MARIUS I. STOKA

Géométrie intégrale

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 165 (1968)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1968__165__1_0>

Marius I. STOKA

GÉOMÉTRIE INTÉGRALE

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Directeur : H. VILLAT

FASCICULE CLXV

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ÉDITEUR
1968

GÉOMÉTRIE INTÉGRALE

Par M. Marius I. STOKA.

A ma mère mon premier professeur de mathématique.

INTRODUCTION.

Le premier problème de géométrie intégrale a été « le problème de l'aiguille » de Buffon qui, à juste titre, est considéré comme le fondateur des probabilités géométriques et, par conséquent, de la géométrie intégrale. La solution rigoureuse de ce problème a été donnée en 1860, par E. Barbier, dans le *Journal de Liouville* [1]. Dans ce Mémoire l'auteur traite, outre le problème de l'aiguille, diverses questions sur la mesure des ensembles de droites dans le plan (sans introduire explicitement la notion de mesure).

En 1868, le géométrie anglais M. W. Crofton publie un article dans *Philosophical Transaction* [11] où il démontre les élégants théorèmes, qui portent son nom, sur la mesure des couples de droites dans le plan.

De cette date à l'année 1926, où parut le premier livre sur les probabilités géométriques, une série d'articles de géométrie intégrale furent publiés par Sylvester [41], E. Cartan [6], H. Lebesgue [16], B. Hostinsky [15].

En 1926 parut l'Ouvrage de R. Deltheil, *Probabilités géométriques*, dans lequel l'auteur expose systématiquement les résultats obtenus en géométrie intégrale jusqu'à cette date, ainsi qu'une série de résultats propres, parmi lesquels l'important théorème de l'invariant intégral d'un groupe de Lie de transformations.

En 1935, W. Blaschke fonde à Hambourg une véritable école de géométrie intégrale, qui, pendant les cinq années consacrées au cycle *Géométrie intégrale*, publie plus de trente travaux, notamment dans la revue *Hamburger Abhandlungen*. De cette école firent partie L. A. Santaló. S. S. Chern, H. Hadwiger, W. Maak, O. Varga, B. Petkanschin, etc.

La tradition de cette école a été continuée par L. A. Santaló et par ses disciples.

Depuis l'année 1940, L. A. Santaló, S. S. Chern, J. Rey Pastor et d'autres, ont publié une série de travaux importants dans lesquels les problèmes de géométrie intégrale sont traités par la méthode du repère mobile de É. Cartan.

Dans le premier chapitre, nous nous occupons de la théorie des « groupes mesurables » et nous donnons une série de théorèmes dus à R. Deltheil, S. S. Chern et l'auteur.

Le deuxième chapitre traite du problème de la mesure des familles de variétés dans un espace quelconque. Dans ce chapitre, nous nous occupons également de la mesure cinématique de Poincaré.

Dans les IIIe, IVe et Ve chapitres, les résultats obtenus sont appliqués au plan, à l'espace euclidien ordinaire et aux espaces riemanniens, ceux à deux dimensions notamment.

CHAPITRE I.

Groupes mesurables.

1. Invariants intégraux d'un groupe. — Soit X_n un espace à n dimensions de coordonnées $x^1, \ldots, x^n$ et dans cet espace, un groupe de Lie de transformation défini par les équations

$$(1)\qquad y^i = f^i(x^1, \ldots, x^n, a^1, \ldots, a^r) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

où $a^1, \ldots, a^r$ sont des paramètres essentiels. La fonction $F(x^1, \ldots, x^n)$ est une *fonction invariante intégrale* du groupe (1) si l'on a

$$(2)\qquad \int_{\mathcal{A}} F(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \ldots dx^n = \int_{\mathcal{A}_1} F(y^1, \ldots, y^n)\, dy^1 \ldots dy^n,$$

pour chaque ensemble de points $\mathcal{A}$, de l'espace X_n pour lequel l'intégrale a un sens. Tenant compte de (1), (2) s'écrit

$$\int_{\mathcal{A}} F(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \ldots dx^n = \int_{\mathcal{A}} F(y^1, \ldots, y^n) \frac{D(y^1, \ldots, y^n)}{D(x^1, \ldots, x^n)}\, dx^1 \ldots dx^n,$$

où $\frac{D(y)}{D(x)}$ est le jacobien de la transformation (1). Cette relation, devant être satisfaite pour chaque ensemble de points pour lequel l'intégrale a un sens, est équivalente à

$$(3)\qquad F(x^1, \ldots, x^n) = \frac{D(y^1, \ldots, y^n)}{D(x^1, \ldots, x^n)} F(y^1, \ldots, y^n).$$

Si la transformation identique du groupe (1) correspond aux valeurs $a^1 = \ldots = a^r = 0$ des paramètres, la relation (3) est vérifiée pour ces mêmes valeurs, et pour qu'elle le soit quels que soient les a^i il faut et il suffit que la fonction $\frac{D(y)}{D(x)} F(y)$ ne dépende pas de $a^1, \ldots, a^n$, c'est-à-dire qu'on ait

$$\frac{\partial}{\partial a^h}\left[F(y)\frac{D(y)}{D(x)}\right] = 0 \qquad (h = 1, \ldots, r). \tag{4}$$

En posant $\frac{D(y)}{D(x)} = \Delta$, la relation (4) devient

$$\Delta \frac{\partial F}{\partial a^h} + F \frac{\partial \Delta}{\partial a^h} = 0. \tag{4'}$$

De la règle de dérivation des déterminants, il résulte

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a^h} = \sum_{i=1}^{n} \Delta^i_h \qquad (h = 1, \ldots, r), \tag{5}$$

où Δ^i_h représente le déterminant déduit de Δ par dérivation, par rapport à a^h, de la colonne i. Si nous désignons par $X_h f = \xi^i_h \frac{\partial f}{\partial x^i}$ les transformations infinitésimales du groupe (1), les équations différentielles de ce groupe sont

$$\frac{\partial y^i}{\partial a^h} = \xi^i_l(y)\, \varphi^l_h(a) \qquad (h = 1, \ldots, r);$$

nous en déduisons

$$\frac{\partial}{\partial a^h}\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial y^i}{\partial a^h}\right) = \varphi^k_h(a)\frac{\partial \xi^i_k(y)}{\partial x^j} = \varphi^k_h(a)\frac{\partial \xi^i_k(y)}{\partial y^s}\frac{\partial y^s}{\partial x^j},$$

et par suite $\Delta^i_h = \varphi^k_h(a)\frac{\partial \xi^i_k(y)}{\partial y^s}\Delta^{is}$ (sans sommer par rapport à i), où Δ^{is} est le déterminant obtenu en remplaçant dans Δ la colonne i par la colonne s, c'est-à-dire $\Delta^{is} = \Delta\delta^s_i$. Nous avons donc

$$\Delta^i_h = \varphi^l_h(a)\frac{\partial \xi^i_k(y)}{\partial y^i}\Delta,$$

d'où en portant dans (5) :

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a^h} = \varphi^k_h(a)\,\Delta\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \xi^i_k(y)}{\partial y^i}.$$

(4′) devient ainsi

$$(6) \qquad \frac{\partial F(y)}{\partial a^h} + F(y)\,\varphi_h^k(a)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \xi_k^i(y)}{\partial y^i} = 0,$$

et comme

$$\frac{\partial F(y)}{\partial a^h} = \frac{\partial F(y)}{\partial y^i}\,\frac{\partial y^i}{\partial a^h} = \frac{\partial F(y)}{\partial y^i}\,\varphi_h^k(a)\,\xi_k^i(y),$$

la relation (6) s'écrit

$$\varphi_h^k(a)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y^i}[\xi_k^i(y)\,F(y)] = 0 \qquad (h = 1, \ldots, r).$$

Les relations précédentes devant avoir lieu pour tout système de valeurs des paramètres a^h, et compte tenu de ce que, pour $a^1 = \ldots = a^r = 0$, on a $\varphi_h^k = \delta_h^k$, il en résulte

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_b}[\xi_h^i(y)\,F(y)] = 0,$$

d'où le théorème dû à R. Deltheil ([12], [29]) :

Les fonctions invariantes intégrales d'un groupe de Lie de transformations sont les solutions du système d'équation aux dérivées partielles

$$(7) \qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}[\xi_h(x)\,F(x)] = 0 \qquad (h = 1, \ldots, r),$$

où $\xi_h^i(x)$ *sont les coefficients des transformations infinitésimales du groupe.*

Si le groupe (1) admet deux fonctions invariantes intégrales $F_1 \neq 0$, $F_2 \neq 0$, on a

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_h^i\frac{\partial \ln F_1}{\partial x^i} + \frac{\partial \xi_h^i}{\partial x^i}\right) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n}\left(\xi_h^i\frac{\partial \ln F_2}{\partial x^i} + \frac{\partial \xi_h^i}{\partial x^i}\right) = 0,$$

d'où, en posant $\varphi = \ln\frac{F_1}{F_2}$, $\xi_h^i\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = 0$; φ est donc une fonction invariante du groupe (1). Si l'on tient compte de ce qu'un groupe n'admet de fonctions invariantes que s'il est intransitif, on voit que [12] :

Si un groupe intransitif admet une fonction invariante intégrale $F(x)$, *toutes les autres fonctions invariantes intégrales du groupe sont de la forme* $F_1(x) = F(x)\,e^{\varphi(x)}$, *où* $\varphi(x)$ *est une fonction invariante du groupe.*

Il en résulte qu'un groupe transitif a, au plus, une fonction invariante intégrale.

2. **Groupes de Lie mesurables.** — En géométrie intégrale, les groupes admettant une fonction invariante intégrale unique présentent un intérêt particulier.

DÉFINITION. — *Nous appelons groupe de Lie mesurable un groupe qui admet une fonction invariante intégrale, définie à une constante multiplicative près.*

Pour obtenir les conditions nécessaires et suffisantes de mesurabilité d'un groupe de Lie [31], écrivons le système (7) sous la forme

$$\xi^i_h \frac{\partial \ln F}{\partial x^i} = -\frac{\partial \xi^i_h}{\partial x^i}. \tag{8}$$

Une condition nécessaire pour que le groupe (1) soit mesurable est qu'il soit transitif. Supposons donc que

$$\Delta = \det |\xi^i_j| \neq 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n);$$

des équations

$$\xi^j_h \frac{\partial \xi^i_k}{\partial x^j} - \xi^j_k \frac{\partial \xi^i_h}{\partial x^j} = c^l_{hk} \xi^i_l \qquad (h, k, l = 1, \ldots, r), \tag{9}$$

nous déduisons alors

$$\frac{\partial \xi^i_h}{\partial x^i} = \xi^j_h \bar{\xi}^u_i \frac{\partial \xi^i_u}{\partial x^j} + c^l_{uh} \xi^i_l \bar{\xi}^u_i \qquad (u = 1, \ldots, n),$$

où $\bar{\xi}^u_i$ est réciproque de l'élément ξ^i_u du déterminant Δ, d'où, d'après $\bar{\xi}^u_i \frac{\partial \xi^i_u}{\partial x^j} = \frac{\partial \ln \Delta}{\partial x^j}$,

$$\frac{\partial \xi^i_h}{\partial x^i} = \xi^j_h \frac{\partial \ln \Delta}{\partial x^j} + c^l_{uh} \xi^i_l \bar{\xi}^u_i, \tag{10}$$

et, en portant dans (8) :

$$\xi^i_h \frac{\partial \ln \Delta F}{\partial x^i} = c^l_{hu} \xi^i_h \bar{\xi}^u_i.$$

Ce dernier système étant considéré comme un système algébrique linéaire par rapport aux variables $\frac{\partial \ln \Delta F}{\partial x^i}$, la condition pour qu'il soit compatible est

$$c^l_{uv} \xi^i_\alpha \xi^j_l \bar{\xi}^u_j \bar{\xi}^v_i - c^l_{u\alpha} \xi^i_l \bar{\xi}^u_i = 0 \qquad (\alpha = n+1, \ldots, r).$$

En supposant cette relation satisfaite, on peut écrire

$$\frac{\partial \ln \Delta F}{\partial x^j} = c^l_{uv} \xi^i_l \bar{\xi}^u_i \bar{\xi}^v_j, \tag{11}$$

(11) est pour F un système aux différentielles totales complètement intégrable.

Pour le voir dérivons les équations (8) par rapport à x^j, multiplions par ξ^j_k et sommons par rapport à j; nous obtenons

$$\xi^j_k \frac{\partial \xi^i_h}{\partial x^j} \frac{\partial F}{\partial x^i} + \xi^i_h \xi^j_k \frac{\partial^2 F}{\partial x^j \partial x_i} = -\xi^j_k \frac{\partial \xi^i_h}{\partial x^i} \frac{\partial F}{\partial x^j} - \xi^j_k \frac{\partial^2 \xi^i_h}{\partial x^j \partial x^i} F,$$

d'où, en échangeant h et k et soustrayant

$$\left(\xi^j_h \frac{\partial \xi^i_k}{\partial x^j} - \xi^j_k \frac{\partial \xi^i_h}{\partial x^j}\right) \frac{\partial F}{\partial x^i} \tag{12}$$
$$- \xi^i_h \xi^j_k \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}\right) = \left(\xi^j_k \frac{\partial^2 \xi^i_h}{\partial x^i \partial x^j} - \xi^j_h \frac{\partial^2 \xi^i_k}{\partial x^i \partial x^j}\right) F.$$

En dérivant les relations (9) par rapport à x^i et en sommant par rapport à i nous obtenons

$$\xi^j_k \frac{\partial^2 \xi^i_h}{\partial x^i \partial x^j} - \xi^j_h \frac{\partial^2 \xi^i_k}{\partial x^i \partial x^j} = c^l_{kh} \frac{\partial \xi^i_l}{\partial x^i},$$

d'où, en portant dans (12), et compte tenu de (8) et (9) :

$$\xi^i_h \xi^j_k \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^j \partial x^i}\right) = 0,$$

et par suite, le groupe étant transitif,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^j \partial x^i}.$$

(11) est donc complètement intégrable, et l'on a

$$\ln \Delta F = \varphi(x^1, \ldots, x^n) + c,$$

soit

$$F(x^1, \ldots, x^n) = k\Phi(x^1, \ldots, x^n),$$

où k est une constante, et Φ une fonction uniquement déterminée. Nous avons donc le théorème :

La condition nécessaire et suffisante pour que le groupe (1) *soit mesurable est qu'il soit transitif et que soient satisfaites les relations*

$$\left\{\begin{array}{l} c^l_{uv} \xi^i_\alpha \xi^j_l \xi^u_j \bar{\xi}^v_i - c^l_{u\alpha} \xi^i_l \bar{\xi}^u_i = 0 \\ (i, j, u, v = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, r;\ \alpha = n+1, \ldots, r), \end{array}\right. \tag{13}$$

où c^h_{kl} est le tenseur de structure du groupe, et où $\bar{\xi}^u_v$ est le réciproque de l'élément ξ^v_u du déterminant non nul de la matrice $\|\xi^i_h\|$.

Dans le cas où le groupe (1) est simplement transitif, les relations (13) sont identiquement vérifiées, donc :

Les groupes simplement transitifs sont mesurables.

En considérant les groupes transitifs G_{n+1} (13) devient

$$D = c_j \xi^j_{n+1} \bar{\xi}^j_i - c_{n+1} = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n), \tag{13'}$$

où $c_k = c^h_{hk} (j, k = 1, \ldots, n+1)$ est le vecteur de structure de Vrănceanu du groupe G_{n+1}.

Si le vecteur de structure est nul, la relation (13′) est vérifiée et l'on a le théorème :

Les groupes transitifs G_{n+1} d'un espace X_n, dont le vecteur de structure de Vrànceanu est nul, sont mesurables.

Si $c_k \neq 0$, auquel cas moyennant un changement de paramètres $a'^h = c^h_k a^k$ nous pouvons supposer $c_k = \delta^s_k$ où s est un indice fixe, nous avons à envisager les deux cas $s = n+1$ et $s \neq n+1$.

Dans le premier cas, nous avons $c_k = \delta^{n+1}_k$, donc $D = -1 \neq 0$, et le groupe est non mesurable. Mais, en vertu de l'identité de Lie :

$$c_k c^k_{hl} = 0, \tag{14}$$

on a $c^{n+1}_{kl} = 0$, et le groupe G_{n+1} admet le sous-groupe engendré par les opérateurs $X_1, \ldots, X_n$ qui est simplement transitif, donc mesurable.

Dans le deuxième cas on peut, sans restreindre, supposer $s = 1$, soit $c_k = \delta^1_k$. De (14) il résulte alors $c^1_{hk} = 0$, et G_{n+1} admet le sous-groupe G_n engendré par les opérateurs $X_2, \ldots, X_{n+1}$.

Dans ce cas, nous avons également

$$D = \xi^i_{n+1} \bar{\xi}^1_i = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} \xi^1_2 & \xi^2_2 & \cdots & \xi^n_2 \\ \xi^1_3 & \xi^2_3 & \cdots & \xi^n_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi^1_{n+1} & \xi^2_{n+1} & \cdots & \xi^n_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Si $D = 0$, le groupe G_{n+1} est mesurable.

Si $D \neq 0$, G_{n+1} est non mesurable, mais son sous-groupe G_n est simplement transitif, donc mesurable et nous avons le théorème [40] :

Un groupe transitif G_{n+1} à n variables est mesurable, ou bien il admet au moins un sous-groupe G_n mesurable.

Supposons maintenant que le groupe de stabilité du groupe G_r (1) soit engendré par les opérateurs $X_{n+1}, \ldots, X_r$; nous avons alors $c^i_{\alpha\beta} = 0$ ($i = 1, \ldots, n$; $\alpha, \beta = n+1, \ldots, r$) et nous pouvons prendre pour opérateurs du groupe

$$(15)\qquad \begin{cases} X_u f = \dfrac{\partial f}{\partial x^u} + a^i_{ju} x^j \dfrac{\partial f}{\partial x^i} + \ldots & (i, j, u = 1, \ldots, n), \\ X_\alpha f = c^i_{j\alpha} x^j \dfrac{\partial f}{\partial x^i} \qquad\quad + \ldots & (\alpha = n+1, \ldots, r), \end{cases}$$

les termes non écrits étant d'ordre $\geqq 2$ en x^j [42].

A l'origine, on a donc $\xi^i_j = \delta^i_j$, $\xi^i_\alpha = 0$, d'où pour $x^1 = \ldots = x^n = 0$:

$$c^l_{uv}\, \xi^i_\alpha\, \xi^j_l\, \bar{\xi}^u_j\, \bar{\xi}^v_i - c^l_{u\alpha}\, \xi^i_l\, \bar{\xi}^u_i = -\, c^u_{u\alpha}.$$

Si donc les opérateurs du groupe transitif (1) sont écrits sous la forme (15), une condition nécessaire de mesurabilité du groupe est $c^u_{u\alpha} = 0$ ($u = 1, \ldots, n$; $\alpha = n+1, \ldots, r$).

Cette condition est aussi suffisante.

Pour le montrer désignons par $x^{n+1}, \ldots, x^r$, $r - n$ variables *secondaires* (É. Cartan). G_r défini par les opérateurs (15) laisse invariantes les formes Pfaff :

$$ds^u = \lambda^u_i\, dx^i, \qquad ds^\alpha = \lambda^\alpha_i\, dx^i + \lambda^\alpha_\beta\, dx^\beta \qquad (u, i = 1, \ldots, n;\ \alpha, \beta = n+1, \ldots, r),$$

où λ^u_i, λ^α_i, λ^α_β dépendent de x^i, x^α et où $D = \det|\lambda^u_i| \neq 0$; les ds^u sont donc des formes Pfaff indépendantes dans l'espace X_n.

