ est toujours positif si toutes les quantités a, b, α_i, β_i, γ_i $(i = 1, \ldots, 4)$ sont des constantes positives, il en résulte que si nous avons $\rho \geqq \lambda$, les Γ_2^1, Γ_3^1 sont négatives si toutes les parenthèses des seconds membres (4) sont positives, en particulier si nous avons

$$\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 \geqq 0.$$

Maintenant si nous avons aussi

$$\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 \geqq 0, \qquad \alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2 \geqq 0,$$

Γ_2^1 est toujours négatif tandis que Γ_3^1 est aussi négatif si

$$\beta_2(\alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_3\beta_1 > \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2,$$
$$\gamma_2(\alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_3\gamma_1 > \alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2,$$
$$\beta_2(\gamma_3 + \gamma_4) + \beta_1\gamma_3 > \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1.$$

D'une manière analogue, nous obtenons

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
\Gamma_1^2 = -\frac{1}{\Delta}\{\ & \rho\, e^{\rho s}[\alpha_3\beta_4 - \alpha_4\beta_3 + b\beta_3 + \beta_4(a+b)] \\
& + \lambda\, e^{\lambda s}[\alpha_3\gamma_4 - \alpha_4\gamma_3 + b\gamma_3 + \gamma_4(a+b)] \\
& \qquad + (\rho - \lambda)\, e^{(\rho+\lambda)s}(\beta_4\gamma_3 - \beta_3\gamma_4)\ \}, \\
\Gamma_3^2 = -\frac{1}{\Delta}\{\ & \rho\, e^{\rho s}[\alpha_4\beta_3 - \alpha_3\beta_4 + \alpha_2\beta_4 + \beta_3(\alpha_1 + \alpha_2)] \\
& + \lambda\, e^{\lambda s}[\alpha_4\gamma_3 - \alpha_3\gamma_4 + \alpha_2\gamma_4 + \gamma_3(\alpha_1 + \alpha_2)] \\
& + \rho\, e^{(\rho+\lambda)s}[\beta_3\gamma_4 - \beta_4\gamma_3 + \beta_4\gamma_2 + \beta_3(\gamma_1 + \gamma_2)] \\
& + \lambda\, e^{(\rho+\lambda)s}[\beta_4\gamma_3 - \beta_3\gamma_4 + \beta_2\gamma_4 + \gamma_3(\beta_1 + \beta_2)] \\
& + \rho\, e^{2\rho s}[\beta_2\beta_4 + \beta_3(\beta_1 + \beta_2)] + \lambda\, e^{2\lambda s}[\gamma_2\gamma_4 + \gamma_3(\gamma_1 + \gamma_2)]\ \}.
\end{aligned}\right.$$

De même si nous avons en particulier

$$\beta_4\gamma_3 - \beta_3\gamma_4 \geqq 0$$

et

$$\alpha_3\beta_4 - \alpha_4\beta_3 \geqq 0, \qquad \alpha_3\gamma_4 - \alpha_4\gamma_3 \geqq 0,$$

Γ_1^2 est toujours négatif tandis que Γ_3^2 est aussi négatif si

$$\beta_3(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_2\beta_4 > \alpha_3\beta_4 - \alpha_4\beta_3,$$
$$\gamma_3(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_2\gamma_4 > \alpha_3\gamma_4 - \alpha_4\gamma_3,$$
$$\beta_3(\gamma_1 + \gamma_2) + \beta_4\gamma_2 > \beta_4\gamma_3 - \beta_3\gamma_4.$$

Par suite nous avons :

THÉORÈME 2. — *Il existe une infinité de processus probabilistiques continus stationnaires qui peuvent décrirent l'invalidité et ces processus dépendent des constantes arbitraires a, b, α_i, β_i, γ_i ($i = 1, \ldots, 4$), ces constantes étant positives et vérifiant certaines inégalités.*

3. Processus de Markov associés à certains groupes de Lie. — Étant donné un groupe de Lie simplement transitif G_n, celui-ci peut être défini comme groupe qui laisse invariante n formes de Pfaff :

$$ds^a = \lambda_i^a \, dx^i \qquad (a,\ i = 1,\ \ldots,\ n), \tag{6}$$

donc le groupe G_n introduit de même un système de n vecteurs, comme dans le cas des formules de Fréchet.

On peut poser le problème de voir en quelles conditions ces vecteurs peuvent définir un processus de Markov.

Supposons que nous avons un groupe simplement transitif G_2 non abélien. Celui-ci a alors la structure [17] :

$$\Delta s^1 = 0, \qquad \Delta s^2 = [ds^1 \, ds^2], \qquad [ds^1 \, ds^2] = ds^1 \, \delta s^2 - ds^2 \, \delta s^1 \tag{7}$$

et nous pouvons satisfaire cette structure en prenant

$$ds^1 = dx, \qquad ds^2 = e^{-x} \, dy. \tag{7'}$$

Or, nous observons que pour la première forme ds^1, la relation de normalité (5) (chap. I) est vérifiée mais pour ds^2 elle n'est pas vérifiée. Mais nous pouvons prendre comme formes qui satisfont la structure (7), les formes

$$ds^1 = dx, \qquad ds^2 = (1 - e^{-x}) \, dx + e^{-x} dy, \tag{8}$$

ce qui revient à ajouter à ds^2 donné par (7′) une différentielle totale exacte :

$$d\varphi = (1 - e^{-x}) \, dx.$$

et alors les conditions de normalité sont vérifiées.

Les formules (8) nous donnent pour λ_i^a, les valeurs

$$\lambda_1^1 = 1, \qquad \lambda_2^1 = 0, \qquad \lambda_1^2 = 1 - e^{-x}, \qquad \lambda_2^2 = e^{-x}.$$

Si nous considérons les formules inverses des formules (8) :

$$dx = ds^1, \qquad dy = (1 - e^{x}) \, ds^1 + e^{x} \, ds^2,$$

il en résulte que nous avons

$$\mu_1^1 = 1, \qquad \mu_2^1 = 0, \qquad \mu_1^2 = 1 - e^{x}, \qquad \mu_2^2 = e^{x}.$$

Les probabilités fondamentales (2′) (chap. I), sont données dans ce cas par les formules

$$P_1^1(s,\ t) = 1, \qquad P_2^1(s,\ t) = 0,$$
$$P_1^2(s,\ t) = 1 - e^{s-t}, \ P_2^2(s,\ t) = e^{s-t} \qquad (s < t),$$

où s, t sont deux valeurs de la variable x. Parce que $s < t$, il en résulte que $P_1^2(s, t)$ et $P_2^2(s, t)$ sont des quantités positives.

Donc nous avons :

THÉORÈME 3. — *A un groupe* G_2 *simplement transitif non abélien, on y associe un processus de Markov avec deux états dans tous l'espace euclidien* $E_2(x, y)$.

Considérons alors un groupe G_3 intégrable, qui a la structure

$$\Delta s^1 = 0, \qquad \Delta s^2 = [ds^1 ds^2], \qquad \Delta s^3 = \lambda\,[ds^1 ds^3].$$

Dans ce cas, nous pouvons satisfaire cette structure en prenant

$$ds^1 = dx, \qquad ds^2 = (1 - e^{-x})\,dx + e^{-x}\,dy, \qquad ds^3 = (1 - e^{-\lambda x})\,dx + e^{-\lambda x}\,dz$$

et donc, les quantités λ_i^a sont données par les formules

$$(9) \qquad \begin{cases} \lambda_1^1 = 1, & \lambda_2^1 = 0, & \lambda_3^1 = 0; \\ \lambda_1^2 = 1 - e^{-x}, & \lambda_2^2 = e^{-x}, & \lambda_3^2 = 0; \\ \lambda_1^3 = 1 - e^{-\lambda x} & \lambda_2^3 = 0, & \lambda_3^3 = e^{-\lambda x}. \end{cases}$$