Les formes ds^u, ds^α satisfont les équations de structure

$$(16)\qquad \begin{cases} \Delta s^u = c^u_{vl}\, ds^v\, \delta s^l + c^u_{v\beta}\, [ds^v\, ds^\beta], \\ \Delta s^\alpha = c^\alpha_{vl}\, ds^v\, \delta s^l + c^\alpha_{v\beta}\, [ds^v\, ds^\beta] + c^\alpha_{\beta\gamma}\, ds^\beta\, \delta s^\gamma, \end{cases}$$

où $[ds^v\, ds^\beta] = ds^v\, \delta s^\beta - ds^\beta\, \delta s^v$, Δ étant l'opérateur $d\,\delta - \delta\, d$.

Les formes ds^u et ds^α sont déterminées par les équations (16), abstraction faite d'une transformation de la forme

$$d\bar{s}^v = c^v_u\, ds^u, \qquad d\bar{s}^\alpha = c^\alpha_u\, ds^u + c^\alpha_\beta\, ds^\beta,$$

où c^v_u, c^α_u, c^α_β sont des constantes et où $\det|c^v_u| \neq 0$, $\det|c^\alpha_\beta| \neq 0$.

Les c^v_u, supposées fonctions de x^i, x^α, peuvent être choisies de manière à ne pas dépendre des x^α. On a en effet

$$\Delta s^v = c^v_u\, \Delta s^u + \left(\frac{\partial c^v_u}{\partial s^l} - \frac{\partial c^v_l}{\partial s^u}\right) ds^u\, \delta s^l + \frac{\partial c^v_u}{\partial s^\alpha}\, [ds^u\, ds^\alpha],$$

soit d'après (16) :

$$\Delta s^{v} = w^{v}_{ut}\, ds^{u}\, \delta s^{t} + \left(c^{v}_{i}\, c^{i}_{u\alpha} + \frac{\partial c^{v}_{u}}{\partial s^{\alpha}}\right)[ds^{u}\, ds^{\alpha}], \tag{17}$$

où l'on a posé

$$w^{i}_{ut} = \frac{\partial c^{i}_{u}}{\partial s^{t}} - \frac{\partial c^{i}_{t}}{\partial s^{u}} + c^{v}_{i}\, c^{i}_{ut}.$$

$\Delta \bar{s}^{v}$ ne dépendra pas de x^{α} si l'on peut déterminer c^{i} pour que

$$\frac{\partial c^{v}_{u}}{\partial s^{\alpha}} = -\, c^{v}_{i}\, c^{i}_{u\alpha}. \tag{18}$$

Les conditions d'intégrabilité de ce système sont

$$\frac{\partial^{2} c^{v}_{u}}{\partial s^{\beta}\, \partial s^{\alpha}} - \frac{\partial^{2} c^{v}_{u}}{\partial s^{\alpha}\, \partial s^{\beta}} = c^{\gamma}_{\beta\alpha}\, \frac{\partial c^{v}_{u}}{\partial s^{\gamma}},$$

soit d'après (18) :

$$c^{v}_{j}\, (c^{i}_{u\alpha}\, c^{j}_{i\beta} + c^{i}_{\beta u}\, c^{j}_{i\alpha} + c^{\gamma}_{\alpha\beta}\, c^{j}_{\gamma u}) = 0,$$

et, compte tenu de ce que $\det |\, c^{v}_{j}\, | \neq 0$,

$$c^{i}_{u\alpha}\, c^{j}_{i\beta} + c^{i}_{\beta u}\, c^{j}_{i\alpha} + c^{\gamma}_{\alpha\beta}\, c^{j}_{\gamma u} = 0. \tag{19}$$

Ces relations sont les identités de Lie où il est tenu compte de ce que $c^{i}_{\alpha\beta} = 0$. Le système (18) est donc complètement intégrable. Il en résulte que les $d\bar{s}^{i}$, c'est-à-dire les c^{v}_{u}, ne dépendent que des x^{i}. En posant $D_1 = \det |\, c^{i}_{j}\, |$, on a

$$\bar{D} = D_1\, D, \tag{20}$$

et, en dérivant D_1 par rapport à s^{α} et d'après (18) :

$$\frac{\partial D_1}{\partial s^{\alpha}} = -\, c^{u}_{u\alpha}\, D_1$$

Si la relation $c^{u}_{u\alpha} = 0$ est satisfaite, $D_1 =$ Cte, et (20) montre que D ne dépend que des x^{i} ([43], [45]).

L'intégrale

$$\int_{\mathcal{C}_x} D(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \ldots dx^n = \int_{\mathcal{C}_x} [ds^1 \ldots ds^n], \tag{21}$$

du fait que les formes ds^{u} sont invariantes par le groupe G_r, est invariante par ce même groupe; $D = \det |\, \lambda^{u}_{i}\, |$ est fonction invariante intégrale du groupe (15) et l'on a le théorème (Chern [9]) :

La condition nécessaire est suffisante pour que l'intégrale (21) *soit invariante par le groupe* (15) *est*

$$c^u_{u\alpha} = 0 \qquad (u = 1, \ldots, n;\ \alpha = n+1, \ldots, r)$$

Un groupe transitif ne pouvant avoir qu'une fonction invariante intégrale au plus, on en déduit :

La condition nécessaire et suffisante pour que le groupe transitif (15) *soit mesurable est* $c^u_{u\alpha} = 0$.

Les identités de Lie donnent par addition

$$(22) \qquad c_h c^h_{kl} = 0 \qquad (h, k, l = 1, \ldots, r),$$

d'où, compte tenu de ce que $c^{i}_{\alpha\beta} = 0$, on déduit

$$c_i c^i_{u\nu} + c_\alpha c^\alpha_{u\nu} = 0, \qquad c_\alpha c^\alpha_{\beta\gamma} = 0, \qquad c_i c^i_{u\beta} + c_\alpha c^\alpha_{u\beta} = 0,$$

et

$$(23) \qquad c_i = c^j_{ji} + c^\alpha_{\alpha i}, \qquad c_\alpha = c^j_{j\alpha} + c^\beta_{\beta\alpha}$$

G_{r-n} étant le groupe de stabilité de (15), et $c^\alpha_{\beta\gamma}$ ses constantes de structure, supposons G_{r-n} parfait. Nous avons alors $c_\alpha = 0$, car dans le cas contraire on pourrait supposer $c_\alpha = \delta^r_\alpha$, on déduirait de (22) $c^r_{\beta\gamma} = 0$, et le groupe G_{r-n} admettrait le sous-groupe défini par les opérateurs $X_{n+1}, \ldots, X_{r-1}$, ce qui est absurde puisque G^{r-n} est parfait. Le vecteur de structure du groupe G_{r-n} est $c^\beta_{\beta\alpha}$ et nous avons une relation analogue à (22) pour le groupe G_{r-n}, à savoir $c^\beta_{\beta\alpha} c^\alpha_{\gamma\delta} = 0$. G_{r-n} étant parfait, on a $c^\beta_{\beta\alpha} = 0$, et cette relation, portée dans (23) et jointe à la relation $c_\alpha = 0$, montre que $c^j_{j\alpha} = 0$, et que par suite le groupe (15) est mesurable. D'où le théorème [45] :

Un groupe G_r ayant comme groupe de stabilité un groupe parfait est mesurable.

Supposons maintenant que le groupe G_r (1) admette un sous-groupe G_s mesurable, défini par les opérateurs $X_1, \ldots, X_s$; on a donc

$$(24) \qquad c^\sigma_{\rho_1\rho_2} = 0 \qquad (\rho_1, \rho_2 = 1, \ldots, s;\ \sigma = s+1, \ldots, r).$$

Posons

$$A_\alpha = c^l_{u\nu} \xi^i_\alpha \xi^j_l \bar{\xi}^u_j \bar{\xi}^\nu_i - c^l_{u\alpha} \xi^i_l \bar{\xi}^u_i \qquad (l = 1, \ldots, r),$$

$$A^*_\lambda = c^\rho_{u\nu} \xi^i_\lambda \xi^j_\rho \bar{\xi}^u_j \bar{\xi}^\nu_i - c^\rho_{u\lambda} \xi^i_\rho \bar{\xi}^u_i \qquad (\lambda = n+1, \ldots, s).$$

Il résulte de (24) :

$$(25) \qquad A_\lambda = A^*_\lambda \qquad A_\sigma = c^\rho_{u\nu} \xi^i_\sigma \xi^j_\rho \bar{\xi}^u_j \bar{\xi}^\nu_i - c^l_{u\sigma} \xi^i_l \bar{\xi}^u_i.$$

Le groupe G_s étant mesurable on a $A^*_l = 0$, et pour que G_r soit mesurable, il faut que $A_l = 0$, $A_\sigma = 0$, conditions qui, d'après (25), se réduisent à $A_\sigma = 0$. On a donc le théorème :

Si le groupe G_r, *défini par les opérateurs* $X_h f = \xi^i_h \frac{\partial f}{\partial x^i}$ $(h = 1, \ldots, r)$ *a un sous-groupe mesurable* $G_s = [X_1, \ldots, X_s]$, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit mesurable est qu'on ait*

$$c^p_{uv}\, \xi^l_\sigma \xi^j_p \bar{\xi}^u_j \bar{\xi}^v_i - c^l_{u\sigma} \xi^i_l \bar{\xi}^u_i = 0$$

$$(i, j, u, v = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, r;\ p = 1, \ldots, s;\ \sigma = s + 1, \ldots, r).$$

Il en résulte que si le groupe transitif G_r est non mesurable, mais a un sous-groupe G_s mesurable, l'une au moins des inégalités $A_\sigma \neq 0$ est satisfaite.

DÉFINITION.— *Nous appelons base d'un groupe transitif* G_r *défini par les opérateurs* $X_h f = \xi^i_h \frac{\partial f}{\partial x^i}$ $(h = 1, \ldots, r)$ *le système de fonctions* ξ^i_α $(\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \{1, \ldots, r\})$, *supposées à déterminant non nul.*

De cette définition résulte la propriété :

Un groupe transitif G *a au moins deux bases.*

Supposons en effet que la matrice $\| \xi^i_h \|$ admette un seul déterminant d'ordre n différent de zéro, par exemple $\Delta = \det | \xi^i_j |$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ et que tous les autres déterminants d'ordre n de la matrice soient nuls. Nous avons donc

$$\begin{vmatrix} \xi^1_1 & \xi^2_1 & \cdots & \xi^n_1 \\ \xi^1_2 & \xi^2_2 & \cdots & \xi^n_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi^1_{n-1} & \xi^2_{n-1} & \cdots & \xi^n_{n-1} \\ \xi^1_{n+1} & \xi^2_{n+1} & \cdots & \xi^n_{n+1} \end{vmatrix} = 0,$$

d'où il résulte

$$(26) \qquad \xi^i_{n+1}(x) = \lambda^u(x)\, \xi^i_u(x) \qquad (u = 1, \ldots, n - 1).$$

En notant Δ_u le déterminant déduit de Δ en y remplaçant la ligne u par la ligne $n + 1$ de la matrice $\| \xi^i_{n+1} \|$, il résulte de la supposition faite que $\Delta_u = 0$ $(u = 1, \ldots, n - 1)$, et (26) donne $\lambda^u \Delta = 0$. Mais $\Delta \neq 0$, donc $\lambda^u = 0$ $(u = 1, \ldots, n - 1)$, et par suite $\xi^i_{n+1} = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, ce qui est absurde puisque le groupe a r paramètres.

Supposons que le groupe $G_r = [X_1, \ldots, X_r]$ ait deux sous-groupes mesurables

$$G_s \equiv [X_{\alpha_1}, \ldots, X_{\alpha_s}] \quad \text{et} \quad G_t \equiv [X_{\beta_1}, \ldots, X_{\beta_t}]$$
$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_1 \in \{1, \ldots, r\})$$

ayant une base commune.

Pour simplifier supposons que la base commune des deux sous-groupes, soit $X_1, \ldots, X_n$. Les invariants intégraux de G_s et G_t sont les solutions des systèmes d'équations aux dérivées partielles

$$G_s: \quad \xi^i_j \frac{\partial \ln F}{\partial x^i} = -\frac{\partial \xi^i_j}{\partial x^i}, \quad \xi^i_\alpha \frac{\partial \ln F}{\partial x^i} = -\frac{\partial \xi^i_\alpha}{\partial x^i} \quad (\alpha = \alpha_{x+1}, \ldots, \alpha_s)$$

$$G_t: \quad \xi^i_j \frac{\partial \ln F}{\partial x^i} = -\frac{\partial \xi^i_j}{\partial x^i}, \quad \xi^i_\beta \frac{\partial \ln F}{\partial x^i} = -\frac{\partial \xi^i_\beta}{\partial x^i} \quad (\beta = \beta_{n+1}, \ldots, \beta_t).$$

Les groupes G_s et G_t étant mesurables et $\det \| \xi^i_j \| = 0$, les deux systèmes ont une solution commune, et les deux invariants intégraux sont égaux ([1]).

Considérons maintenant un groupe G_r admettant un sous-groupe G_s, et supposons G_r et G_s définis respectivement par les opérateurs $X_1, \ldots, X_r$ et $X_1, \ldots, X_s$. Les fonctions invariantes intégrales de G_r et G_s sont, respectivement, les solutions des systèmes

$$G_r: \quad \frac{\partial}{\partial x^i}[\xi^i_h(x) F(x)] = 0 \qquad (h = 1, \ldots, r),$$

$$G_s: \quad \frac{\partial}{\partial x^i}[\xi^i_l(x) F(x)] = 0 \qquad (l = 1, \ldots, s),$$

et il est évident que le deuxième système admet toutes les solutions du premier. De là la proposition :

Les sous-groupes d'un groupe G_r admettent les invariants intégraux de G_r.

Nous en déduisons les deux conséquences suivantes :

1. *Si un groupe G_r mesurable a un sous-groupe mesurable, les invariants intégraux des deux groupes sont égaux.*

2. *Si un groupe G_r a un sous-groupe transitif G_s non mesurable, le groupe G_r est non mesurable.*

([1]) Nous dirons de deux invariants intégraux qu'ils sont égaux s'ils ne diffèrent que par un facteur constant.

En effet, si le groupe G_r était mesurable, il aurait un invariant intégral qui, d'après ce qui précède, serait aussi invariant intégral pour G_s. Mais G_s étant transitif il serait mesurable, et cela est exclu.

Démontrons maintenant le théorème suivant de non-mesurabilité [30] :

Soit $G_r \equiv [X_1, \ldots, X_r]$ *un groupe transitif non mesurable, pour lequel*

$$c_{uv}^{l}\, \xi_{n+1}^{l}\, \bar{\xi}_{l}^{j}\, \xi_{j}^{u}\, \bar{\xi}_{i}^{v} - c_{n,\, n+1}^{l}\, \xi_{l}^{i}\, \bar{\xi}_{i}^{u} \neq 0.$$

Si ce groupe a deux sous-groupes mesurables, définis par les opérateurs

$$\begin{gathered} G_s = [X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n, X_{\alpha_1}, \ldots, X_{\alpha_{s-n}}], \\ G_t = [X_1, \ldots, X_{n-1}, X_{n+1}, X_{\beta_1}, \ldots, X_{\beta_{t-n}}] \\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-n}, \beta_1, \ldots, \beta_{t-n} \in \{ n+2, \ldots, r \}) \end{gathered}$$

et de bases respectives $X_1, \ldots, X_n$ *et* $X_1, \ldots, X_{n-1}, X_{n+1}$, *et si en outre ces deux sous-groupes n'ont aucune base commune, leurs invariants intégraux sont inégaux.*

Désignons par F_1, F_2 les fonctions invariantes intégrales de G_s, G_t, et soient

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 & \ldots & \xi_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{n-1}^1 & \xi_{n-1}^2 & \ldots & \xi_{n-1}^n \\ \xi_n^1 & \xi_n^2 & \ldots & \xi_n^n \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 & \ldots & \xi_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{n-1}^1 & \xi_{n-1}^2 & \ldots & \xi_{n-1}^n \\ \xi_{n+1}^1 & \xi_{n+1}^2 & \ldots & \xi_{n+1}^n \end{vmatrix},$$

Les groupes G_s et G_t étant mesurables, on a

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \ln F_1}{\partial x^i} &= -\bar{\xi}_i^u \frac{\partial \xi_u^j}{\partial x^j} - \bar{\xi}_i^n \frac{\partial \xi_n^j}{\partial x^j} \\ \frac{\partial \ln F_2}{\partial x^i} &= -\bar{\zeta}_i^u \frac{\partial \xi_u^j}{\partial x^j} - \bar{\zeta}_i^{n+1} \frac{\partial \xi_{n+1}^j}{\partial x^j} \end{aligned}\right\} \quad (u = 1, \ldots, n-1),$$

$\bar{\zeta}_i^\alpha$ étant le réciproque de l'élément ξ_α^i du déterminant Δ_2, d'où

$$\frac{\partial \ln \dfrac{F_1}{F_2}}{\partial x^i} = (\bar{\zeta}_i^u - \bar{\xi}_i^u) \frac{\partial \xi_\alpha^j}{\partial x^j} - \bar{\xi}_i^n \frac{\partial \xi_n^j}{\partial x^j} + \bar{\zeta}_i^{n+1} \frac{\partial \xi_{n+1}^j}{\partial x^j}. \tag{27}$$

On démontre aisément que

$$\bar{\zeta}_i^u - \bar{\xi}_i^u = (-1)^{n+u+1} \frac{\bar{\xi}_i^n}{\Delta_2} \Delta^u,$$

où Δ^u est le déterminant formé avec les éléments $\xi_1^i, \ldots, \xi_{u-1}^i, \xi_{u+1}^i, \ldots, \xi_n^i, \xi_{n+1}^i$, et de même $\bar{\xi}_i^n \Delta_1 = \bar{\zeta}_i^{n+1} \Delta_2$.

Tenant compte de ces relations dans (27) on obtient

$$\frac{\partial \ln \frac{F_1}{F_2}}{\partial x^i} = \frac{\bar{\xi}_i^n}{\Delta_2} \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 & \dots & \xi_1^n & \frac{\partial \xi_1^i}{\partial x^i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_n^1 & \xi_n^2 & \dots & \xi_n^n & \frac{\partial \xi_n^i}{\partial x^i} \\ \xi_{n+1}^1 & \xi_{n+1}^2 & \dots & \xi_{n+1}^n & \frac{\partial \xi_{n+1}^i}{\partial x^i} \end{vmatrix},$$

et d'après la formule (10) :

$$(27') \qquad \frac{\partial \ln \frac{F_1}{F_2}}{\partial x^i} = \frac{\bar{\xi}_i^n}{\Delta_2}\left(c_{uv}^l\, \xi_{n+1}^i\, \xi_l^j\, \bar{\xi}_j^u\, \bar{\xi}_i^v - c_{u,n+1}\, \xi_l^i\, \bar{\xi}_i^u\right).$$

Mais $\Delta_1 = 0$, l'un au moins des réciproques $\bar{\xi}_i^n$ n'est donc pas nul; il en résulte qu'une au moins des dérivées $\dfrac{\partial \ln \frac{F_1}{F_2}}{\partial x^i}$ est $\neq 0$, et que par suite les invariants intégraux F_1 et F_2 sont inégaux.