En écrivant les formules inverses

$$dx = ds^1, \qquad dy = (1 - e^{x})\,ds^1 + e^{x}\,ds^2, \qquad dz = (1 - e^{\lambda x})\,ds^1 + e^{\lambda x}\,ds^3,$$

nous avons

$$(9') \qquad \begin{cases} \mu_1^1 = 1, & \mu_2^1 = 0, & \mu_3^1 = 0; \\ \mu_1^2 = 1 - e^{x}, & \mu_2^2 = e^{x}, & \mu_3^2 = 0; \\ \mu_1^3 = 1 - e^{\lambda x}, & \mu_2^3 = 0, & \mu_3^3 = e^{\lambda x}. \end{cases}$$

D'une manière analogue les probabilités fondamentales (2') (chap. I), en tenant compte de (9) et (9') sont données par les formules

$$\begin{array}{lll} P_1^1(s, t) = 1, & P_2^1(s, t) = 0, & P_3^1(s, t) = 0; \\ P_1^2(s, t) = 1 - e^{s-t}, & P_2^2(s, t) = e^{s-t}, & P_3^2(s. t) = 0; \\ P_1^3(s, t) = 1 - e^{\lambda(s-t)}, & P_2^3(s, t) = 0, & P_3^3(s, t) = e^{\lambda(s-t)}. \end{array}$$

Considérons la structure du groupe intégrable

$$(10) \quad \Delta s^1 = 0, \qquad \Delta s^2 = [ds^1 ds^2], \qquad \Delta s^h = \lambda_h\,[ds^1 ds^h] \qquad (h = 3, \ldots, n).$$

Dans ce cas nous pouvons satisfaire, en prenant

$$(9'') \qquad \begin{cases} ds^1 = dx^1, \qquad ds^2 = (1 - e^{-x^1})\,dx^1 + e^{-x^1}\,dx^2, \\ \qquad ds^h = (1 - e^{-\lambda_h x^1})\,dx^1 + e^{-\lambda_h x^1}\,dx^h. \end{cases}$$

Donc les quantités λ_i^a non nulles sont données par

$$(10') \qquad \begin{cases} \mu_1^1 = 1, \\ \lambda_1^2 = 1 - e^{-x^1}, & \lambda_2^2 = e^{-x^1}, \\ \lambda_1^h = 1 - e^{-\lambda_h x^1}, & \lambda_h^h = e^{-\lambda_h x^1}, \end{cases}$$

avec $h = 3, \ldots, n$.

Les formules inverses de (9″), s'écrivent

$$dx^1 = ds^1, \qquad dx^2 = (1 - e^{x^1})\, ds^1 + e^{x^1} ds^2, \qquad dx^h = (1 - e^{\lambda_h x^1})\, ds^1 + e^{\lambda_h x^1} ds^h,$$

qui nous donnent pour μ_a^i les valeurs non nulles

$$(10'') \qquad \begin{cases} \mu_1^1 = 1, \\ \mu_1^2 = 1 - e^{x^1}, & \mu_2^2 = e^{x^1}, \\ \mu_1^h = 1 - e^{\lambda_h x^1}, & \mu_h^h = e^{\lambda_h x^1}, \end{cases}$$

avec $h = 3, \ldots, n$.

En tenant compte de (10′) et (10″), les probabilités fondamentales non nulles sont données par les formules

$$\begin{aligned} &P_1^1(s, t) = 1, && P_2^2(s, t) = 1, \\ &P_1^h(s, t) = 1 - e^{\lambda_h(s^1 - t^1)}, && P_h^h(s, t) = e^{\lambda_h(s^1 - t^1)}. \end{aligned}$$

On voit donc que les probabilités $P_j^i(s, t)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ non nulles, sont positives si λ_h sont des nombres positifs.