Soit maintenant un groupe $G_{n+1} \equiv [X_1, \dots, X_{n+1}]$ admettant deux sous-groupes simplement transitifs

$$G'_n \equiv [X_1, \dots, X_n] \qquad \text{et} \qquad G''_n \equiv [X_1, \dots, X_{n-1}, X_{n+1}];$$

F_1 et F_2 étant les invariants intégraux de G'_n, G''_n, (27) devient

$$\frac{\partial \ln \frac{F_1}{F_2}}{\partial x^i} = \xi_n^i\left(c_j\, \xi_{n+1}^u\, \bar{\xi}_u^j - c_{n+1}\right)\frac{\Delta_2}{\Delta_1} \qquad (i, j, u = 1, \dots, n).$$

Un réciproque $\bar{\xi}_n^i$ au moins n'étant pas nul, il en résulte que si F_1 et F_2 sont égaux on a $c_j\, \xi_{n+1}^u\, \bar{\xi}_n^j - c_{n+1} = 0$, et que par suite G_{n+1} est mesurable. La réciproque est immédiate, et l'on a le théorème :

Si le groupe $G_{n+1} \equiv [X_1, \dots, X_{n+1}]$ *de l'espace* X_n *a deux sous-groupes* $G'_n \equiv [X_1, \dots, X_n]$ *et* $G''_n \equiv [X_1, \dots, X_{n-1}, X_{n+1}]$ *simplement transitifs, la condition nécessaire et suffisante pour que le groupe* G_{n+1} *soit mesurable est que* G'_n *et* G''_n *aient des invariants intégraux égaux.*

Groupes a une, deux ou trois variables. — Les groupes à une variable se réduisent [17] au groupe des translations, au groupe affine et au groupe projectif. Le groupe G_1 des translations à une variable est simplement transitif, donc mesurable. Le groupe affine G_2, $x' = ax + b$

est défini par les opérateurs $G_2 \equiv [p, xp] \left(p = \frac{\partial f}{\partial x}\right)$; son système de Deltheil associé

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = -F.$$

est incompatible; il a deux sous-groupes simplement transitifs, $G_1 \equiv [p]$, $G'_1 \equiv [xp]$ admettant les fonctions invariantes intégrales respectives $F(x) = 1$ et $F(x) = \frac{1}{x}$.

Le groupe projectif $x' = \frac{ax+b}{cx+1}$, est défini par les opérateurs $G_3 \equiv [p, xp, x^2p]$. Il admet comme sous-groupe le groupe affine G_2 qui est non mesurable; G_3 est donc non mesurable. G_3 admet de même les sous-groupes G_1 et G'_1, lesquels ont des fonctions invariantes intégrales différentes. De là le résultat [32] :

Le seul groupe à une variable mesurable est le groupe des translations. Les groupes non mesurables à une variable ont au moins deux sous-groupes mesurables à invariants intégraux différents.

Eu égard aux classifications de Lie [17] pour les groupes à deux et trois variables on peut énoncer le théorème :

Les groupes à deux et trois variables non mesurables, ont au moins deux sous-groupes mesurables à invariants intégraux différents.

CHAPITRE II.

Mesures des familles de variétés.

1. Groupes d'invariance. — Soit, dans l'espace X_n de coordonnées $x^1, \ldots, x^n$, une famille $\mathcal{F}_q$ de variétés à p dimensions, $\mathcal{V}_p$, définie par les équations

$$(1) \qquad F^\lambda(x^1, \ldots, x^n, \alpha^1, \ldots, \alpha^q) = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, n-p),$$

où $\alpha^1, \ldots, \alpha^q$ sont des paramètres essentiels.

L'ensemble des transformations continues de coordonnées de l'espace X_n laissant globalement invariante la famille $\mathcal{F}_q$ forme évidemment un groupe de Lie, que nous désignons par $\mathcal{G}$.

Les transformations de $\mathcal{G}$, telles que $S\mathcal{V}_p = \mathcal{V}_p$ pour tout $\mathcal{V}_p \in \mathcal{F}_q$, forment un groupe g, et ce groupe est un sous-groupe invariant [2] de $\mathcal{G}$, car si T est une transformation quelconque de $\mathcal{G}$, on a comme on le constate aussitôt $T^{-1} g T = g$.

Au groupe $\mathcal{G}$ on peut attacher le groupe quotient $G = \frac{\mathcal{G}}{g}$ défini par la propriété de laisser invariante la famille de variétés $\mathcal{F}_q$ et de ne contenir, en dehors de la transformation identique, aucune transformation laissant individuellement invariantes les différentes variétés $\mathcal{V}_p$ de $\mathcal{F}_q$. Nous appelons G le *groupe maximal d'invariance de la famille* $\mathcal{F}_q$, *et ses sous-groupes les groupes d'invariance de la même famille.*

Soit $G_r(x)$ un tel groupe d'invariance de $\mathcal{F}_q$, défini par les équations

$$(2)\qquad y^i = f^i(x^1, \ldots, x^n, a^1, \ldots, a^r) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

où $a^1, \ldots, a^r$ sont des paramètres essentiels. Nous avons, par un choix convenable des variables

$$(3)\qquad F^\lambda[f^1(x, a), \ldots, f^n(x, a), \beta^1, \ldots, \beta^q] = F^\lambda(x^1, \ldots, x^n, \alpha^1, \ldots, \alpha^q),$$

où

$$(4)\qquad \beta^k = g^k(\alpha^1, \ldots, \alpha^q, a^1, \ldots, a^r) \qquad (k = 1, \ldots, q).$$

Au groupe $G_r(x)$ d'invariance de la famille $\mathcal{F}_q$ les transformations (4) attachent une famille de transformations de l'espace X_q des paramètres de $\mathcal{G}$.

En ce qui concerne cette famille de transformations nous démontrerons le théorème suivant [27] :

Les transformations (4) *forment un groupe isomorphe au groupe* G_r *d'invariance de la famille de variétés* $\mathcal{F}_q$.

Le groupe $G_r(x)$ ne contenant, en dehors de la transformation identique, aucune transformation laissant séparément invariantes les variétés de la famille $\mathcal{F}_q$, la famille de transformations (6) est à r paramètres essentiels, nous désignerons cette famille par $H_r(\alpha)$.

Soient trois variétés $\mathcal{V}_p, \mathcal{V}'_p, \mathcal{V}''_q \in \mathcal{F}_q$ d'équations respectives

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_p &: \ F^\lambda(z^1, \ldots, z^n, \alpha^1, \ldots, \alpha^q) = 0,\\
\mathcal{V}'_p &: \ F^\lambda(y^1, \ldots, y^n, \beta^1, \ldots, \beta^q) = 0,\\
\mathcal{V}''_p &: \ F^\lambda(x^1, \ldots, x^n, \gamma^1, \ldots, \gamma^q] = 0,
\end{aligned}$$

et trois transformations du groupe $G_r(x)$:

$$\begin{aligned}
T_a &: \ z^i = f^i(y^1, \ldots, y^n, a^1, \ldots, a^r),\\
T_b &: \ y^i = f^i(x^1, \ldots, x^n, b^1, \ldots, b^r),\\
T_c &: \ z^i = f^i(x^1, \ldots, x^n, c^1, \ldots, c^r),
\end{aligned}$$

telles que

$$(5)\qquad T_a\mathcal{V}_p = \mathcal{V}'_p, \qquad T_b\mathcal{V}'_p = \mathcal{V}''_p, \qquad T_c\mathcal{V}_p = V''_p.$$

De ces relations il résulte $T_b T_a = T_c$, donc

(6) $f^i[f^1(x, b), \dots, f^n(x, b), a^1, \dots, a^r] = f^i(x^1, \dots, x^n, c^1, \dots, c^r).$

En écrivant explicitement les relations (5) nous obtenons

(5′) $F^\lambda[f^1(y, a), \dots, f^n(y, a), \alpha^1, \dots, \alpha^q] = F^\lambda(y^1, \dots, y^n, \beta^1, \dots, \beta^q),$

(5″) $F^\lambda[f^1(x, b), \dots, f^n(x, b), \beta^1, \dots, \beta^q] = F^\lambda(x^1, \dots, x^n, \gamma^1, \dots, \gamma^q),$

(5‴) $F^\lambda[f^1(x, c), \dots, f^n(x, c), \alpha^1, \dots, \alpha^q] = F^\lambda(x^1, \dots, x^n, \gamma^1, \dots, \gamma^q).$

La transformation identique I du groupe $G_r(x)$ étant supposée obtenue pour $a^1 = \dots = a^r = 0$, on a

$$f^i(x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0) = x^i,$$

et, en faisant dans la relation (3) $a^1 = \dots = a^r = 0$,

$$F^\lambda(x^1, \dots, x^n, \beta^1, \dots, \beta^q) = F^\lambda(x^1, \dots, x^n, \alpha^1, \dots, \alpha^q),$$

d'où

$$g^k(\alpha^1, \dots, \alpha^q, 0, \dots, 0) = \alpha^k.$$

La famille de transformations $H_r(\alpha)$ contient donc la transformation identique J et l'on a $I \rightleftharpoons J$.

Des relations (5′), (5″) et (5‴) il résulte

(4‴) $\alpha^k = g^k(\beta^1, \dots, \beta^q, a^1, \dots, a^r),$

(4′) $\beta^k = g^k(\gamma^1, \dots, \gamma^q, b^1, \dots, b^r),$

(4‴) $\alpha^k = g^k(\gamma^1, \dots, \gamma^q, c^1, \dots, c^r),$

d'où

(6′) $g^k[g^1(\gamma, b), \dots, g^q(\gamma, b), a^1, \dots, a^r] = g^k(\gamma^1, \dots, \gamma^q, c^1, \dots, c^r).$

En désignant par τ_a, τ_b, τ_c les transformations (4′), (4″), (4‴), la relation (6) donne

(7) $$\tau_b \tau_a = \tau_c;$$

la famille de transformation $H_r(\alpha)$ forme donc un groupe.

De même, des relations (6) et (6′) il résulte que si l'on a $T_a \rightleftharpoons \tau_a$, $T_b \rightleftharpoons \tau_b$, alors

(7′) $$T_b T_a \rightleftharpoons \tau_b \tau_a.$$

(7) et (7′) montrent que les groupes $G_r(x)$ et $H_r(\alpha)$ sont isomorphes.

Nous appellerons $H_r(\alpha)$ *le groupe attaché au groupe* $G_r(x)$ relativement à la famille $\mathcal{F}_q$ de variétés $\mathcal{V}_p$ (1).

La relation explicite entre les groupes $G_r(x)$ et $H_r(\alpha)$ s'obtient de la façon suivante. Écrivons leurs équations sous la forme

$$\left.\begin{aligned} y^i &= x^i + \xi^i_h(x)\, a^h + \xi^i_{hk}(x)\, a^h a^k + \ldots \\ \beta^\nu &= \alpha^\nu + \eta^\nu_h(\alpha)\, a^h + \eta^\nu_{hk}(\alpha)\, a^h a^k + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (h, k = 1, \ldots, r)$$

et portons ces relations dans (3); nous obtenons

$$(8) \qquad \begin{aligned} F^j[\, & x + \xi_h(x)\, a^h + \xi_{hk}(x)\, a^h a^k + \ldots, \\ & \alpha + \eta_h(\alpha)\, a^h + \eta_{hk}(\alpha)\, a^h a^k + \ldots\,] = F^j(x, \alpha), \end{aligned}$$

puis par développement en série du premier membre,

$$\begin{aligned} &\left[\xi^i_h(x)\frac{\partial F^j(x, \alpha)}{\partial x^i} + \eta^\nu_h(\alpha)\frac{\partial F^j(x, \alpha)}{\partial \alpha^\nu}\right] a^h \\ &+ \frac{1}{2}\left[\xi^i_{hk}(x)\frac{\partial F^j(x, \alpha)}{\partial x^i} + \eta^\nu_{hk}(\alpha)\frac{\partial F^j(x, \alpha)}{\partial \alpha^\nu}\right. \\ &\qquad + 2\xi^i_h(x)\,\eta^\nu_k(\alpha)\frac{\partial^2 F^j(x, \alpha)}{\partial x^i\,\partial \alpha^\nu} + \xi^i_h(x)\,\xi^l_k(x)\frac{\partial^2 F^j(x, \alpha)}{\partial x^i\,\partial x^l} \\ &\qquad\qquad \left. + \eta^\nu_h(\alpha)\,\eta^\rho_k(\alpha)\frac{\partial^2 F^j(x, \alpha)}{\partial \alpha^\nu\,\partial \alpha^\rho}\right] a^h a^k + \ldots = 0. \end{aligned}$$

Compte tenu de

$$\xi^i_{hk}(x) = \frac{1}{2}\left[\xi^l_h(x)\frac{\partial \xi^i_k(x)}{\partial x^l} + \xi^l_k\frac{\partial \xi^i_h(x)}{\partial x^l}\right],$$

la relation (18) devient

$$(9) \qquad A^j_h\, a^h + A^j_{hk}\, a^h a^k + \ldots = 0$$

où

$$A^j_h = \xi^i_h(x)\frac{\partial F^j(x, \alpha)}{\partial x^i} + \eta^\nu_h(\alpha)\frac{\partial F^j(x, \alpha)}{\partial \alpha^\nu},$$

$$\begin{aligned} 2A^j_{hk} = \; & \xi^l_h(x)\frac{\partial}{\partial x^l}\left[\xi^i_k(x)\frac{\partial F^j(x, \alpha)}{\partial x^i} + \eta^\nu_k(\alpha)\frac{\partial F^j(x, \alpha)}{\partial \alpha^\nu}\right] \\ & + \xi^l_k(x)\frac{\partial}{\partial x^l}\left[\xi^i_h(x)\frac{\partial F^j(x, \alpha)}{\partial x^i} + \eta^\nu_h(\alpha)\frac{\partial F^j(x, \alpha)}{\partial \alpha^\nu}\right] \\ & + \eta^\rho_h(\alpha)\frac{\partial}{\partial \alpha^\rho}\left[\xi^i_k(x)\frac{\partial F^j(x, \alpha)}{\partial x^i} + \eta^\nu_k(\alpha)\frac{\partial F^j(x, \alpha)}{\partial \alpha^\nu}\right] \\ & + \eta^\rho_k(\alpha)\frac{\partial}{\partial \alpha^\rho}\left[\xi^i_h(x)\frac{\partial F^j(x, \alpha)}{\partial x^i} + \eta^\nu_h(\alpha)\frac{\partial F^j(x, \alpha)}{\partial \alpha^\nu}\right], \; \ldots. \end{aligned}$$

Pour que l'égalité (9) soit identiquement satisfaite il faut que $A_h = 0$, $A_{hk} = 0$, ... Une condition nécessaire pour que le groupe $G_r(x)$ soit groupe d'invariance de la famille $\mathcal{F}_q$ est donc

$$\xi^i_h(x)\frac{\partial F^j(x, \alpha)}{\partial x^i} + \eta^\nu_h(\alpha)\frac{\partial F^j(x, \alpha)}{\partial \alpha^\nu} = 0.$$

Si cette relation est satisfaite on a $A_{hk} = 0$ et, en vertu de l'isomorphisme des groupes $H_1(\alpha)$ et $G_1(x)$ et des formes canoniques des fonctions $\xi^i_{hkl}(x)$, ..., les coefficients de la relation (9) sont nuls; par suite :

Étant donnés deux groupes isomorphes $G_1(x)$ *et* $H_1(\alpha)$, *la condition nécessaire et suffisante pour que* $G_1(x)$ *soit groupe d'invariance de la famille de variétés* $\mathcal{F}_q$ *est que*

$$\xi^i_h(x)\frac{\partial F^l(x, \alpha)}{\partial x^i} + \eta^\nu_h(x)\frac{\partial F^l(x, \alpha)}{\partial \alpha^\nu} = 0. \tag{10}$$

$H_1(\alpha)$ est alors le groupe attaché au groupe d'invariance $G_1(x)$ relativement à la famille $\mathcal{F}_q$.

Voyons maintenant à quelles conditions le système (10) admet des solutions acceptables [autres que $F^l(x, \alpha) = \text{Cte}$]. Attachons-lui à cet effet le système algébrique (aux inconnues z_i et t_ν) :

$$\xi^i_j(x) z_i + \eta^\nu_h(\alpha) t_\nu = 0. \tag{11}$$

Une condition nécessaire pour que le système (10) admette des solutions acceptables est que le système (11) ait des solutions différentes de la solution nulle puisque, dans le cas contraire, le système (10) n'a que la solution

$$\frac{\partial F^l(x, \alpha)}{\partial x^i} = 0, \qquad \frac{\partial F^l(x, \alpha)}{\partial \alpha^\nu} = 0.$$

ou

$$F^l(x, \alpha) = c^l \qquad (c^l = \text{Cte}).$$

Si $r < n + q$, la condition ci-dessus est satisfaite. Si $r \geqq n + q$, elle équivaut au fait que la matrice

$$\| \xi^1_h(x), \ldots, \xi^n_h(x), \eta^1_h(\alpha), \ldots, \eta^q_h(\alpha) \|$$

est de rang $r_1 < n + q$, et s'il en est ainsi le système (10) a $r_1 < n + q$ équations indépendantes.

Considérons donc le cas $r < n + q$ et posons

$$X_h(F^l) = \xi^i_h(x)\frac{\partial F^l(x, \alpha)}{\partial x^i} + \eta^\nu_h(\alpha)\frac{\partial F^\lambda(x, \alpha)}{\partial \alpha^\nu}.$$

Avec cette notation le système (10) s'écrit

$$X_h(F^\lambda) = 0,$$

et de l'isomorphisme des groupes $G_r(x)$ et $H_r(\alpha)$ il résulte

$$X_h[X_k(F^\lambda)] - X_k[X_h(F^\lambda)] = c^l_{hk} X_l(F^\lambda)$$

qui exprime que (10) est un système jacobien. (10) admet donc [2] $n + q - r$ intégrales indépendantes

$$\varphi^a(x^1, \ldots, x^n, \alpha^1, \ldots, \alpha^q) \qquad (a = 1, \ldots, n + q - r),$$

la solution générale étant

$$F^\lambda(x, \alpha) = \Phi^\lambda[\varphi^1(x, \alpha), \ldots, \varphi^{n+q-r}(x, \alpha)].$$

On a donc le théorème [35] :

Étant donnés deux groupes isomorphes $G_r(x)$ *et* $H_r(\alpha)$, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une famille* $\mathcal{F}_q$ *de variétés* $\mathcal{V}_p$ *admettant* $G_r(x)$ *comme groupe d'invariance, est que la matrice*

$$\| \xi^1_h(x), \ldots, \xi^n_h(x), \eta^1_h(\alpha), \ldots, \eta^q_h(\alpha) \| \qquad (h = 1, \ldots, r),$$

soit de rang $r_1 < n + q$. *Si cette condition est satisfaite, la famille* $\mathcal{F}_q$ *est définie par*

$$\Phi^\lambda[\varphi^1(x, \alpha), \ldots, \varphi^{n+q-r}(x, \alpha)[= 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, n - p),$$

où $\varphi^\alpha(x, \alpha)$ $(a = 1, \ldots, n + q - r_1)$ *sont les intégrales indépendantes du système*

$$\xi^i_k(x) \frac{\partial F^\lambda(x, \alpha)}{\partial x^i} + \eta^\nu_k(\alpha) \frac{\partial F^\lambda(x, \alpha)}{\partial \alpha^\nu} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r_1),$$

$\xi^i_h(x)$, $\eta^\nu_h(\alpha)$ *étant les coefficients des transformations infinitésimales des groupes* $G_r(x)$ *et* $H_r(\alpha)$. $H_r(\alpha)$ *est alors le groupe attaché au groupe d'invariance* $G_r(x)$ *relativement à la famille* $\mathcal{F}_q$.

Ce théorème admet l'interprétation géométrique suivante :

Dans l'espace X_{n+q} de coordonnées

$$z^i = x^i, \qquad z^{n+\nu} = \alpha^\nu \qquad (i = 1, \ldots, n;\ \nu = 1, \ldots, q),$$

où la famille $\mathcal{F}_q$ de variétés (22) est une variété $\mathcal{V}_{p+q}$ à $p + q$ dimensions, considérons la famille de transformations définie par les équations

$$(12) \qquad \begin{cases} z'^i = f^i(z^1, \ldots, z^n, a^1, \ldots, a^r), \\ z'^{n+\nu} = g^\nu(z^{n+1}, \ldots, z^{n+q}, a^1, \ldots, a^r). \end{cases}$$

En posant $\zeta_h^i(z) = \xi_h^i(x)$, $\eta_h^{n+\nu}(z) = \eta_h^\nu(\alpha)$, les transformations infinitésimales des familles (12) ont les expressions

$$Z_h f = \zeta_h^i(z)\frac{\partial f}{\partial z^i} + \zeta_h^{n+\nu}(z)\frac{\partial f}{\partial z^{n+\nu}} = \zeta_h^i(x)\frac{\partial f}{\partial x^i} + \eta_h^\nu(\alpha)\frac{\partial f}{\partial \alpha^\nu} = X_h f + Y_h f,$$

$Y_h f$ étant les transformations infinitésimales du groupe $H_r(\alpha)$. On a donc

$$(Z_h Z_k) = (X_h + Y_h . X_k + Y_k) = (X_h X_k) + (X_h Y_k) + (Y_h X_k) + (Y_h Y_k);$$

et comme

$$(X_h X_k) = c_{hk}^l X_l, \qquad (Y_h Y_k) = c_{hk}^l Y_l, \qquad (X_h Y_k) = (Y_h X_k) = 0,$$

on a $(Z_h Z_k) = c_{hk}^l Z_l$, et la famille de transformations (12) forme un groupe, que nous désignerons par K_r.

La variété $\mathfrak{V}_{p+q}$ d'équation

$$F^\lambda(z, \ldots, z^{n+q}) = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, n-p),$$

est invariante pour le groupe K_r et, d'après (10), satisfait à

$$\zeta_h^\tau(z)\frac{\partial F^\lambda(z)}{\partial z^\tau} = 0, \qquad (\tau = 1, \ldots, n+q).$$

Il en résulte que K_r doit être intransitif et que la matrice

$$\| \xi_h^1(x), \ldots, \xi_h^n(x), \eta_h^1(\alpha), \ldots, \eta_h^q(\alpha) \|$$

doit être de rang $r_1 < n + q$. De là l'interprétation annoncée :

Étant donnés deux groupes isomorphes, $G_r(x)$ dans l'espace $X_n(x)$ et $H_r(\alpha)$ dans l'espace $X_q(\alpha)$, la condition nécessaire et suffisante pour que, dans l'espace $X^n(x)$, il existe une famille $\mathcal{F}_q$ de variétés $\mathfrak{V}_p$ admettant $G_r(x)$ comme groupe d'invariance, est que le groupe $K_r(x, \alpha)$ (12) de l'espace $X_{n+q}(x, \alpha)$ soit intransitif. Dans ce cas, la famille $\mathcal{F}_q$ représente une variété invariante du groupe K_r dans l'espace X_{n+q}.

2. **Familles de variétés mesurables.** — MESURE D'UN ENSEMBLE DE VARIÉTÉS [27]. — *Le groupe $H_r(\alpha)$ étant supposé mesurable, et $F(\alpha^1, \ldots, \alpha^q)$ désignant sa fonction invariante intégrale, nous appellerons mesure de l'ensemble $\mathfrak{A}$ de variétés $\mathfrak{V}_p$ de l'espace X_n par rapport au groupe $G_r(x)$ l'expression*

$$\mu_{G_r}(\mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{A}_\alpha \ldots} \int F(\alpha^1, \ldots, \alpha^q)\, d\alpha^1 \ldots d\alpha^q,$$

où $\mathcal{A}_\alpha$ est l'ensemble ponctuel correspondant dans l'espace X_q des paramètres, à l'ensemble $\mathcal{A}$ des variétés $\mathcal{V}_p$. L'expression différentielle $F(\alpha^1, \ldots, \alpha^q)\, d\alpha^1 \ldots d\alpha^q = F(\alpha^1, \ldots, \alpha^q)\,[d\alpha^1 \ldots d\alpha^q]$ *sera dite la densité de la famille de variétés.*

Une famille de variétés pouvant avoir plusieurs groupes d'invariance, elle pourra admettre plusieurs mesures différentes.

DÉFINITION. — *Nous dirons qu'une famille de variétés est mesurable si elle admet une mesure unique.*

Une condition suffisante de mesurabilité est la suivante [30] :

Si le groupe attaché au groupe maximal d'invariance d'une famille est mesurable, alors la famille est mesurable.

Le groupe H attaché au groupe maximal d'invariance G de la famille étant mesurable, la famille admet en effet au moins une mesure μ. Si elle en admettait une autre $\mu' \neq \mu$, il existerait un groupe H_1, attaché à un groupe d'invariance G_1 de la famille de variétés mesurable et par rapport auquel la famille admettrait la mesure μ'. Mais G_1 étant groupe d'invariance, il est sous-groupe de G et, en raison de l'isomorphisme, on aurait $H_1 \subset H$. En vertu de la proposition 1 de la page 12, on a donc $\mu' = \mu$.

Si le groupe attaché au groupe maximal d'invariance est non mesurable, la famille de variétés peut être mesurable ou non.

Une condition de non-mesurabilité d'une famille de variétés est donnée par le théorème suivant :

Soit $H_1 \equiv [X_1, \ldots, X_r]\left(X_h f = \xi_h^i \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_i}\right)$ *le groupe attaché au groupe maximal d'invariance de la famille* $\mathcal{F}_q$. *Si ce groupe est non mesurable, donc si*

$$c_{uv}^k\, \xi_{q-1}^t\, \xi_k^u\, \xi_u^w\, \xi_t^v - c_{u,q+1}^k\, \xi_k^u\, \xi_u^w = 0 \qquad (i, u, v, w = 1, \ldots, q;\ k = 1, \ldots, r)$$

et s'il a deux sous-groupes mesurables, définis par les opérateurs

$$H_s: \quad X_1, \ldots, X_{q-1}, X_q, \quad X_{\alpha_1}, \ldots, X_{\alpha_{s-q}}$$
$$H_t: \quad X_1, \ldots, X_{q-1}, X_{q+1}, X_{\beta_1}, \ldots, X_{\beta_{t-q}}$$
$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-q}, \beta_1, \ldots, \beta_{t-q} \in \{ q+2, \ldots, r \})$$

de bases respectives $(X_1, \ldots, X_q)$, $(X_1, \ldots, X_{q-1}, X_{q+1})$ *et sans base commune, alors la famille* $\mathcal{F}_q$ *de variétés est non mesurable.*

En effet, du théorème de la page 12, il résulte que les groupes H_1 et H_1 ont des invariants intégraux inégaux; la famille est donc non mesurable.

Considérons maintenant dans l'espace X_n une famille de variétés dépendant d'un, de deux ou de trois paramètres.

Le groupe H_1 attaché au groupe maximal d'invariance d'une telle famille est un groupe à une, deux ou trois variables. S'il est mesurable, la famille de variétés est mesurable. S'il est non mesurable mais transitif, du théorème de la page 15, il résulte qu'il admet au moins deux sous-groupes mesurables dont les invariants intégraux sont différents et la famille est non mesurable. Comme il en est de même si H est intransitif, on a le théorème :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille de variétés de l'espace X_n dépendant d'un, de deux ou de trois paramètres soit mesurable, est que le groupe attaché au groupe maximal d'invariance de la famille soit mesurable.

Définition. — *Soit X_n un espace à n dimension et $\mathcal{V}_p$ une variété à p dimensions de cet espace. Nous appelons variétés G_1-équivalentes à la variété $\mathcal{V}_p$, l'ensemble des variétés qui se déduisent de $\mathcal{V}_p$ par des transformations du groupe G_1.*

Soit, dans l'espace X_n, une famille $\mathcal{F}_1$ d'hypersurfaces $\mathcal{V}_{n-1}$ d'équation

$$F(x^1, \ldots, x^n, \alpha) = 0.$$

G_1 étant le groupe maximal d'invariance de la famille $\mathcal{F}_1$ et H_1 le groupe attaché à G_1, le système d'équations (10) devient

$$\xi_h^i(x)\frac{\partial F}{\partial x^i} + \eta_h(\alpha)\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n;\ h = 1, \ldots, r). \tag{13}$$

où $\xi_h^i(x)$ et $\eta_h(\alpha)$ sont les coefficients des transformations infinitésimales des groupes G_1 et H_1 respectivement.

H_1 est un groupe à une variable et pour que la famille $\mathcal{F}_1$ soit mesurable il faut que ce groupe soit mesurable, c'est-à-dire soit le groupe de translation; on a donc $r = 1$ et $\eta_1(\alpha) = 1$, et l'équation (13) s'écrit

$$\xi^i(x)\frac{\partial F}{\partial x^i} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0. \tag{13'}$$

Le système différentiel attaché à cette équation est

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x)} = \ldots = \frac{dx^n}{\xi^n(x)} = dF,$$

c'est-à-dire précisément le système différentiel du groupe G_1; si donc les équations finies du groupe G_1 sont

$$y^i = f^i(x^1, \ldots, x^n, a) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

la solution de l'équation (15′) est

$$F[f^1(x^1, \ldots, x^n, \alpha), \ldots, f^n(x^1, \ldots, x^n, \alpha)].$$

La famille $\mathcal{F}_1$ s'obtient donc en appliquant les transformations de G_1 aux variétés $F(y^1, \ldots, y^n) = 0$. Il en résulte :

Les seules familles mesurables $\mathcal{F}_1$ d'hypersurfaces d'un espace X_n sont les familles G_1-équivalentes à une hypersurface $\mathcal{V}_{n-1}$, le groupe G_1 et l'hypersurface $\mathcal{V}_{n-1}$ étant arbitraires, $\mathcal{V}_{n-1}$ n'étant pas une variété invariante du groupe G_1.

3. La mesure des sous-familles de variétés. — Soit, dans l'espace X_n une famille $\mathcal{F}_q$ de variétés $\mathcal{V}_p$ d'équations

$$(1) \qquad F^\lambda(x^1, \ldots, x^n, \alpha^1, \ldots, \alpha^q) = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, n-p),$$

où $\alpha^1, \ldots, \alpha^q$ sont des paramètres essentiels.

DÉFINITION. — *Nous appelons sous-famille à $q_1 < q$ paramètres, de la famille* (1), *la famille obtenue en remplaçant dans* (1) *les paramètres $\alpha^\nu (\nu = 1, \ldots, q)$ par des fonctions*

$$(14) \qquad \alpha^k = \varphi^k(r^1, \ldots, r^{q_1}) \qquad (k = 1, \ldots, q)$$

de q_1 nouveaux paramètres (essentiels).

A une sous-famille à q_1 paramètres de la famille (1) correspond ainsi dans l'espace X_q des paramètres de la famille (1), une variété à q_1 dimensions définie par les équations (14).

Soit $T(x)$ une transformation du groupe maximal d'invariance $G(x)$ de la famille $\mathcal{F}_q$ laissant globalement invariante la sous-famille $\mathcal{F}_{q_1}$. A la transformation $T(x)$ correspond, dans X_q, une transformation $T(\alpha)$ transformant un point quelconque de la variété (14) en un autre point de cette même variété. Au groupe maximal d'invariance de $G_1(x)$ la sous-famille $\mathcal{F}_{q_1}$ correspond donc dans l'espace X_q, un groupe $H_1(\alpha)$ laissant invariante la variété (14). Il en résulte que $H_1(\alpha)$ est un sous-groupe intransitif de $H(\alpha)$ attaché au groupe maximal d'invariance $G(x)$ de la famille $\mathcal{F}_q$, la variété (16) étant une de ses variétés invariantes. Le groupe $H_1(\alpha)$ induit sur sa variété invariante (16) un groupe $H_1(\tau)$ transitif [2]. Pour que la famille $\mathcal{F}_{q_1}$

admette une mesure, il faut que le groupe $H_r(\tau)$ ou l'un de ses sous-groupes soit mesurable. De là le théorème [39] :

Étant donnée la famille $\mathcal{F}_q$ (1) de variétés $\mathcal{V}_p$, une condition nécessaire pour qu'elle admette des sous-familles mesurables à $q_1 < q$ paramètres, est que le groupe $H(\alpha)$ attaché à son groupe maximal d'invariance soit intransitif, ou admette au moins un sous-groupe intransitif, et par $V_{q_1}(\alpha)$ une de ses variétés invariantes définie par les équations (14), l'équation de la sous-famille $\mathcal{F}_{q_1}$ s'obtient en remplaçant dans (1) α^k par les valeurs (14), et la sous-famille est mesurable si le groupe $H_r(\tau)$ induit par $H_r(\alpha)$ sur la variété (14), ou l'un de ses sous-groupes l'est.

Soit $H_r(\alpha)$ le groupe attaché au groupe $G_r(x)$ d'invariance de la famille $\mathcal{F}_q$ défini par les opérateurs

$$Y_h f = \eta_h^\nu \frac{\partial f}{\partial \alpha^\nu} \qquad (h = 1, \ldots, r; \nu = 1, \ldots, q).$$

Ce groupe étant intransitif et admettant la variété (14) comme variété invariante, on a rang $\| \eta_h^\nu \| = q_1$.

Si $q_1 = r$, le groupe $H_r(\tau)$ induit par $H_r(\alpha)$ sur la variété (14) est simplement transitif, donc mesurable.

Ainsi, étant donnée la famille $\mathcal{F}_p$ (1) de variétés, à chaque sous-groupe $H_{q_1}(\alpha)$ du groupe attaché à son groupe maximal d'invariance, tel que rang $\| \eta_h^\nu \| = q_1$, correspond une sous-famille $\mathcal{F}_{q_1}$ mesurable.

Supposons maintenant que $q_1 + 1 = r$. Le groupe $H_{r_1}(\alpha)$ est un groupe transitif à q_1 variables et $q_1 + 1$ paramètres; la propriété démontrée à la page 7 montre que le groupe $H_r(\tau)$ est mesurable ou admet au moins un sous-groupe mesurable; la sous-famille $\mathcal{F}_{q_1}$ donc mesurable; d'où le résultat :

Étant donnée la famille de variétés (1), à chaque sous-groupe intransitif $H_{q_1+1}(\alpha)$ du groupe attaché à son groupe maximal d'invariance de rang $\| \eta_h^\nu | = q_1$, correspond une sous-famille $\mathcal{F}_{q_1}$ mesurable.

4. **La mesure cinématique.** — A propos de l'ensemble ($\mathcal{C}$) des courbes déduites d'une courbe plane donné C par les différents mouvements euclidiens de son plan, H. Poincaré [19] a introduit une mesure, dite *mesure cinématique dans le plan,* donnée par l'intégrale invariante $M = \iiint dx\,dy\,d\varphi$ étendue à la région de ($\mathcal{C}$) envisagée, x, y étant les composantes de la translation et φ la rotation définissant $\mathcal{C}$ à partir de C.

Cette notion a été généralisée en 1942 par S. S. Chern [9] qui, en utilisant la méthode du repère mobile de É. Cartan, a introduit la notion de mesure cinématique dans un espace euclidien E_n. Nous allons ici l'étendre à l'espace le plus général.

Considérons, dans l'espace X_n, une variété à p dimensions $\mathcal{V}_p$, un groupe G_r, et la famille $\mathcal{V}$ de variétés G_r-équivalentes à $\mathcal{V}_p$: G_r est formé de toutes les transformations qui laissent globalement invariante la famille $\mathcal{V}$, et $\mathcal{V}_p$ n'est pas invariante par G_r, qui est par suite le groupe maximal d'invariance de $\mathcal{V}$.

Soient

$$y^i = f^i(x^1, \ldots, x^n, a^1, \ldots, a^r) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

les équations de G_r, et

$$F^\lambda(x^1, \ldots, x^n) = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, n-p)$$

celles de $\mathcal{V}_p$.

L'équation de la famille de variétés $\mathcal{V}$ est alors

$$(15) \qquad F^\lambda[f^1(x, \alpha), \ldots, f^n(x, \alpha)] = 0,$$

où les r paramètres $\alpha^1, \ldots, \alpha^r$ sont essentiels.

Le produit de deux transformations du groupe G_r appartenant au groupe, on a

$$f^i[f^1(x, \alpha), \ldots, f^n(x, \alpha), a^1, \ldots, a^r] = f^i(x, \beta),$$

où

$$(16) \qquad \beta^h = \varphi^h(\alpha^1, \ldots, \alpha^r, a^1, \ldots, a^r) \qquad (h = 1, \ldots, r)$$

est le premier groupe paramétrique π_r de G_r. En appliquant le groupe G_r à la famille (15) on obtient

$$F^\lambda[f^1(f(x, a), \alpha), \ldots, f^n(f(x, a), \alpha)] = F^\lambda[f^1(x, \gamma), \ldots, f^n(x, \gamma)],$$

où

$$(17) \qquad \gamma^h = \varphi^h(a^1, \ldots, a^r, \alpha^1, \ldots, \alpha^r)$$

est le deuxième groupe paramétrique π'_r ; le groupe attaché au groupe maximal d'invariance G_r de la famille de variétés $\mathcal{V}$ est donc π'_r. Les groupes paramétriques d'un groupe G_r étant simplement transitif [2], $\mathcal{V}$ est mesurable. Si $\Psi(\alpha^1, \ldots, \alpha^r)$ est sa fonction invariante intégrale, on peut donc énoncer :

La famille de variétés $\mathcal{V}$ est mesurable et admet la mesure

$$\int \Psi(\alpha^1, \ldots, \alpha^r)\, d\alpha^1 \ldots d\alpha^r,$$

qui ne dépend que du groupe G_r.

La fonction $\Psi(\alpha^1, \ldots, \alpha^r)$ se calcule de la façon suivante. Soient

$$\nu_l^h = \delta_l^h - \frac{1}{2} c_{kl}^h \alpha^k + \ldots \qquad (h, k, l = 1, \ldots, r)$$

(où c_{kl}^h sont les composantes du tenseur de structure du groupe G_r), les coefficients des transformations infinitésimales de π'_r;

$$(18) \qquad \omega^k(a, da) = \varphi_h^k(a)\, da^h$$

les formes de Pfaff invariantes du groupe π_r (composantes relatives de G_r), et

$$(18') \qquad \omega^k(a, da) = \psi_h^k(a)\, da^h$$

celles du groupe π'_r (composantes absolues de G_r); on a

$$(18'') \qquad \psi_h^k(\alpha)\, \nu_l^h(\alpha) = \delta_l^k, \qquad \varphi_h^k(\alpha)\, \mu_l^h(\alpha) = \delta_l^k,$$

les μ_l^h étant les coefficients des transformations infinitésimales du premier groupe paramétrique π_r.