Il en résulte :

THÉORÈME 4. — *Les groupes intégrables avec la structure* (10), *admettent un processus de Markov continu dans tout l'espace euclidien si λ_h ($h = 3, \ldots, n$) sont tous positifs.*

Supposons maintenant que nous sommes dans le cas d'un groupe nilpotent G_3 avec la structure [15] :

$$(11) \qquad \Delta s^1 = 0, \qquad \Delta s^2 = 0, \qquad \Delta s^3 = [ds^1\, ds^2].$$

Dans ce cas nous pouvons prendre comme formes de Pfaff qui satisfont cette structure et elles ont des vecteurs normalisés, les formes suivantes :

$$ds^1 = dx, \qquad ds^2 = dy, \qquad ds^3 = x\,dx - x\,dy + dz.$$

Les vecteurs λ_i^a ($a, i = 1, 2, 3$) s'écrivent dans ce cas sous la forme

$$(11') \quad \begin{cases} \lambda_1^1 = 1, & \lambda_2^1 = 0, & \lambda_3^1 = 0; \\ \lambda_1^2 = 0, & \lambda_2^2 = 1, & \lambda_3^2 = 0; \\ \lambda_1^3 = x, & \lambda_2^3 = -x, & \lambda_3^3 = 1. \end{cases}$$

En écrivant les formules inverses, nous obtenons les formes

$$dx = ds^1, \qquad dy = ds^2, \qquad dz = -x\,ds^1 + x\,ds^2 + ds^3,$$

d'où il en résulte pour μ_a^i ($a, i = 1, 2, 3$), les formules

$$(11'') \quad \begin{cases} \mu_1^1 = 1, & \mu_2^1 = 0, & \mu_3^1 = 0; \\ \mu_1^2 = 0, & \mu_2^2 = 1, & \mu_3^2 = 1; \\ \mu_1^3 = -x, & \mu_2^3 = x, & \mu_3^3 = 1. \end{cases}$$

Les probabilités fondamentales (2') (chap. I), en tenant compte des formules (11') et (11'') s'écrivent sous la forme

$$(11''') \quad \begin{cases} P_1^1(s, t) = 1, & P_2^1(s, t) = 0, & P_3^1(s, t) = 0; \\ P_1^2(s, t) = 0, & P_2^2(s, t) = 1, & P_3^2(s, t) = 0; \\ P_1^3(s, t) = t - s, & P_2^3(s, t) = s - t, & P_3^3(s, t) = 1, \end{cases}$$

où s, t sont deux valeurs de la variable x. Parce que $s < t$, il en résulte que $P_1^3(s, t) > 0$ et $P_2^3(s, t) < 0$, donc on ne peut pas associer un processus probabilistique.

La propriété est vraie pour tout groupe nilpotent parce que tout groupe nilpotent contient en général un sous-groupe G_3 donné par les formules (11).

Considérons par exemple le groupe nilpotent G_4 ayant les vecteurs normalisés

$$ds^1 = dx, \qquad ds^2 = dy, \qquad ds^3 = dz + x\,dx - x\,dy,$$
$$ds^4 = \left(x - \frac{x^2}{2}\right) dx + \frac{x^2}{2}\,dy - x\,dz + dt.$$

Dans ce cas, nous avons

$$(12) \quad \begin{cases} \lambda_1^1 = 1, & \lambda_2^1 = 0, & \lambda_3^1 = 0, & \lambda_4^1 = 0; \\ \lambda_1^2 = 0, & \lambda_2^2 = 1, & \lambda_3^2 = 0, & \lambda_4^2 = 0; \\ \lambda_1^3 = x, & \lambda_2^3 = -x, & \lambda_3^3 = 1, & \lambda_4^3 = 0; \\ \lambda_1^4 = x - \dfrac{x^2}{2}, & \lambda_2^4 = \dfrac{x^2}{2}, & \lambda_3^4 = -x, & \lambda_4^4 = 1. \end{cases}$$

Les formules inverses s'écrivent

$$dx = ds^1, \qquad dy = ds^2, \qquad dz = ds^3 - x\,ds^1 + x\,ds^2,$$
$$dt = -\left(x + \frac{x^2}{2}\right) ds^1 + \frac{x^2}{2}\,ds^2 + x\,ds^3 + ds^4,$$

donc

$$(12')\qquad \begin{cases} \mu_1^1 = 1, & \mu_2^1 = 0, \quad \mu_3^1 = 0, \quad \mu_4^1 = 0; \\ \mu_1^2 = 0, & \mu_2^2 = 1, \quad \mu_3^2 = 0, \quad \mu_4^2 = 0; \\ \mu_1^3 = -x, & \mu_2^3 = x, \quad \mu_3^3 = 1, \quad \mu_4^3 = 0; \\ \mu_1^4 = -x - \dfrac{x^2}{2}, & \mu_2^4 = \dfrac{x^2}{2}, \quad \mu_3^4 = x, \quad \mu_4^4 = 1. \end{cases}$$

Calculons les probabilités fondamentales (2′) (chap. I) en tenant compte des formules (12) et (12′). Nous avons

$$P_1^1(s, t) = 1, \qquad P_2^1(s, t) = P_3^1(s, t) = P_4^1(s, t) = 0;$$
$$P_1^2(s, t) = 0, \qquad P_2^2(s, t) = 1, \qquad P_3^2(s, t) = P_4^2(s, t) = 0;$$
$$P_1^3(s, t) = t - s, \qquad P_2^3(s, t) = s - t, \qquad P_3^3(s, t) = 1, \; P_4^3(s, t) = 0;$$
$$P_1^4(s, t) = t - s - \frac{1}{2}[(s)^2 + (t)^2] + st;$$
$$P_2^4(s, t) = \frac{1}{2}[(s)^2 + (t)^2] - st, \qquad P_3^4(s, t) = s - t, \qquad P_4^4(s, t) = 1.$$

Parce que $P_1^3(s, t)$ et $P_2^3(s, t)$ sont des signes contraires, on ne peut pas associer un processus de Markov.

Considérons aussi le cas d'un groupe nilpotent à cinq paramètres qui possède dans sa structure le premier covariant non nul d'ordre 4 :

$$\Delta s^1 = \Delta s^2 = \Delta s^3 = \Delta s^4 = 0, \qquad \Delta s^5 = [ds^1\,ds^2] + [ds^3\,ds^4].$$

Dans ce cas on peut satisfaire, en prenant

$$(13)\qquad \begin{cases} ds^1 = dx, \quad ds^2 = dy, \quad ds^3 = dz, \quad ds^4 = dt, \\ ds^5 = x\,dx - x\,dy + z\,dz - z\,dt + du, \end{cases}$$

d'où il en résulte pour λ_i^a ($a, i = 1, \ldots, 5$), les formules

$$(14)\qquad \begin{cases} \lambda_1^1 = 1, & \lambda_2^1 = 0, & \lambda_3^1 = 0, & \lambda_4^1 = 0, & \lambda_5^1 = 0; \\ \lambda_1^2 = 0, & \lambda_2^2 = 1, & \lambda_3^2 = 0, & \lambda_4^2 = 0, & \lambda_5^2 = 0; \\ \lambda_1^3 = 0, & \lambda_2^3 = 0, & \lambda_3^3 = 1, & \lambda_4^3 = 0, & \lambda_5^3 = 0; \\ \lambda_1^4 = 0, & \lambda_2^4 = 0, & \lambda_3^4 = 0, & \lambda_4^4 = 1, & \lambda_5^4 = 0; \\ \lambda_1^5 = x, & \lambda_2^5 = -x, & \lambda_3^5 = z, & \lambda_4^5 = -z, & \lambda_5^5 = 1. \end{cases}$$

Les formules inverses des formules (13) s'écrivent

$$dx = ds^1, \qquad dy = ds^2, \qquad dz = ds^3, \qquad dt = ds^4$$
$$du = -x\,ds^1 + x\,ds^2 - z\,ds^3 + z\,ds^4 + ds^5,$$

d'où il en résulte pour μ_a^i, les formules

$$(14')\quad \begin{cases} \mu_1^1 = 1, & \mu_2^1 = 0, & \mu_3^1 = 0, & \mu_4^1 = 0, & \mu_5^1 = 0; \\ \mu_1^2 = 0, & \mu_2^2 = 1, & \mu_3^2 = 0, & \mu_4^2 = 0, & \mu_5^2 = 0; \\ \mu_1^3 = 0, & \mu_2^3 = 0, & \mu_3^3 = 1, & \mu_4^3 = 0, & \mu_5^3 = 0; \\ \mu_1^4 = 0, & \mu_2^4 = 0, & \mu_3^4 = 0, & \mu_4^4 = 1, & \mu_5^4 = 0; \\ \mu_1^5 = -x, & \mu_2^5 = x, & \mu_3^5 = -z, & \mu_4^5 = z, & \mu_5^5 = 1. \end{cases}$$