Le système (de Deltheil) qui détermine la fonction $\Psi(\alpha)$ est

$$(19) \qquad \nu_k^h \frac{\partial \ln \Psi}{\partial \alpha^h} = -\frac{\partial \nu_k^h}{\partial \alpha^h}.$$

Les fonctions ν_k^h satisfont les équations

$$\nu_h^u \frac{\partial \nu_k^l}{\partial \alpha^u} - \nu_k^u \frac{\partial \nu_h^l}{\partial \alpha^u} = -c_{hk}^u \nu_u^l;$$

d'après la formule (10) du chapitre I, on a

$$\frac{\partial \nu_k^h}{\partial \alpha^h} = \nu_k^h \frac{\partial \ln \Delta}{\partial \alpha^h} - c_k,$$

où $\Delta = |\det \nu_k^h(\alpha)|$ et où $c_k = c_{hk}^h$ est le vecteur de structure de Vrănceanu du groupe G_r; l'équation (19) devient alors

$$\nu_k^h \frac{\partial \ln \Psi\Delta}{\partial \alpha^h} = c_k,$$

ou

$$(19') \qquad \frac{\partial \ln \Psi\Delta}{\partial \alpha^h} = c_k\, \psi_h^k.$$

Les fonctions $\psi_h^k(\alpha)$ satisfaisant aux équations de Maurer-Cartan :

$$\frac{\partial \psi_h^k}{\partial \alpha^l} - \frac{\partial \psi_l^k}{\partial \alpha^h} = -c_{uv}^k \psi_h^u \psi_l^v,$$

le système (19') est compatible et par suite :

$$\Psi(\alpha) = \frac{e^{c_k \int \overline{\omega}^k(\alpha, d\alpha)}}{\Delta}.$$

Si $\Delta_1 = \det|\psi_h^k(\alpha)|$, la relation (18'') donne $\Delta_1 = \frac{1}{\Delta}$, d'où

$$\Psi(\alpha) = \Delta_1 e^{c_k \int \overline{\omega}^k(\alpha, d\alpha)}. \tag{20}$$

Les ω^k pouvant être exprimées linéairement à l'aide des formes indépendantes $\overline{\omega}^k$, posons

$$\omega^k(\alpha, d\alpha) = \lambda_h^k(\alpha)\,\overline{\omega}^h(\alpha, d\alpha). \tag{21}$$

D'autre part, d et δ étant deux symboles de différention, tenons compte des relations $\delta\omega^k(\alpha, d\alpha) = 0$, $d\overline{\omega}^k(\alpha, \delta\alpha) = 0$ dans les équations de structure de É. Cartan, nous en déduisons

$$\delta\overline{\omega}^h(\alpha, d\alpha) = -c_{kl}^h\,\overline{\omega}^k(\alpha, \delta\alpha)\,\overline{\omega}^l(\alpha, d\alpha), \tag{22}$$

et de (21) il résulte

$$\delta\lambda_h^k\,\overline{\omega}^h + \lambda_h^k\,\delta\overline{\omega}^h = 0.$$

La relation (22) donne alors

$$[\delta\lambda_m^k + \lambda_h^k c_{lm}^h\,\overline{\omega}^l(\alpha, \delta\alpha)]\,\overline{\omega}^m(\alpha, d\alpha) = 0,$$

d'où puisque les formes $\overline{\omega}^m(\alpha, d\alpha)$ sont indépendantes,

$$\delta\lambda_m^k + \lambda_h^k c_{lm}^h\,\overline{\omega}^l(\alpha, \delta\alpha) = 0,$$

soit, en remplaçant δ par d,

$$d\lambda_m^k + \lambda_h^k c_{lm}^h\,\overline{\omega}^l(\alpha, d\alpha) = 0.$$

Multipliant par les compléments algébriques Λ_k^m des éléments λ_m^k et sommant en k et m, la relation précédente devient

$$\frac{d\Delta_2}{\Delta_2} = c_k\,\overline{\omega}^k(\alpha, d\alpha),$$

où $\Delta_2 = \det|\lambda_h^k|$ et $c_h = c_{kh}^k$. Il en résulte [25] :

$$\Delta_2 = c e^{c_k \int \overline{\omega}^k(\alpha, d\alpha)} \qquad (c = \text{Cte}). \tag{23}$$

Si d'autre part on tient compte dans (21) des expressions des formes ω^k et $\overline{\omega}^k$ on obtient

$$\varphi_h^k(\alpha) = \lambda_l^k(\alpha)\,\psi_h^l(\alpha),$$

d'où, en posant $D(\alpha) = \det|\varphi_h^k(\alpha)|$:

$$D(\alpha) = \Delta_1 \Delta_2. \tag{24}$$

De (20), (23) et (24) on déduit $\Psi(\alpha) = c\,D(\alpha)$; l'invariant intégral d'un groupe n'étant défini, qu'à une constante multiplicative près, on peut prendre $c = 1$ et par suite :

$$\Psi(\alpha) = D(\alpha). \tag{25}$$

La mesure de la famille $\mathcal{V}$ de variétés est donc

$$\mu = \int D(\alpha)\, d\alpha^1 \ldots d\alpha^r, \tag{26}$$

ou

$$\mu = \int [\omega^1 \ldots \omega^r].$$

Cette mesure, qui comme nous l'avons dit ne dépend que du groupe G_r, est *la mesure cinématique de* G_r ; nous avons donc le théorème [36] :

Étant donné un groupe G_r et une variété à p dimensions non invariante du groupe, l'ensemble $\mathcal{V}$ des variétés G_r-équivalentes à $\mathcal{V}_p$, est mesurable, et sa mesure est la mesure cinématique du groupe G_r, soit la mesure du deuxième groupe paramétrique π'_r de G_r.

Ce résultat, appliqué au groupe des déplacements du plan euclidien, donne la mesure cinématique de Poincaré précédemment indiquée.

Déterminons maintenant la mesure du premier groupe paramétrique π_r. Si $\Phi(x^1, \ldots, x^r)$ est sa fonction invariante intégrale, on a d'après (19') :

$$\mu_k^h \frac{\partial \ln \Phi D_1}{\partial x^h} = -c_k,$$

μ_k^h étant les coefficients des transformations infinitésimales du groupe μ_r et $D_1 = \det|\mu_k^h|$. La deuxième formule (18'') donne

$$\frac{\partial \ln \dfrac{\Phi}{D}}{\partial x^h} = -c_k \varphi_h^k,$$

d'où, en tenant compte de (18) et de (25) :

$$\Phi(\alpha) = \Psi(\alpha)\, e^{-c_k \int \omega_k(\alpha,\, d\alpha)}.$$

Pour que les invariants intégraux des groupes π_r et π'_r soient égaux ($\Phi = \Psi$) il faut et il suffit que $c_k \omega^k(\alpha, d\alpha) = 0$, soit, les formes ω^k étaient indépendantes, $c_k = 0$; de là le théorème [25] :

La condition nécessaire et suffisante pour que les deux groupes paramétriques d'un groupe de Lie aient le même invariant intégral est que $c_k = 0$.

CHAPITRE III.

Géométrie intégrale dans le plan.

1. Ensemble des points dans le plan. — Considérons la famille de variétés constituée par l'ensemble des points du plan. Ses équations sont

$$(1) \qquad x = a_1, \qquad y = a_2.$$

Prenons comme groupe d'invariance de la famille le groupe des mouvements euclidiens

$$(2) \qquad x = x' \cos\theta - y' \sin\theta + \alpha, \qquad y = x' \sin\theta + y' \cos\theta + \beta.$$

Son groupe attaché relativement à la famille (1) est

$$a_1 = a'_1 \cos\theta - a'_2 \sin\theta + \alpha, \qquad a_2 = a'_1 \sin\theta + a'_2 \cos\theta + \beta,$$

dont les opérateurs sont

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial a_1}, \qquad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial a_2}, \qquad X_3 f = a_2 \frac{\partial f}{\partial a_1} - a_1 \frac{\partial f}{\partial a_2}.$$

Le système de Deltheil, qui est ici

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial a_2} = 0, \qquad a_2 \frac{\partial F}{\partial a_1} - a_1 \frac{\partial F}{\partial a_2} = 0,$$

admet la solution $F(a_1, a_2) = 1$.

La densité de l'ensemble des points du plan est donc $dP = [da_1\, da_2]$ ou, tenant compte de (1), $dP = [dx\, dy]$.

Considérons maintenant une courbe convexe plane (Γ) douée d'une tangente en chaque point. Rapportons la figure à un système d'axes dont l'origine, O, est intérieure à (Γ). D'un point $P(x, y)$ de la région extérieure menons les tangentes PT_1 et PT_2 à la courbe et désignons respectivement par ξ_1, η_1 et ξ_2, η_2; φ_1 et φ_2, les coordonnées des points T_1, T_2 et les angles des normales PT_1, PT_2 avec Ox. Les équations des droites PT_1 et PT_2 sont

$$(3)\quad (x_2-\xi_1)\cos\varphi_1+(y-\eta_1)\sin\varphi_1=0,\qquad (x-\xi_2)\cos\varphi_2+(y-\eta_2)\sin\varphi_2=0.$$

En différenciant les relations (3) et posant $\overline{PT}_1=t_1$, $\overline{PT}_2=t_2$, on obtient sans peine les deux relations

$$\cos\varphi_1\,dx+\sin\varphi_1\,dy=-t_1\,d\varphi_1,$$
$$\cos\varphi_2\,dx+\sin\varphi_2\,dy=-t_2\,d\varphi_2,$$

qui, multipliées extérieurement, et après avoir posé $\varphi_2-\varphi_1=\omega$ donnent

$$(4)\qquad dP=[dx\,dy]=\frac{t_1t_2}{\sin\omega}[d\varphi\,d_1\varphi_2].$$

$\mathfrak{A}$ étant la région du plan extérieure à (Γ) on déduit de (4) :

$$(5)\qquad \int_{\mathfrak{A}}\frac{\sin\omega}{t_1t_2}\,dP=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi_1\int_0^{2\pi}d\varphi_2=2\pi_2,$$

formule due à W. Crofton [11].

En désignant par ρ_1 et ρ_2 les rayons de courbure de la courbe (Γ) en T_1 et T_2 et par ds l'élément d'arc, on a

$$d\varphi_1=\frac{1}{\rho_1}\,ds_1,\qquad d\varphi_2=\frac{1}{\rho_2}\,ds_2;$$

(4) donne

$$\frac{\sin\omega}{t_1t_2}\rho_1\rho_2\,dP=[ds_1\,ds_2],$$

d'où l'on déduit, L étant la longueur de (Γ) :

$$(6)\qquad \int_{\mathfrak{A}}\frac{\sin\omega}{t_1t_2}\rho_1\rho_2\,dP=\frac{1}{2}\int_0^{L}ds_1\int_0^{L}ds_2=\frac{1}{2}L^2,$$

résultat dû à Santaló [26].

2. L'ensemble des droites dans le plan. — Soit, dans le plan, la famille aux paramètres u, v, des droites

$$(7)\qquad ux+vy+1=0,$$

dont le groupe maximal d'invariance est le groupe projectif

$$(8)\qquad x=\frac{a_1x'+b_1y'+c_1}{a_3x'+b_3y'+1},\qquad y=\frac{a_2x'+b_2y+c_2}{a_3x'+b_3y'+1}.$$

En portant les expressions (8) dans (7) on obtient

$$u'x' + v'y' + 1 = 0,$$

avec

$$(8') \qquad u' = \frac{a_1 u + a_2 v + a_3}{c_1 u + c_2 v + 1}, \qquad v' = \frac{b_1 u + b_2 v + b_3}{c_1 u + c_2 v + 1}.$$

Le groupe (8′) est non mesurable, et comme la famille (7) dépend de deux paramètres, il résulte du théorème de la page 23 qu'elle est non mesurable.

Définissons alors la mesure de l'ensemble des droites du plan par rapport au groupe des mouvements euclidiens (2).

Le groupe attaché à ce dernier relativement à la famille (7) est

$$u' = \frac{u \cos\theta + v \sin\theta}{\alpha u + \beta v + 1}, \qquad v' = \frac{-u \sin\theta + v \cos\theta}{\alpha u + \beta v + 1}.$$

L'invariant intégral de ce groupe est $F(u, v) = \dfrac{1}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}$, *d'où la densité de l'ensemble des droites* G *du plan, par rapport au groupe des mouvements euclidiens :*

$$(9) \qquad dG = \frac{du\, dv}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on écrit l'équation de la droite sous forme normale

$$(7') \qquad x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0,$$

on a

$$u = -\frac{\cos\varphi}{p}, \qquad v = \frac{\sin\varphi}{p},$$

et la formule (9) devient

$$(9') \qquad dG = [dp\, d\varphi].$$

D'une façon générale, à toute expression des paramètres u, v en fonction de deux nouveaux paramètres, correspondra une nouvelle expression de la densité dG. Ainsi, si (Γ) est un arc de courbe continue rectifiable donnée, s l'arc de son point courant P, θ l'angle d'une droite quelconque G issue de P avec la tangente en P à (Γ), on trouve sans peine pour la densité en G, l'expression

$$dG = |\sin\theta|\, [ds\, d\theta].$$

Cette dernière expression est particulièrement adaptée aux problèmes de mesure relatifs à l'ensemble des sécantes d'un arc de courbe.

Ainsi, si n est le nombre (supposé fini) des points où une droite G coupe (Γ), et si L est la longueur de (Γ) on a

$$\int n\, dG = \int_0^{\mathrm{L}} ds \int_0^{\pi} |\sin\theta|\, d\theta = 2\mathrm{L} \qquad \text{(Crofton [11])}.$$

Si (Γ) est une courbe convexe fermée, $n = 2$, et par suite, μ étant la mesure de l'ensemble de ses sécantes :

$$\mu = \int dG = \mathrm{L}$$

3. **Systèmes de points et de droites.** — COUPLES DE POINTS. — Envisageons la famille de variétés dont les éléments sont les couples de points $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$. Ses équations sont ($\alpha_1, \ldots, \beta_2$ étant des paramètres) :

$$(10) \qquad x_1 = \alpha_1, \qquad y_1 = \beta_1, \qquad x_2 = \alpha_2, \qquad y_2 = \beta_2.$$

Le groupe maximal d'invariance de cette famille est le groupe projectif. Son groupe attaché relativement à la famille (10) est non mesurable, mais il admet deux sous-groupes mesurables de mesures differentes, par exemple les groupes attachés au groupe affine unimodulaire et centro-affine, et l'on a vu qu'alors la famille (1) est non mesurable.

Prenons comme groupe d'invariance le groupe des mouvements euclidiens du plan; son groupe attaché relativement à la famille (10), à quatre variables et trois paramètres, est intransitif; il admet donc une infinité de fonctions invariantes intégrales.

On peut prendre comme densité de l'ensemble des couples de points du plan l'expression, invariante vis-à-vis du groupe des mouvements euclidiens :

$$[dP_1\, dP_2] = [dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2],$$

à laquelle on peut donner la forme suivante, plus commode pour certaines applications géométriques.

Soient p, φ les coordonnées normales de la droite (P_1P_2) et ρ_1, ρ_2 les distances de P_1, P_2 à la projection orthogonale de O sur (P_1P_2).

On trouve aisément

$$[dx_1\, dy_1] = p[dp\, d\varphi] + [dp\, d\rho_1] - \rho_1[d\varphi\, d\rho_1],$$
$$[dx_2\, dy_2] = p[dp\, d\varphi] + [dp\, d\rho_2] - \rho_2[d\varphi\, d\rho_2],$$

et par multiplication extérieure, compte tenu de l'expression $dG = [dp\, d\varphi]$ de l'ensemble des droites du plan

$$(11) \qquad [dP_1\, dP_2] = |\rho_2 - \rho_1|\,[dG\, d\rho_1\, d\rho_2].$$

Si l'on applique la formule précédente à la détermination de la mesure I de l'ensemble des couples de points situés à l'intérieur ou sur le contour d'une courbe convexe fermée limitant l'aire S, soit

$$I = \int dP_1\, dP_2 = \int |\rho_2 - \rho_1|\, dG\, d\rho_1\, d\rho_2,$$

on trouve, en calculant la deuxième des deux intégrales précédentes, et désignant par σ la longueur de la corde de (Γ) portée par la droite $G = P_1P_2$:

$$I = \frac{1}{3}\int \sigma^3\, dG,$$

et comme la première intégrale a pour valeur S^2, on a la formule [11] :

$$\int_{\mathcal{A}(G\cap\Gamma\neq\emptyset)} \sigma^3\, dG = 3\,S^2.$$

COUPLES DE DROITES. — Pour la famille constituée par les couples de droites (G_1) et (G_2), d'équations

$$(12) \qquad x\cos\varphi_i + y\sin\varphi_i - p_i = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

tout comme pour les couples de points, le groupe maximal d'invariance est le groupe projectif et la famille est non mesurable.

Relativement au groupe des mouvements euclidiens la famille (12) a une infinité de mesures et l'on peut prendre pour densité :

$$[dG_1\, dG_2] = [dp_1\, d\varphi_1\, dp_2\, d\varphi_2],$$

expression à laquelle on peut aussi donner la forme suivante :

Soient $P(x, y)$ le point d'intersection des droites (G_1) et (G_2), et θ_1, θ_2 les angles qu'elles forment avec Ox. On a

$$p_i = x\cos\varphi_i + y\sin\varphi_i = x\sin\theta_i - y\cos\theta_i \qquad (i = 1, 2),$$

d'où

$$[dp_i\, d\varphi_i] = \sin\theta_i[dx\, d\theta_i] - \cos\theta_i[dy\, d\theta_i],$$

et par suite, en introduisant $dP = [dx\, dy]$:

$$(13) \qquad [dG_1\, dG_2] = |\sin(\theta_1 - \theta_2)|\,[dP\, d\theta_1\, d\theta_2].$$

Appliquée à la mesure de l'ensemble des couples de droites coupant chacune une courbe convexe fermée (Γ) de longueur L limitant l'aire S, la formule précédente donne

$$(14)\qquad \mu = \int dG_1\, dG_2 = \int_{\mathfrak{a}(G_1 \cap \Gamma \neq \emptyset)} dG_1 \int_{\mathfrak{a}(G_2 \cap \Gamma \neq \emptyset)} dG_2 = L^2.$$

Si μ_1 et μ_2 sont, respectivement, les mesures des couples précédents se coupant à l'intérieur de (Γ) ou sur (Γ) et à son extérieur, on a

$$(14')\qquad \begin{aligned} \mu_1 &= \int |\sin(\theta_1 - \theta_2)|\, dP\, d\theta_1\, d\theta_2 \\ &= \int dP \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} |\sin(\theta_1 - \theta_2)|\, d\theta_1\, d\theta_2 = 2\pi S, \end{aligned}$$

et, α et β étant les angles des tangentes menées de P à (Γ) avec Ox,

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \int dP \int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta |\sin(\theta_1 - \theta_2)|\, d\theta_1\, d\theta_2 \\ &= \int dP \int_\alpha^\beta d\theta_1 \left[\int_\alpha^{\theta_1} \sin(\theta_1 - \theta_2)\, d\theta_2 + \int_{\theta_1}^\beta \sin(\theta_2 - \theta_1)\, d\theta_2 \right], \end{aligned}$$

soit

$$(14'')\qquad \mu_2 = 2 \int (\omega - \sin\omega)\, dP,$$

$\omega = \beta - \alpha$ étant l'angle des tangentes issues de P à (Γ) et l'intégrale étant étendue à l'extérieur de (Γ). De (14), (14′), (14″) on déduit la formule (Crofton) :

$$\int (\omega - \sin\omega)\, dP = \frac{L^2}{2} - \pi S.$$

4. **La mesure cinématique.** — D'autres résultats géométriques peuvent être rattachés à la notion de mesure cinématique. L'ensemble des figures (K) du plan euclidien congruentes à une figure donnée est mesurable, sa mesure étant, comme on l'a vu, la mesure cinématique du groupe des mouvements euclidiens

$$\mu = \int dx\, dy\, d\varphi,$$

(x, y, composantes de translation; φ, angle de rotation).

La forme différentielle $dK = [dx\, dy\, d\varphi]$ est ce qu'on appelle *la densité cinématique dans le plan;* on peut, avec L. A. Santaló, lui donner l'expression suivante [20] :

Soient $P(x, y)$ un point du plan, et (G) une droite issue de P faisant l'angle φ avec Ox. En désignant par p la distance de l'origine à la droite (G), par θ l'angle de la normale à (G) avec Ox et par t la distance de P à la projection orthogonale de O sur (G), on a

$$x = p\cos\theta + t\sin\theta, \qquad y = p\sin\theta - t\cos\theta,$$

d'où $[dx\,dy\,d\varphi] = [dp\,d\theta\,dt]$, soit en introduisant la densité $dG = [dp\,d\varphi]$ de l'ensemble des droites G du plan

$$dK = [dG\,dt].$$

Supposons par exemple que (K) soit la famille des segments de longueur l du plan, et qu'on cherche la mesure de l'ensemble de ceux de ces segments coupant une courbe convexe fermée (C) de longueur L enfermant l'aire S.