Les probabilités fondamentales (2') (chap. I) en tenant compte des formules (14) et (14') sont données par les formules

$$(15)\quad \begin{cases} P_1^1(s, t) = 1, \quad P_2^1(s, t) = P_3^1(s, t) = P_4^1(s, t) = P_5^1(s, t) = 0; \\ P_1^2(s, t) = 0, \quad P_2^2(s, t) = 1, \quad P_3^2(s, t) = P_4^2(s, t) = P_5^2(s, t) = 0; \\ P_1^3(s, t) = P_2^3(s, t) = 0, \quad P_3^3(s, t) = 1, \quad P_4^3(s, t) = P_5^3(s, t) = 0; \\ P_1^4(s, t) = P_2^4(s, t) = P_3^4(s, t) = 0, \quad P_4^4(s, t) = 1, \quad P_5^4(s, t) = 0; \\ P_1^5(s, t) = -s^1 + t^1, \quad P_2^5(s, t) = s^1 - t^1, \quad P_3^5(s, t) = -s^3 + t^3, \\ P_4^5(s, t) = s^3 - t^3, \quad P_5^5(s, t) = 1. \end{cases}$$

Par conséquent aussi dans ce cas les probabilités sont de signes contraires. Donc à un groupe nilpotent on ne peut pas associer un système probabilistique.

Nous avons considéré ici seulement les groupes intégrables et leurs cas particuliers, les groupes nilpotents. Cela est dû au fait que les groupes intégrables G_n admettent une réalisation globale dans les espaces euclidiens E_n. Par exemple dans le cas de la structure (7) le groupe est linéaire et s'écrit

$$(16)\qquad x' = x + a, \qquad y' = e^a y + b$$

Un groupe intégrable G_n admet donc une représentation dans E_n où les vecteurs λ_i^a, μ_a^i sont réguliers dans tous l'espace E_n, donc les probabilités $P_j^i(s, t)$ sont définies elles-mêmes dans tout l'espace E_n.

Évidemment nous avons considéré comme groupes G_n intégrables qui ne sont pas nilpotents, seulement les groupes ayant la structure (10) qui dépend de $n - 2$ constantes arbitraires. Il y a aussi d'autres structures intégrables (non nilpotents) comme par exemple la structure (11) à laquelle on associe le covariant bilinéaire $\Delta s^4 = [ds^2 ds^4]$, donc la structure

$$(17)\qquad \Delta s^1 = 0, \qquad \Delta s^2 = 0, \qquad \Delta s^3 = [ds^1 ds^2], \qquad \Delta s^4 = [ds^2 ds^4].$$

En ce cas on peut prendre comme formes normalisées

$$(18)\qquad \begin{cases} ds^1 = dx, \quad ds^2 = dy, \quad ds^3 = x\,dx - x\,dy + dz, \\ ds^4 = e^{-y}\,dt + (1 - e^{-y})\,dy, \end{cases}$$

de façon que le tableau des λ_i^a est donné par les formules

$$\left\{\begin{array}{llll}
\lambda_1^1 = 1, & \lambda_2^1 = 0, & \lambda_3^1 = 0, & \lambda_4^1 = 0; \\
\lambda_1^2 = 0, & \lambda_2^2 = 1, & \lambda_3^2 = 0, & \lambda_4^2 = 0; \\
\lambda_1^3 = x, & \lambda_2^3 = -x, & \lambda_3^3 = 1, & \lambda_4^3 = 0; \\
\lambda_1^4 = 0, & \lambda_2^4 = 1 - e^{-y}, & \lambda_3^4 = 0, & \lambda_4^4 = e^{-y}.
\end{array}\right.$$

Or il est facile à voir que le tableau des probabilités contient (11‴) donc on ne peut pas associer au groupe G_n avant la structure (11) et (17) un processus probabilistique, donc il y a aussi des groupes intégrables non nilpotents auxquels on ne peut pas associer un processus probabilistique.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] G. VRANCEANU et G. G. VRANCEANU, *Probabilités et transport parallèle* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 255, 1962, p. 40-41).

[2] G. G. VRANCEANU, *Interpretări geometrice în teoria proceselor Markov, Studii şi cercetări matematice* (*Ed. Acad. R. P. R.*, t. 15, 1964, p. 15-43).

[3] M. FRÉCHET, *Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, t. II, 1952, p. 219-255.

[4] O. ONICESCU, *Calculul probabilităţilor*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1956.

[5] R. THEODORESCU, *Asupra relaţiilor caracteristice ale lanţurilor Markov, continue de multiplicitate p* (*Bul. şt. Acad. R. P. R.*, Secţia de şt. mat. şi fiz., t. 7, 1955, p. 763-775).

[6] J. L. DOOB, *Stochastic Processes*, John Wiley, New-York, 1958.

[7] J. ACZEL, *Vorlesung über Funktionalgleichungen*, Veb. Deutscher Verlag, 1961, p. 247.

[8] J. ACZEL, *Remarques algébriques sur la solution donnée par M. Fréchet à l'équation de Kolmogoroff* (*Publications mathém.*, t. 4, 1955, p. 35).

[9] A. KOLMOGOROV, *Uber die analytischen Methoden in der Wahrschein lichkeisrechnung* (*Math. Ann.*, t. 104, 1931, p. 415-458).

[10] J. Th. RUNNENBURG, *On Elfeving's Problem of Imbedding a time Discrete Markov Chain in a Time continuous one for finitely many States* (*Indagationes Mathematicae*, Amsterdam, vol. 24, 1962, p. 5).

[11] G. CIUCU et R. THEODORESCU, *Procese cu legături complete*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1961, p. 203-204.

[12] G. G. VRANCEANU, *Théorie géométrique des chaînes probabilistiques*, Bruxelles (*Bull. Classe des Sciences*, 5e série, t. 51, 1965, p. 1158-1167).

[13] G. VRANCEANU, *Leçons de Géométrie différentielle*, t. I, Ed. Acad. R. P. R. Bucuresti et Gauthier-Villars, Paris, 1957.

[14] O. ONICESCU, G. MIHOC et IONESCU TULCEA, *Calculul probabilităţilor şi aplicaţii*, Ed. Acad. R. P. R., 1954.

[15] G. VRANCEANU, *Leçons de Géométrie différentielle*, t. III, Ed. Acad. R. S. R. et Gauthier-Villars, Paris, 1964.

[16] G. VRANCEANU, TH. HANGAN et C. TELEMAN, *Recherches de Géométrie différentielle en Roumanie* (*Revue Math.*, 1966, p. 1-15).

[17] G. G. VRANCEANU, *Processus de Markov associés à certains groupes de Lie* (*Rev. Roum. de math. pures et appl.* 8e série, t. 13, 1968, p. 1195-1200).

[18] G. G. VRANCEANU, *Processi Markov associati ad una curva piana* [*Boll. U. M. I.*, (4), vol. II, 1968, p. 227-231, Bologna].

[19] A. T. BHARUCHA-REID, *Elements of the Theory of Markov Processes and their applications*, Mc Graw-Hill, New-York, 1960.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I : *Processus markoviens simples* 2

1. Formules de Fréchet 2
2. Systèmes de vecteurs associés 5
3. Théorème de Kolmogorov 7
4. Probabilités stationnaires 10
5. Détermination des probabilités pour $n = 2$ et 3 12
6. Exemples de systèmes de probabilités pour $n > 3$ 23
7. Vecteurs probabilistiques le long d'une courbe 29

CHAPITRE II : *Processus markoviens multiples* 33

1. Métriques probabilistiques 33
2. Métriques à courbure constante négative 43
3. Connexions affines probabilistiques 48
4. Groupes probabilistiques 52
5. Exemples 56

CHAPITRE III : *Applications statistiques* 59

1. Phénomènes démographiques 59
2. Invalidité 62
3. Processus de Markov associés à certains groupes de Lie 65

BIBLIOGRAPHIE 72