La densité de (K) étant égale à la densité cinématique dans le plan, la mesure cherchée est

$$\mu = \int dG\,dt,$$

l'intégration étant étendue à l'ensemble des segments envisagés. Si σ est la longueur de la corde déterminée par G dans (C), on a

$$\mu = \int dG \int dt = \int dG(\sigma + l) = \int \sigma\,dG + \int l\,dG;$$

mais

$$\int \sigma\,dG = \int \sigma[dp\,d\varphi] = \int \sigma\,dp \int_0^\pi d\theta = \pi S \qquad \text{et} \qquad \int l\,dG = lL,$$

il en résulte la formule [20] :

$$\mu = \pi S + lL.$$

5. L'ensemble de cercles du plan. — Considérons l'ensemble des cercles du plan, d'équation

$$x^2 + y^2 - 2vx - 2wy + u = 0. \tag{15}$$

Son groupe maximal d'invariance est celui des similitudes :

$$x = ax' - by' + c, \qquad y = bx' + ay' + d.$$

En appliquant ce groupe au cercle (15) celui-ci devient

$$x'^2 + y'^2 - 2v'x' - 2w'y' + u' = 0,$$

où

$$\left\{\begin{aligned} u' &= \frac{1}{a^2+b^2}(c^2+d^2+u-2cv-2dw),\\ v' &= \frac{1}{a^2+b^2}(-ac-bd+av+bw),\\ w' &= \frac{1}{a^2+b^2}(-ad+bc-bv+aw),\end{aligned}\right.$$

ou

$$\left\{\begin{aligned} u &= (a^2+b^2)\,[u'+2(ac+bd)v'+2(ad-bc)w'+c^2+d^2],\\ v &= av'-bw'+c,\\ w &= bv'+aw'+d.\end{aligned}\right.$$

Les coefficients ξ_j^i des transformations infinitésimales de ce groupe sont

$$\begin{array}{llll} \xi_1^1 = 2u, & \xi_2^1 = 0, & \xi_3^1 = 2v, & \xi_4^1 = 2w,\\ \xi_1^2 = v, & \xi_2^2 = -w, & \xi_3^2 = 1, & \xi_4^2 = 0,\\ \xi_1^3 = w, & \xi_2^3 = v, & \xi_3^3 = 0, & \xi_4^3 = 1.\end{array}$$

En remplaçant ces valeurs dans le système d'équations de Deltheil, nous obtenons

$$\left\{\begin{aligned} &2u\frac{\partial F}{\partial u}+v\frac{\partial F}{\partial v}+w\frac{\partial F}{\partial w}+4F=0, \qquad w\frac{\partial F}{\partial v}-v\frac{\partial F}{\partial w}=0,\\ &2v\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v}=0, \qquad 2w\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial w}=0.\end{aligned}\right.$$

Ce système admet la solution

$$F(u, v, w) = \frac{1}{(u-v^2-w^2)^2};$$

l'ensemble des cercles est donc mesurable, et admet pour mesure

$$u(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}_\alpha} \frac{du\,dv\,dw}{(u-v^2-w^2)^2}.$$

Par le changement de paramètres,

$$\alpha = \frac{1}{u-v^2-w^2}, \qquad \beta = v, \qquad \gamma = w,$$

cette mesure devient

$$u(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}_\sigma} d\alpha\,d\beta\,d\gamma;$$

d'où le théorème [27] :

L'ensemble des cercles du plan

$$(x-\beta)^2+(y-\gamma)^2=\frac{1}{\alpha}$$

est mesurable, sa mesure étant $\mu(\mathcal{A})=\mu(\mathcal{A}_\alpha)$ *où* $\mathcal{A}_\alpha$ *est l'ensemble de points correspondant dans l'espace des paramètres* (α, β, μ) *à l'ensemble* $\mathcal{A}$ *de cercles du plan.*

6. **L'ensemble des coniques du plan.** — Nous considérerons maintenant l'ensemble des coniques non dégénérées d'équation

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+1=0, \tag{16}$$

où

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Son groupe maximal d'invariance est le groupe projectif

$$x=\frac{\alpha_1^1 x'+\alpha_2^1 y'+\alpha_3^1}{\alpha_1^3 x'+\alpha_2^3 y'+1}, \qquad y=\frac{\alpha_1^2 x'+\alpha_2^2 y'+\alpha_3^2}{\alpha_1^3 x'+\alpha_2^3 y'+1},$$

où $\det|\alpha_j^i|\neq 0$ $(i, j=1, 2, 3;\ \alpha_3^3=1)$. Le groupe attaché à ce dernier par rapport à l'ensemble des coniques est

$$a'_{ij}=\frac{\alpha_i^h\alpha_j^k a_{hk}}{\alpha_3^h\alpha_3^k a_{hk}} \qquad (a_{33}=\alpha_3^3=1).$$

Ce groupe est mesurable, et admet l'invariant intégral $F(a)=\frac{1}{\Delta^2}\cdot$ De là le théorème [27] :

L'ensemble des coniques (16) *est mesurable, sa mesure étant*

$$u(\mathcal{A})=\int_{\mathcal{A}_\alpha}\frac{da_{11}\ldots da_{23}}{\Delta^2}.$$

CHAPITRE IV.

Géométrie intégrale dans l'espace.

1. **Ensemble des points de l'espace.** — Soit un Espace E_3, de coordonnées cartésiennes orthogonales x, y, z. Considérons la famille de variétés constituée par l'ensemble des points de E_3. Les équations de cette famille sont

$$x=a_1, \qquad y=a_2, \qquad z=a_3, \tag{1}$$

où a_1, a_2, a_3 sont des paramètres. Prenons comme groupe d'invariance de la famille le groupe des transformations orthogonales de l'espace

$$(2)\qquad \begin{cases} x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z', \\ y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z', \\ z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'. \end{cases}$$

où α_i, β_i, γ_i vérifient les conditions d'orthogonalité. Le groupe attaché à ce groupe d'invariance par rapport à la famille (1) a les équations

$$\begin{cases} a_1 = \alpha_1 a'_1 + \alpha_2 a'_2 + \alpha_3 a'_3 + \alpha, \\ a_2 = \beta_1 a'_1 + \beta_2 a'_2 + \beta_3 a'_3 + \beta, \\ a_3 = \gamma_1 a'_1 + \gamma_2 a'_2 + \gamma_3 a'_3 + \gamma. \end{cases}$$

et ses opérateurs sont

$$X_i f = \frac{\partial f}{\partial a_i} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$X_4 f = a_3 \frac{\partial f}{\partial a_2} - a_2 \frac{\partial f}{\partial a_3}, \qquad X_5 f = a_1 \frac{\partial f}{\partial a_3} - a_3 \frac{\partial f}{\partial a_1},$$

$$X_6 f = a_2 \frac{\partial f}{\partial a_1} - a_1 \frac{\partial f}{\partial a_2}.$$

Le système de Deltheil relatif à ce groupe se réduit à

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial a_2} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial a_3} = 0,$$

et admet la solution $F(a_1, a_2, a_3) = 1$.

La densité de l'ensemble des points de l'espace relativement au groupe orthogonal est $dP = [da_1\, da_2\, da_3]$, ou en tenant compte de (1):

$$dP =]dx\, dy\, dz].$$

2. **L'ensemble des droites de l'espace.** — Considérons la famille des droites de l'espace d'équations

$$(3)\qquad x = az + p, \qquad y = bz + q.$$

Le groupe maximal d'invariance de cette famille est le groupe projectif. Le groupe qui lui est attaché relativement à la famille (3) est non mesurable et admet des sous-groupes à fonctions invariantes intégrales différentes. Donc, l'ensemble des droites de l'espace est non mesurable.

Nous définissons la mesure de l'ensemble des droites de l'espace par rapport au groupe des transformations orthogonales (2).

Le groupe attaché au groupe (2) par rapport à la famille (3) admet les transformations infinitésimales

$$X_1f = \frac{\partial f}{\partial p}, \qquad X_2f = \frac{\partial f}{\partial q}, \qquad X_3f = a\frac{\partial f}{\partial p} + b\frac{\partial f}{\partial q},$$

$$X_4f = b\frac{\partial f}{\partial a} - a\frac{\partial f}{\partial b} + q\frac{\partial f}{\partial p} - p\frac{\partial f}{\partial q},$$

$$X_5f = ab\frac{\partial f}{\partial a} + (1+b^2)\frac{\partial f}{\partial b} + aq\frac{\partial f}{\partial p} + bq\frac{\partial f}{\partial q},$$

$$X_6f = (1+a^2)\frac{\partial f}{\partial a} + ab\frac{\partial f}{\partial b} + ap\frac{\partial f}{\partial p} + bp\frac{\partial f}{\partial q}.$$

Le système de Deltheil relatif à ce groupe se réduit à

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial q} = 0, \qquad b\frac{\partial F}{\partial a} - a\frac{\partial F}{\partial b} = 0, \\ &\qquad ab\frac{\partial F}{\partial a} + (1+b^2)\frac{\partial F}{\partial b} = -4bF \end{aligned}\right.$$

et a la solution

$$F(a, b, p, q) = \frac{1}{(a^2+b^2+1)^2}.$$

La densité de l'ensemble (3) *des droites de l'espace est par suite* [12] :

$$(4) \qquad dG = \frac{dp\,dq\,da\,db}{(a^2+b^2+1)^2}.$$

Désignons par θ l'angle formé par la droite (3) avec l'axe Oz et par φ l'angle formé par la projection de celle-ci sur le plan xOy avec l'axe Ox. Nous avons alors $a = \cos\varphi \operatorname{tg}\theta$, $b = \sin\varphi \operatorname{tg}\theta$, et la densité dG devient

$$(4') \qquad dG = |\sin\theta\cos\theta|\,[dp\,dq\,d\varphi\,d\theta].$$

Compte tenu de ce que p et q sont les coordonnées du point où la droite (3) coupe le plan xOy, et en posant $d\Omega = |\sin\theta|\,[d\varphi\,d\theta]$, nous écrirons l'expression de la densité dG sous la forme

$$(4'') \qquad dG = |\cos\theta|\,[dx\,dy\,d\Omega].$$

Nous déterminerons maintenant la mesure de l'ensemble des sécantes d'un domaine plan d'aire S. La densité dG étant invariante vis-à-vis des mouvements euclidiens de l'espace, nous pouvons supposer que le dans lequel se trouve le domaine donné est le plan xOy. Nous avons alors

$$\mu = \int dG = \iint dx\,dy \iint |\sin\theta\cos\theta|\,d\varphi\,d\theta.$$

Mais $\iint dx\,dy = S$, et

$$\iint |\sin\theta\cos\theta|\,d\varphi\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin\theta\cos\theta|\,d\theta = \pi,$$

la mesure cherchée est donc $\mu = \pi S$. Il résulte [12] que *la mesure des sécantes d'un domaine plan d'aire* S *est égale à* μS. Dans le cas d'une surface fermée d'aire S, en désignant par n le nombre de points d'intersection d'une droite quelconque avec la surface, on a $\int n\,dG = \mu S$. Si la surface est convexe, $n = 2$, et cette formule nous donne $\int dG = \frac{\pi}{2} S$:

La mesure de séantes d'une surface convexe d'aire S est égale à $\frac{\pi}{2}$S.

3. **L'ensemble des plans de l'espace.** — Soit maintenant l'ensemble des plans de l'espace d'équation

$$(5) \qquad ux + vy + 1 = 0.$$

Le groupe maximal d'invariance est encore ici le groupe projectif; le groupe attaché à celui-ci par rapport h la famille (5) étant non mesurable et admettant des sous-groupes de mesures différentes, l'ensemble est donc non mesurable.

La mesure de l'ensemble des plans sera alors envisagée par rapport au groupe (2) des transformations orthogonales.

Le groupe attaché à (2) relativement à la famille (5) est défini par les opérateurs

$$X_1 f = u\,Uf, \qquad X_2 f = v\,Uf, \qquad X_3 f = w\,Uf$$

$$\left(Uf = u\frac{\partial f}{\partial u} + v\frac{\partial f}{\partial v} + w\frac{\partial f}{\partial w}\right),$$

$$X_4 f = w\frac{\partial f}{\partial v} - v\frac{\partial f}{\partial w}, \qquad X_5 f = u\frac{\partial f}{\partial w} - w\frac{\partial f}{\partial u}, \qquad X_6 f = v\frac{\partial f}{\partial u} - u\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Le système de Deltheil se réduit aux équations

$$u\frac{\partial F}{\partial u} + v\frac{\partial F}{\partial v} + w\frac{\partial F}{\partial w} = -4F, \qquad v\frac{\partial F}{\partial u} - u\frac{\partial F}{\partial v} = 0,$$

$$u\frac{\partial F}{\partial w} - w\frac{\partial F}{\partial u} = 0,$$

et admet la solution $F(u, v, w) = \frac{1}{(u^2+v^2+w^2)^2}$. La densité de l'ensemble des plans (5) relativement au groupe des transformations orthogonales de l'espace est donc [12] :

$$dE = \frac{[du\, dv\, dw]}{(u^2+v^2+w^2)^2}. \tag{6}$$

En écrivant l'équation du plan sous la forme normale

$$x \sin\theta \cos\varphi + y \sin\theta \sin\varphi + z \cos\theta - p = 0, \tag{5'}$$

on a $dE = |\sin\theta|\,[dp\, d\varphi\, d\theta]$ ou, Ω ayant la signification du paragraphe précédent

$$dE = [dp\, d\Omega]. \tag{6'}$$

En appliquant ce dernier résultat à la mesure de l'ensemble des plans qui coupent un segment de droite de longueur l (qu'on peut supposer être le segment $[0, l]$ de l'axe Oz), on obtient pour la mesure de cet ensemble

$$\mu = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \int_0^{l\cos\theta} dp = \pi l.$$

Ce dernier résultat s'étend à la mesure de l'ensemble des plans coupant un arc de courbe rectifiable de longueur L, à condition de compter n fois un plan coupant l'arc en n points, on a alors

$$\mu = \int n\, E = \pi L.$$

On a un résultat analogue en ce qui concerne la mesure de l'ensemble des plans coupant une cloison de surface d'aire S. Si l'on affecte chaque plan d'un coefficient λ egal à la longueur de l'arc suivant lequel il coupe la cloison, on a ([1], [12]) :

$$\mu = \int \lambda\, dE = \frac{\pi^2}{2} S.$$

Et Minkowski a montré [18] que pour une surface fermée convexe, μ est égale à l'intégrale de la courbure moyenne de la surface $\mu = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) d\sigma$, ρ_1 et ρ_2 étant les deux rayons de courbure principaux, et $d\sigma$ l'élément d'aire.

4. **Systèmes de points.** — Considérons la famille, aux paramètres a_i, b_i, c_i, constituée par les couples de points $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P(x_2, y_2, z_2)$.

Ses équations sont

$$(7)\quad x_1 = a_1, \quad y_1 = b_1, \quad z_1 = c_1, \quad x_2 = a_2, \quad y_2 = b_2, \quad z_2 = c_2.$$

Son groupe maximal d'invariance est le groupe projectif et, comme dans les exemples qui précèdent et pour la même raison, la famille (7) est non mesurable.

Si l'on considère alors comme groupe d'invariance le groupe (2) des mouvements euclidiens de l'espace, le groupe attaché relativement à la famille (7) est

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1 a'_1 + \alpha_2 b'_1 + \alpha_3 c'_1, & a_2 &= \alpha_1 a'_2 + \alpha_2 b'_2 + \alpha_3 c'_2, \\ b_1 &= \beta_1 a'_1 + \beta_2 b'_1 + \beta_3 c'_1, & b_2 &= \beta_1 a'_2 + \beta_2 b'_2 + \beta_3 c'_2, \\ c_1 &= \gamma_1 a'_1 + \gamma_2 b'_1 + \gamma_3 c'_1, & c_2 &= \gamma_1 a'_2 + \gamma_2 b'_2 + \gamma_3 c'_2. \end{aligned}$$

avec les opérateurs de définitions

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial a_1} + \frac{\partial f}{\partial a_2}, \qquad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial b_1} + \frac{\partial f}{\partial b_2}, \qquad X_3 f = \frac{\partial f}{\partial c_1} + \frac{\partial f}{\partial c_2},$$

$$X_4 f = c_1 \frac{\partial f}{\partial b_1} - b_1 \frac{\partial f}{\partial c_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial b_2} - b_2 \frac{\partial f}{\partial c_2},$$

$$X_5 f = a_1 \frac{\partial f}{\partial c_1} - c_1 \frac{\partial f}{\partial a_1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial c_2} - c_2 \frac{\partial f}{\partial a_2},$$

$$X_6 f = b_1 \frac{\partial f}{\partial a_1} - a_1 \frac{\partial f}{\partial b_1} + b_2 \frac{\partial f}{\partial a_2} - a_2 \frac{\partial f}{\partial b_2}.$$

Le système de Deltheil relatif à ce groupe se réduit à

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial b_i} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial c_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

et admet la solution $F(a_1, \ldots, c_2) = 1$. Il en résulte que la densité des couples de points de l'espace, relative au groupe des transformations orthogonales, et

$$[dP_1\, dP_2] = [dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2].$$

On peut donner une autre forme à cette densité. En désignant par p, q les coordonnées du point où la droite P_1P_2 coupe le plan xOy, par θ l'angle formé par cette droite avec l'axe Oz, par φ l'angle de la projection de P_1P_2 sur le plan xOy avec l'axe Ox, par t_1, t_2 les distances algébriques du pied de la normale issue de 0 à la droite P_1P_2 aux points P_1 et P_2 et en exprimant les coordonnées des points P_1 et P_2 au moyen des quantités précédentes, on trouve

$$[dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2] = (t_1 - t_2)^2 \,|\sin\theta \cos\theta\,|\, [d\varphi\, d\theta\, dp\, dq\, dt_1\, dt_2],$$

et compte tenu de l'expression de la densité de l'ensemble des droites de l'espace

$$[dP_1\, dP_2] = (t_1 - t_2)^2 [dG\, dt_1\, dt_2].$$

Si l'on envisage les couples de points P_1, P_2 situés à l'intérieur d'une surface convexe fermée (Σ) limitant le volume V ou sur (Σ) et si l'on désigne par σ la longueur de la corde déterminée par (Σ) sur la droite $G \equiv P_1 P_2$, a et b étant les valeurs de t correspondant aux extrémités de cette corde, on a pour la mesure I de l'ensemble des couples (P_1, P_2) considérés

$$\begin{aligned} I &= \int dP_1\, dP_2 = \int dG\, dt_2 \int_a^b (t_1 - t_2)^2\, dt_1 \\ &= \frac{1}{3} \int dG \int_a^b [(b - t_2)^3 - (a - t_2)^3]\, dt_2 \\ &= \frac{1}{6} \int (b - a)^4\, dG = \frac{1}{6} \int_{\mathfrak{a}\,(G \cap \Sigma \neq \emptyset)} \sigma^4\, dG. \end{aligned}$$

Comme on a aussi

$$I = \int dP_1 \int dP_2 = V^2,$$

il en résulte la formule

$$\int_{\mathfrak{a}\,(G \cap \Sigma \neq \emptyset)} \sigma^4\, dG = 6V^2.$$

5. **La mesure cinématique.** — Considérons dans l'espace E_3 une figure (K) et l'ensemble de ses congruentes. Cet ensemble est mesurable et a pour mesure la mesure cinématique du groupe des transformations orthogonales de l'espace, que nous appelons *mesure cinématique dans l'espace.*

Désignons par x_1, x_2, x_3 les coordonnées cartésiennes orthogonales d'un point de E_3, et soient

$$x'_i = \lambda_i^j x_j + \alpha_i \qquad (i, j = 1, 2, 3),$$

où $\lambda_i^j \lambda_h^i = \delta_h^j$, les équations du groupe orthogonal.

Les formes de Pfaff invariantes de ce groupe sont

$$\omega_i = \lambda_i^k\, d\alpha_k \quad (i = 1, 2, 3), \qquad \omega_{ij} = \lambda_j^h\, d\lambda_i^h \quad (i < j = 1, 2, 3).$$

D'après la formule (26) du chapitre II, la densité cinématique dans l'espace est

(8) $$dK = [\omega_1\, \omega_2\, \omega_3\, \omega_{12}\, \omega_{13}\, \omega_{23}].$$

θ, φ, ψ étant les angles d'Éuler, les expressions des coefficients λ_j^i sont

$$\lambda_1^1 = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta, \qquad \lambda_1^2 = \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta,$$
$$\lambda_1^3 = \sin\psi\sin\theta,$$
$$\lambda_2^1 = -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\theta, \qquad \lambda_2^2 = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta,$$
$$\lambda_2^3 = \cos\psi\sin\theta,$$
$$\lambda_3^1 = \sin\varphi\sin\theta, \qquad \lambda_3^2 = -\cos\varphi\sin\theta, \qquad \lambda_3^3 = \cos\theta;$$

on a

$$[\omega_1\,\omega_2\,\omega_3] = |\,\lambda_j^i\,|\,[d\alpha_1\,d\alpha_2\,d\alpha_3] = [d\alpha_1\,d\alpha_2\,d\alpha_3],$$

soit α_1, α_2, α_3, étant regardés comme les coordonnées d'un point P, de l'espace

$$(9) \qquad [\omega_1\,\omega_2\,\omega_3] = dP.$$

D'après les expressions des coefficients λ_j^i en fonction des angles d'Euler, on a $[\omega_{12}\,\omega_{13}\,\omega_{23}] = \sin\theta\,[d\varphi\,d\theta\,d\psi]$, ou, en posant $d\Omega = \sin\theta\,[d\varphi\,d\theta]$,

$$(9') \qquad [\omega_{12}\,\omega_{13}\,\omega_{23}] = [d\Omega\,d\psi].$$

Compte tenu de (9) et (9′), (8) s'écrit [4] :

$$(10) \qquad dK = [dP\,d\Omega\,d\psi].$$

Un calcul analogue, fait en prenant pour ensemble (K) l'ensemble des droites G de l'espace, remplacerait, comme on le verrait sans peine [21], l'expression (10) de la densité cinématique de l'espace par

$$dK = [dG\,dt\,d\psi].$$

Des applications intéressantes de cette formule ont été faites par L. A. Santaló en [21].

6. L'ensemble des sphères, des quadriques et des cercles de l'espace. — Considérons l'ensemble des sphères de E_3, d'équation

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - R^2 = 0.$$

Le groupe maximal d'invariance de cet ensemble est le groupe des similitudes. Le groupe attaché à ce dernier relativement à l'ensemble des sphères est mesurable, avec la fonction invariante intégrale $F(a, b, c, R) = \frac{1}{R^4}$, *L'ensemble des sphères de l'espace est donc mesurable, et de mesure* [33] :

$$\mu\mathcal{A} = \int_{\mathcal{A}_\alpha} \frac{da\,db\,dc\,dR}{R^4}.$$

Pour les sphères dont le centre est à l'intérieur d'un corps (K) de volume V, et dont les rayons sont au moins égaux à r, la mesure est

$$\mu = \int da\, db\, dc \int_r^\infty \frac{dR}{R^4} = \frac{V}{3r^3}.$$

Considérons de même l'ensemble des quadriques non dégénérées d'équations

$$\begin{aligned} &a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz \\ &\quad + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + 1 = 0, \end{aligned}$$

où $\Delta = \det |a_{ij}| \neq 0$. Son groupe maximal d'invariance est le groupe des transformations projectives de l'espace; le groupe attaché à celui-ci par rapport à l'ensemble des quadriques est mesurable, sa fonction invariante intégrale étant $F(a_{ij}) = \frac{1}{\Delta^3}$. *L'ensemble des quadriques de l'espace est donc mesurable, de mesure* [33] :

$$\mu(\mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{A}_0} \frac{da_{11} \ldots da_{34}}{\Delta^3}.$$

Pour les cercles de l'espaces d'équations

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - R^2 = 0,$$
$$(x-a)\cos\varphi \sin\theta + (y-b)\sin\varphi \sin\theta + (z-c)\cos\theta = 0,$$

le groupe maximal d'invariance est le groupe des similitudes. Le groupe attaché à ce groupe des similitudes relativement à l'ensemble des cercles est mesurable et admet la fonction invariante intégrale $F(a, b, c, R, \varphi, \theta) = \frac{\sin\theta}{R^4}$. La densité de l'ensemble des cercles est donc

$$dC = \frac{|\sin\theta|}{R^4}[da\, db\, dc\, dR\, d\varphi\, d\theta].$$

Posant $dP = [da db dc]$, la densité dC devient

$$dC = \frac{1}{R^4}[dP\, dR\, d\Omega]$$

et par suite [33] *l'ensemble des cercles de l'espace est mesurable, sa mesure étant*

$$\mu(\mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{A}_0} \frac{dP\, dR\, d\Omega}{R^4}.$$

CHAPITRE V.

Géométrie intégrale dans un espace riemannien.

Soit V_n un espace riemannien à n dimensions dont la métrique est $ds^2 = a_{ij}\, dx^i dx^j$, où a_{ij} sont des fonctions continues et dérivables des variables $x^1, \ldots, x^n$.

Considérons dans cet espace une famille $\mathcal{F}_q$ de variétés à p dimensions $\mathcal{V}_p$ définie par les équations

$$F^{\lambda}(x^1, \ldots, x^n, \alpha^1, \ldots, \alpha^q) = 0, \qquad (\lambda = 1, \ldots, n-p),$$

où $\alpha^1, \ldots, \alpha^q$ sont des paramètres essentiels.

Pour pouvoir poser des problèmes de mesure pour les familles de variété $\mathcal{F}_q$, il faut qu'il existe des mouvements de l'espace V_n laissent globalement invariante la famille $\mathcal{F}_q$, ce qui exige tout d'abord que l'espace V_n ait un groupe de mouvements.

Dans ce chapitre nous nous occuperons de la mesure des familles de variétés d'un espace riemannien V_n, et tout particulièrement des espaces à courbure constante qui admettent un G_3 comme groupe de mouvements [2] et des surfaces de révolution pour lesquelles le groupe des mouvements est un G_1.

1. La mesure des ensembles de variétés d'un espace V_2 à courbure constante positive. — Soit V_2 un espace riemannien à deux dimensions à courbure constante positive $K = \frac{1}{R^2}$ dont la métrique est

$$ds^2 = R^2[\sin^2 x^2 (dx^1)^2 + (dx^2)^2],$$

et dont le groupe de mouvements sera désigné par $G_3^+(x)$.

Considérons dans cet espace une famille $\mathcal{F}_q$ de courbes d'équation

$$F(x^1, x^2, \alpha^1, \ldots, \alpha^q) = 0,$$

où $\alpha^1, \ldots, \alpha^q$ sont des paramètres essentiels, et soient $G_r(x) \subseteq G_3^+(x)$ le groupe maximal d'invariance de la famille $\mathcal{F}_q$ et $H_r(\alpha)$ le groupe attaché à $G_r(x)$ relativement à la famille $\mathcal{F}_q$. Pour que la famille $\mathcal{F}_q$ admette une mesure il faut que le groupe $H_r(\alpha)$ ou l'un de ses sous-groupes soit mesurable. Une condition nécessaire pour que la famille $\mathcal{F}_q$ de courbes de l'espace V_2 admette une mesure est donc que $q \leqq r \leqq 3$.

Pour les familles à trois paramètres de courbes on a $q = r = 3$; les seules familles à trois paramètres de courbes susceptibles d'admettre une mesure sont donc celles qui ont comme groupe d'invariance le groupe $G_3^+(x)$; ce groupe est par suite le groupe maximal d'invariance et il en résulte que la condition nécessaire et suffisante pour que la famille de courbes $\mathcal{F}_3$ soit mesurable et que le groupe $H_3(\alpha)$ attaché au groupe $G_3(x)$ relativement à la famille $\mathcal{F}_3$ soit mesurable.

Déterminons maintenant les familles $\mathcal{F}_3$ de courbes mesurables de l'espace V_2^+. Nous supposerons pour simplifier $K = 1$, et que par suite l'espace est applicable sur la sphère unité d'un espace euclidien E_3.

Les transformations infinitésimales du groupe $G_3(x)$ sont, dans ce cas [2] :

$$(1)\qquad \begin{cases} X_1 f = -\dfrac{\partial f}{\partial x^1}, \\ X_2 f = -\sin x^1 \operatorname{cotg} x^2 \dfrac{\partial f}{\partial x^1} + \cos x^1 \dfrac{\partial f}{\partial x^2}, \\ X^3 f = \cos x^1 \operatorname{cotg} x^2 \dfrac{\partial f}{\partial x^1} + \sin x^1 \dfrac{\partial f}{\partial x^2}. \end{cases}$$

Envisageons une famille à trois paramètres courbes d'équation de

$$(2)\qquad F(x^1, x^2, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) = 0,$$

où α^1, α^2, α^3 sont des paramètres essentiels. Le groupe $H_3(\alpha)$ attaché au groupe (1) relativement à la famille (2) est donc un groupe à trois variables et trois paramètres, isomorphe au groupe (1). Pour que la famille (2) soit mesurable il est nécessaire et suffisant que $H_3(\alpha)$ soit mesurable, donc simplement transitif.

En [37] nous avons montré que tout groupe à trois variables simplement transitif, isomorphe au groupe (1), admet des transformations infinitésimales qui, moyennant un changement de variables, peuvent être mises sous les formes

$$(3)\qquad \begin{cases} A_1 f = -\dfrac{\partial f}{\partial \alpha_1}, \\ A_2 f = -\sin \alpha_1 \operatorname{cotg} \alpha^3 \dfrac{\partial f}{\partial \alpha^1} - \dfrac{\sin \alpha^1}{\sin \alpha^3} \dfrac{\partial f}{\partial \alpha^2} + \cos \alpha^1 \dfrac{\partial f}{\partial \alpha^3}, \\ A_3 f = \cos \alpha^1 \operatorname{cotg} \alpha^3 \dfrac{\partial f}{\partial \alpha^1} + \dfrac{\cos \alpha^1}{\sin \alpha^3} \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_2} + \sin \alpha_1 \dfrac{\partial f}{\partial \alpha^3}. \end{cases}$$

En portant les expressions (1) et (3) dans les équations (12) du chapitre II, on obtient un système d'équations aux dérivées partielles admettant la solution $F = F(\lambda, \mu)$, où

$$\lambda = \sin \alpha^2 \sin \alpha^3 \cos x^2 - \sin \alpha^2 \cos \alpha^3 \sin x^2 \cos(x^1 - \alpha^1) - \cos \alpha^2 \sin x^2 \sin(x^1 - \alpha^1)$$

$$\mu = \cos \alpha^3 \cos x^2 + \sin \alpha^3 \sin x^2 \cos(x^1 - \alpha^1).$$

La famille de courbes envisagée a donc l'équation $F(\lambda, \mu) = 0$, ou $\lambda = F(\mu)$. Son groupe maximal d'invariance est le groupe (1) et le groupe attaché à ce dernier est le groupe (3). La fonction invariante intégrale du groupe (3) est $F(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) = \sin\alpha^3$. Il en résulte [38] :

Les familles à trois paramètres mesurables de courbes d'un espace V_2 *à courbure constante positive, peuvent moyennant un changement de variables être mises sous la forme*

$$\sin\alpha^2 \sin\alpha^3 \cos x^2 - \sin\alpha^2 \cos\alpha^3 \sin x^2 \cos(x^1 - \alpha^1) - \cos\alpha^2 \sin x^2 \sin(x^1 - \alpha^1),$$
$$= F[\cos\alpha^3 \cos x^2 + \sin\alpha^3 \sin x^2 \cos(x^1 - \alpha^1)],$$

le groupe maximal d'invariance étant le groupe (1) *de mouvements de l'espace, et la mesure*

$$\mu(\mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{A}_\alpha} \sin\alpha^3 \, d\alpha^1 \, d\alpha^2 d\alpha^3.$$

Dans le cas d'une famille $\mathcal{F}_2$ à deux paramètres de courbes, nous avons $q = 2 \leqq r \leqq 3$. Le groupe d'invariance de la famille doit avoir deux ou trois paramètres. Mais le groupe (1) de mouvements d'un espace V_2^+ n'a aucun sous-groupe réel à deux paramètres [2], donc le groupe d'invariance de la famille doit être le groupe $G_3^+(x)$ qui est, dans ce cas, le groupe maximal d'invariance de la famille. La condition nécessaire et suffisante pour que la famille $\mathcal{F}_2$ de courbes soit mesurable est que le groupe $H_3(\alpha)$ attaché au groupe $G_3^+(x)$ relativement à la famille, soit mesurable. Le groupe est, par conséquent, un groupe transitif à deux variables et à trois paramètres isomorphe au groupe (1). En [37], nous avons démontré qu'un tel groupe peut avoir les transformations infinitésimales

$$(4) \qquad \begin{cases} A_1 f = -\dfrac{\partial f}{\partial \alpha^1}, \\ A_2 f = -\sin\alpha^1 \cot g\alpha^2 \dfrac{\partial f}{\partial \alpha^1} + \cos\alpha^1 \dfrac{\partial f}{\partial \alpha^2}, \\ A_3 f = \cos\alpha^1 \cot g\alpha^2 \dfrac{\partial f}{\partial \alpha^1} + \sin\alpha^1 \dfrac{\partial f}{\partial \alpha^2}. \end{cases}$$

En portant les expressions (1) et (4) dans les équations (12) du chapitre II, nous obtenons un système admettant la solution

$$F = F[\cos(x^1 - \alpha^1) \sin x^2 \sin\alpha^2 + \cos x^2 \cos\alpha^2].$$

Il en résulte que la famille de courbes admet l'équation

$$F[\cos(x^1 - \alpha^1) \sin x^2 \sin\alpha^2 + \cos x^2 \cos\alpha^2] = 0,$$

soit

$$(5) \qquad \cos(x^1 - \alpha^1)\sin x^2 \sin\alpha^2 + \cos x^2 \cos\alpha^2 = k \qquad (k = \text{Cte})$$

La représentation paramétrique de la sphère unité

$$(6) \qquad y^1 = \cos x^1 \sin x^2, \qquad y^2 = \sin x^1 \sin x^2, \qquad y^3 = \cos x^2$$

montre que la famille de courbes (5) est identique à la famille de cercles

$$\cos\alpha^1 \sin\alpha^2 y^1 + \sin\alpha^1 \sin\alpha^2 y^2 + \cos\alpha^3 y^3 = k$$

de cette sphère.

La fonction invariante intégrale du groupe (4) est $F(\alpha^1, \alpha_2) = \sin\alpha^2$, d'où le théorème [38] :

Les familles à deux paramètres de courbes mesurables sur la sphère (6) *sont des familles à deux paramètres de cercles, le groupe maximal d'invariance étant* (1) *et la mesure*

$$\mu(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}_\alpha} \sin\alpha^2 \, d\alpha^1 \, d\alpha^2.$$

Déterminons maintenant les familles mesurables $\mathcal{F}_1$ à un paramètre. On a ici $q = 1 \leqq r \leqq 3$ et le groupe d'invariance de la famille est à un ou trois paramètres. S'il est à trois paramètres c'est le groupe $G_3^+(x)$. Le groupe $H_3(\alpha)$, qui est à une variable et à trois paramètres (groupe projectif de la droite) ne lui est pas isomorphe. $G_3(x)$ ne peut donc pas être groupe d'invariance pour la famille $\mathcal{F}_1$.

Si le groupe maximal d'invariance de la famille est à un paramètre $G_1(x)$, le groupe $H_1(\alpha)$ attaché à $G_1(x)$ relativement à la famille est simplement transitif, donc mesurable; la famille de courbes est alors mesurable.

Plaçons-nous dans ce cas. La mesurabilité de la famille de courbes

$$F(x^1, x^2, \alpha) = 0,$$

exige que son groupe maximal d'invariance soit un sous-groupe $G_1(x)$ à un paramètre du groupe (1). Le groupe attaché à $G_1(x)$ relativement à la famille $\mathcal{F}_1$ est un groupe à une variable, à un paramètre; c'est donc la translation $\alpha' = \alpha + a$. L'équation (12) du chapitre II devient

$$\xi^1 \frac{\partial F}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

où $Xf = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$ est la transformation infinitésimale du groupe $G_1(x)$.

Le système différentiel attaché à cette équestion est

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x)} = \frac{dx^2}{\xi^2(x)} = d\alpha,$$

et c'est là le système différentiel du groupe $G_1(x)$.

Si donc les équations finies du groupe $G_1(x)$ sont $y^i = f^i(x^1, x^2, a)$ $(i = 1, 2)$, la famille $\mathcal{F}_1$ de courbes admet l'équation

$$F[f^1(x, \alpha), f^2(x, \alpha)] = 0,$$

qui représente la famille des variétés G_1-équivalentes à une courbe arbitraire de l'espace V_2 non invariante par $G_1(x)$. Ainsi :

Les familles mesurables à un paramètre de courbes d'un espace V_2 *à courbure constante positive, sont les familles* G_1*-équivalentes à une courbe arbitraire de l'espace* V_2 *qui n'est pas variété invariante du groupe* G_1, *le groupe* G_1 *étant un sous-groupe à un paramètre du groupe de mouvements de l'espace.*

Nous avons démontré plus haut que l'ensemble des grands cercles sur la sphère unité

$$\cos\alpha^1 \sin\alpha^2 y^1 + \sin\alpha^1 \sin\alpha^2 y^2 + \cos\alpha^2 y^3 = 0 \tag{7}$$

est mesurable et a pour mesure

$$\mu(\mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{A}_\alpha} \sin\alpha^2\, d\alpha^1\, d\alpha^2.$$

Cherchons les sous-familles à un paramètre de grands cercles sur la sphère unité, mesurable. Le groupe attaché au groupe maximal d'invariance de la famille (7) est le groupe (4) qui a la structure $(A_1A_2) = A_3$, $(A_2A_3) = A_1$, $(A_3A_1) = A_2$.

Ce groupe n'a aucun sous-groupe réel à deux paramètres et admet deux sous-groupes distincts à un paramètre : $H_1 \equiv [A_3]$, $H'_1 \equiv [A_2]$. Le groupe H_1 a comme variétés invariantes les droites $\alpha^2 = k$ $(k = \mathrm{Cte})$. Relativement au groupe H_1 on a donc la sous-famille à un paramètre de grands cercles

$$\cos\alpha^1 y^1 + \sin\alpha^1 y^2 + cy^3 = 0, \qquad (c = \cot g\, k). \tag{7'}$$

Pour H'_1 on obtient la sous-famille

$$\sqrt{\sin^2\alpha^2 - k^2}\, y^1 + ky^2 + \cos\alpha^2 y^3 = 0 \qquad (k = \mathrm{Cte}). \tag{7''}$$

Les seules sous-familles à un paramètre mesurables de grands cercles sur la sphère unité sont donc [39] *les familles* (7′) *et* (7″).

2. La mesure des ensembles de variétés d'un espace V_2 à courbure constante négative. — Soit V_2 un espace riemannien à deux dimensions à courbure constante négative $K = -\frac{1}{R^2}$, dont la métrique est

$$ds_2 = \frac{R^2}{(x^2)^2}[(dx^1)^2 + (dx^2)^2],$$

et dont le groupe de mouvements sera noté par $G_3^-(x)$.

Comme pour V_2^+, pour qu'une famille à q paramètres de courbe de V_2 admette une mesure, il faut que $q \leq 3$.

Considérons une famille $\mathcal{F}_3$ de courbes d'équation

$$F(x^1, x^2, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) = 0, \tag{8}$$

où α^1, α^2, α^3 sont des paramètres essentiels.

Le groupe $G_3^-(x)$ admet les transformations infinitésimales [2] :

$$\left\{\begin{aligned} & X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x^1}, \qquad X_2 f = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \\ & X_3 f = [(x^1)^2 - (x^2)^2]\frac{\partial f}{\partial x^1} + 2x^1 x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2}. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Le groupe $H_3(\alpha)$ attaché à $G_3^-(x)$ relativement à la famille (8), est donc un groupe à trois variables et trois paramètres, isomorphe au groupe $G_3^-(x)$.

Pour que la famille (8) soit mesurable il faut que le groupe $H_3(\alpha)$ soit simplement transitif. Un tel groupe a les transformations infinitésimales [37] :

$$\left\{\begin{aligned} & A_1 f = e^{-\alpha^3}\left[\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} - (\alpha^2)^2 \frac{\partial f}{\partial \alpha^2} - 2\alpha^2 \frac{\partial f}{\partial \alpha^3}\right], \\ & A_2 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^3}, \qquad A_3 f = e^{\alpha^3}\frac{\partial f}{\partial \alpha^2}, \end{aligned}\right. \tag{9'}$$

et en portant les expressions (9) et (9′) dans les équations (12) du chapitre II, on obtient le système

$$\left\{\begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial x^1} + e^{-\alpha^3}\left[\frac{\partial F}{\partial \alpha^1} - (\alpha^2)^2 \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} - 2\alpha^2 \frac{\partial F}{\partial \alpha^3}\right] = 0, \\ & x^1 \frac{\partial F}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0, \\ & [(x^1)^2 - (x^2)^2]\frac{\partial F}{\partial x^1} + 2x^1 x^2 \frac{\partial F}{\partial x^2} + e^{\alpha^3}\frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \end{aligned}\right.$$

qui admet la solution $F = F\left(\frac{\lambda^2\mu^2+1}{\lambda}, \alpha^1 - \frac{\lambda^2\mu}{\lambda^2\mu^2+1}\right)$ où

$$\lambda = \frac{(x^1)^2+(x^2)^2}{x^2 e^{\alpha^3}}, \qquad \mu = \alpha^2 + \frac{x^1 e^{\alpha^3}}{(x^1)^2+(x^2)^2}. \tag{10}$$

La famille de courbes cherchées a donc l'équation

$$F\left(\frac{\lambda^2\mu^2+1}{\lambda}, \alpha^1 - \frac{\lambda^2\mu}{\lambda^2\mu^2+1}\right) = 0.$$

Le groupe (9′) admet la fonction invariante intégrale $F(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) = 1$, il en résulte [38] :

Les familles à trois paramètres mesurables de courbes, d'un espace V_2^- *à courbure constante négative, ont pour équation*

$$F\left(\frac{\lambda^2\mu^2+1}{\lambda}, \alpha^1 - \frac{\lambda^2\mu}{\lambda^2\mu^2+1}\right) = 0,$$

où λ *et* μ *ont des valeurs* (10), *la mesure étant*

$$\mu(\mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{A}_\alpha} d\alpha^1\, d\alpha^2\, d\alpha^3.$$

Considérons maintenant une famille $\mathcal{F}_2$ à deux paramètres de courbes d'équation

$$F(x^1, x^2, \alpha^1, \alpha^2) = 0. \tag{11}$$

On a $q = 2 \leqq r \leqq 3$; pour que la famille admette une mesure il faut donc que son groupe d'invariance ait deux ou trois paramètres. Si la famille (11) a comme groupe maximal d'invariance un groupe à deux paramètres, sous-groupe de (9), on peut supposer que ce groupe est défini par les opérateurs [2] :

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x^1}, \qquad X_2 f = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2}. \tag{12}$$

Pour que la famille (11) soit mesurable il faut que le groupe $H_2(\alpha)$ à deux variables et deux paramètres, attaché au groupe (12) relativement à la famille, soit mesurable, donc simplement transitif. Ce groupe est défini par les opérateurs

$$A_1 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^1}, \qquad A_2 f = \alpha^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha^1} + \alpha^2 \frac{\partial f}{\partial \alpha^2}. \tag{12'}$$

En remplaçant les opérateurs (12) et (12′) dans les équations (12) du chapitre II, on obtient le système

$$\frac{\partial F}{\partial x^1}+\frac{\partial F}{\partial \alpha^1}=0, \qquad x^1\frac{\partial F}{\partial x^1}+x^2\frac{\partial F}{\partial x^2}+\alpha^1\frac{\partial F}{\partial \alpha^1}+\alpha^2\frac{\partial F}{\partial \alpha^2}=0,$$

qui admet la solution $F=F\left(\frac{x^1-\alpha^1}{\alpha^2}, \frac{x^2}{\alpha^2}\right)$.

La famille de variétés cherchée a donc l'équation $F\left(\frac{x^1-\alpha^1}{\alpha^2}, \frac{x^2}{\alpha^2}\right)=0$, soit

$$(x^1-\alpha^1)^2+(\alpha^2)^2\,F\left(\frac{x^2}{\alpha^2}\right)=0. \tag{13}$$

Le groupe (12′) admet la fonction invariante intégrale $F(\alpha^1, \alpha^2)=\frac{1}{(\alpha^2)^2}$; la mesure de la famille (13) est donc

$$\mu(\mathfrak{A})=\int_{\mathfrak{A}_\alpha}\frac{d\alpha^1\,d\alpha^2}{(\alpha^2)^2}.$$

Si la famille (11) a comme groupe maximal d'invariance le groupe $G_3(x)$, le groupe $H_3(\alpha)$ attaché à ce groupe, est un groupe isomorphe à trois variables. Pour que la famille soit mesurable il faut que le groupe $H_3(\alpha)$ soit mesurable donc transitif; le groupe $H_3(\alpha)$ a donc les transformations infinitésimales

$$A_1 f=\frac{\partial f}{\partial \alpha^1}, \qquad A_2 f=\alpha^1\frac{\partial f}{\partial \alpha^1}+\alpha^2\frac{\partial f}{\partial \alpha^2},$$

$$A_3 f=[(\alpha^1)^2-(\alpha^2)^2]\frac{\partial f}{\partial \alpha^1}+2\alpha^1\alpha^2\frac{\partial f}{\partial \alpha^2}.$$

Le système (12) du chapitre II devient

$$\frac{\partial F}{\partial x^1}+\frac{\partial F}{\partial \alpha^1}=0,$$

$$x^1\frac{\partial F}{\partial x^1}+x^2\frac{\partial F}{\partial x^2}+\alpha^1\frac{\partial F}{\partial \alpha^1}+\alpha^2\frac{\partial F}{\partial \alpha^2}=0,$$

$$[(x^1)^2-(x^2)^2]\frac{\partial F}{\partial x^1}+2x^1x^2\frac{\partial F}{\partial x^2}+[(\alpha^1)^2-(\alpha^2)^2]\frac{\partial F}{\partial \alpha^1}+2\alpha^1\alpha^2\frac{\partial F}{\partial \alpha^2}=0,$$

et admet la solution $F=F\left[\frac{(x^1)^2+(x^2)^2-2\alpha^1x^1+(\alpha^1)^2+(\alpha^2)^2}{\alpha^2x^2}\right]$:

L'équation de la famille est donc

$$F\left[\frac{(x^1)^2+(x^2)^2-2\alpha^1x^1+(\alpha^1)^2+(\alpha^2)^2}{\alpha^2x^2}\right]=0,$$

ou

$$(x^1 - \alpha^1)^2 + (x^2)^2 + (\alpha^2)^2 - k\alpha^2 x^2 = 0, \qquad (k = \text{Cte}), \tag{13'}$$

sa mesure étant

$$\mu(\mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{A}_\alpha} \frac{d\alpha^1\, d\alpha^2}{(\alpha^2)^2}.$$

La famille (13′) s'obtient en prenant dans (13) :

$$F\left(\frac{x^2}{\alpha^2}\right) = \left(\frac{x^2}{\alpha^2}\right)^2 - k\frac{x}{\alpha^2} + 1.$$

Les familles à deux paramètres mesurables de courbes d'un espace riemannien V_2^- *à courbure constante négative ont donc pour équation*

$$(x^1 - \alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2 F\left(\frac{x^2}{\alpha^2}\right) = 0,$$

leur mesure étant

$$\mu(\mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{A}_\sigma} \frac{d\alpha^1\, d\alpha^2}{(\alpha^2)^2}.$$

Pour $F\left(\frac{x^2}{\alpha^2}\right) = \left(\frac{x^2}{\alpha^2}\right)^2 - 1$, la famille (13) devient la famille des géodésiques de l'espace V_2^- d'équation [44] :

$$(x^1 - \alpha^1)^2 + (x^2)^2 = (\alpha^2)^2. \tag{14}$$

Il en résulte que l'ensemble des géodésiques d'un espace riemannien V_2^- *à courbure constante négative est mesurable.*

Dans le cas des familles à un paramètre de courbes, nous obtenons, de même que dans le cas de l'espace V_2^+ :

Les familles mesurables à un paramètre de courbes d'un espace V_2^- *à courbure constante négative sont les familles* G_1*-équivalentes à une courbe arbitraire de l'espace* V_2^- *non invariante par* G_1, *celui-ci étant un sous-groupe du groupe de mouvements de l'espace.*

Déterminons maintenant les sous-familles à un paramètre mesurable de géodésique d'un espace V_2^-.

Le groupe attaché au groupe maximal d'invariance de l'ensemble des géodésiques (14) est le groupe (12′). Ce groupe admet deux sous-groupes à un paramètre distincts, $H_1 \equiv [A]_1$ et $H'_1 \equiv [A_2]$. Le groupe H_1 a comme variétés invariantes les droites $\alpha^2 = k$ (k = Cte). Pour ce groupe nous avons donc les sous-familles mesurables à un paramètre de géodésiques

$$(x^1 - \alpha^1)^2 + (x^2)^2 = k^2. \tag{14'}$$

De même H'_1 a pour variétés invariantes les droites $\alpha' = k\alpha^1$ (k = Cte). Ce groupe a donc les sous-familles mesurables de géodésiques

$$(14'') \qquad (x^1 - \alpha^1)^2 + (x^2)^2 - \lambda(\alpha^1)^2 = 0.$$

Les seules familles mesurables à un paramètre de géodésiques d'un espace V_2 à courbure constante négative, sont donc les familles (14′) *et* (14″).

3. **La mesure des familles de variétés sur une surface de révolution.** — Considérons une surface de révolution de métrique

$$(15) \qquad ds^2 = (dx^1)^2 + [\varphi(x^1)\, dx^2]^2 \qquad (\varphi = \sin x^1, \operatorname{sh} x^1)$$

Cette surface admet [2] comme groupe de mouvements le groupe $G_1(x)$:

$$(16) \qquad x'^1 = x^1, \qquad x'^2 = x^2 + a.$$

On a ici $q \leqq r \leqq 1$; les seules familles de courbes susceptibles de mesure sont les familles $\mathcal{F}_1$ à un paramètre, admettant le groupe (16) comme groupe maximal d'invariance.

Le groupe attaché à (16) relativement à la famille $\mathcal{F}_1$ est un groupe à une variable et à un paramètre, soit le groupe (mesurable) des translations $\alpha' = \alpha + a$. Le système (12) du chapitre II devient

$$\frac{\partial F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0,$$

qui admet la solution $F = F(x^1, x^2 - \alpha)$. L'équation de la famille cherchée est $F(x^1, x^2 - \alpha) = 0$, ou

$$x^2 = F(x^1) + \alpha,$$

Il en résulte [38] :

Les familles mesurables de courbes sur la surface de révolution (15) *ont pour équation*

$$(17) \qquad x^2 = F(x^1) + \alpha,$$

leur groupe d'invariance est (16), *et leur mesure*

$$\mu(\mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{A}_\alpha} d\alpha.$$

La famille des géodésiques de la surface (15), d'équations

$$x^2 = \int \frac{dx^1}{2\varphi(x^1)[\varphi(x^1) + \beta]} + \alpha,$$

est non mesurable puisque à deux paramètres (α, β).

La sous-famille à un paramètre (β = Cte) a une équation

(17′) $$x^2 = \int \frac{dx^1}{2\varphi(\varphi + k)} + \alpha$$

de la forme (17), et est par suite mesurable.

4. Mesure de l'ensemble des géodésiques sur une surface. — Soit un espace riemannien V_2 dont la métrique est

(18) $$ds^2 = a_{11}(dx^1)^2 + 2a_{12}\,dx^1\,dx^2 + a_{22}(dx^2)^2.$$

En posant

(19) $$\begin{cases} F(x^1, x^2, x'^1, x'^2) = \sqrt{a_{11}(x'^1)^2 + 2a_{12}x'^1 x'^2 + a_{22}(x'^2)^2} \\ \left(x'^i = \dfrac{dx^i}{dt}\right), \end{cases}$$

les équations des géodésiques de l'espace sont

(20) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'^i}\right) - \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Introduisons les quantités

(21) $$p_i = \frac{\partial F}{\partial x'^i} \qquad (i = 1, 2)$$

si l'on tire les x'^i des (21) : $x'^i = \varphi_i(x^1, x^2, p_1, p_2)$, et si l'on introduit la fonction d'Hamilton :

$$H(x^1, x^2, p_1, p_2) = -F(x^1, x^2, \varphi_1, \varphi_2) + p_1\varphi_1 + p_2\varphi_2,$$

le système (20) définissant les géodésiques prend la forme (d'Hamilton)

(22) $$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \qquad \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2).$$

Si

(23) $$x^1 = x^1(\alpha, \beta, t), \qquad x^2 = x^2(\alpha, \beta, t) \qquad (\alpha, \beta, = \text{Cte}),$$

est la solution, si l'on tire p_1 et p_2 de (21) et (23) :

(24) $$p_1 = p_1(\alpha, \beta, t), \qquad p_2 = p_2(\alpha, \beta, t),$$

et si l'on considère la forme différentielle

(25) $$dG = [dx^1\,dp_1] + [dx^2\,dp_2],$$

celle-ci est invariante pour un changement des coordonnées sur la surface et du paramètre t sur la géodésique ([3], [14]). L'intégrale

$$\mu(\mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{A}_\alpha} \alpha G,$$

relative à un ensemble de géodésiques correspondant au domaine de l'espace des paramètres, et qui n'est autre chose que l'invariant de Poincaré des trajectoires de la dynamique, peut être prise comme mesure de cet ensemble.

On peut donner, avec L. A. Santaló [26] (*voir* aussi [22], [23], [24]) une autre forme à la densité dG. Écrivons, pour cela, la métrique de l'espace sous la forme géodésique

$$ds^2 = d\rho^2 + g^2(\rho, \theta)\, d\theta^2; \tag{18'}$$

nous avons ainsi

$$x^1 = \rho, \qquad x^2 = \theta, \qquad F = \sqrt{\rho'^2 + g^2\theta'^2} \qquad \left(\rho' = \frac{d\rho}{dt},\ \theta' = \frac{d\theta}{dt}\right)$$

et aussi

$$\operatorname{tg} V = g\frac{d\theta}{d\rho} \tag{26}$$

si V est l'angle de la géodésique G avec le rayon vecteur.

On déduit de là

$$p_1 = \frac{\partial F}{\partial \rho'} = \frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + g^2\theta'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 V}} = \cos V,$$

$$p_2 = \frac{\partial F}{\partial \theta'} = \frac{\rho\theta'}{\sqrt{\rho'^2 + g^2\theta'^2}} = \frac{g \operatorname{tg} V}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 V}} = g \sin V,$$

d'où

$$dp_1 = -\sin V\, dV, \qquad dp_2 = \frac{\partial g}{\partial \rho}\sin V\, d\rho + \frac{\partial g}{\partial \theta}\sin V\, d\theta + g\cos V\, dV$$

et par suite l'expression de la densité dG en coordonnées géodésiques

$$dG = -\sin V[d\rho\, dV] + \frac{\partial g}{\partial \rho}\sin V\,[d\theta\, d\rho] + g\cos V\,[d\theta\, dV]. \tag{27}$$

L'invariance de la densité dG par changement du paramètre t, c'est-à-dire par déplacement sur une géodésique, permet de prendre $V = \frac{\pi}{2}$. La formule (27) devient alors

$$dG = \frac{\partial g}{\partial \rho}[d\theta\, d\rho]. \tag{28}$$

Dans le cas des surfaces à courbure constante K, on a

$$g = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K}\,\rho. \tag{29}$$

Si $K = 0$ on a $g = \rho$, et $dG = [d\theta\, d\rho]$; la densité est celle de l'ensemble des droites du plan.

Si $K = 1$, (29) et (28) donnent $dG = \cos\rho\, [d\theta\, d\rho]$, ce qui est la densité de l'ensemble des grands cercles d'une sphère obtenue au paragraphe 1.

Si $K = -1$, les formules (29) et (28) donnent $dG = \operatorname{ch}\rho\, [d\theta\, d\rho]$ densité qui, par un changement de variables, se réduit à celle des géodésiques d'un espace V_2^- obtenue au paragraphe 2 de ce chapitre,

Pour donner quelques applications, considérons sur la surface une courbe fixe (Γ) formée d'un nombre fini d'arcs à tangente continue et cherchons la mesure de l'ensemble des géodésiques coupant (Γ) [26].

Soit O l'origine des coordonnées géodésiques ρ, θ sur la surface, et P un point d'intersection de (Γ) avec une géodésique (G). V étant l'angle du rayon vecteur OP et (G), τ celui de OP et de (Γ), ds l'élément d'arc sur (Γ), on a $d\rho = \cos\tau\, ds$, $g\,d\theta = \sin\tau\, ds$, et si $\varphi = \tau - V$ est l'angle de (Γ) et de (G), (27) donne $dG = |\sin\varphi|\, [d\varphi\, ds]$. L désignant la longueur de la courbe (Γ) et n le nombre de points d'intersection d'une courbe (G) avec (Γ), l'intégration de la relation précédente dans les limites ($0 \leqq \varphi \leqq \pi$, $0 \leqq s \leqq L$), donne

$$\int n\, dG = 2L. \tag{30}$$

Si (Γ) est une courbe fermée convexe, $n = 2$, $\int dG = L$, et la mesure de l'ensemble des géodésiques qui la coupent est égale à sa longueur.

Considérons maintenant sur la surface deux géodésiques (G_1) et (G_2) se coupant en un point P. ρ, θ étant les coordonnées géodésiques de P, et V_1, V_2 les angles du rayon vecteur OP avec (G_1) et (G_2) respectivement, on déduit de (27) :

$$dG_i = -\sin V_i [d\rho\, dV_i] + \frac{\partial g}{\partial \rho} \sin V_i [d\theta\, d\rho] + g \cos V_i [d\theta\, dV_i] \qquad (i = 1, 2).$$

et, par produit extérieur

$$[dG_1\, dG_2] = g\, |\sin(V_1 - V_2)|\, [d\rho\, d\theta\, dV_1\, dV_2],$$

soit, $dP = g\,[d\rho\, d\theta]$ étant l'élément d'aire sur la surface :

$$[dG_1\, dG_2] = |\sin(V_1 - V_2)|\, [dP\, dV_1\, dV_2]. \tag{31}$$

Si (Γ_0) est une courbe fermée limitant l'aire S_0, l'intégration de (31) pour toutes les positions du point P intérieures à (Γ_0) donne

$$\int_{P\in\Gamma_0} dG_1\, dG_2 = \int_{P\in\Gamma_0} dP \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} |\sin(V_1 - V_2)|\, dV_1\, dV_2 = 2\pi S_0.$$

Si σ est la corde déterminée sur (G_1) par (Γ_0) et si l'on a égard à (30) écrite pour $n = 1$, on a

$$\int_{P\in\Gamma_0} dG_1\, dG_2 = \int_{G_1\cap\Gamma_0\neq\emptyset} dG_1 \int_{P\in\Gamma_0} dG_2 = 2\int_{G_1\cap\Gamma_0\neq\emptyset} \sigma\, dG_1,$$

d'où

$$\int_{G\cap\Gamma_0\neq\emptyset} \sigma\, dG_1 = \pi S_0.$$

Si les géodésiques (G) d'une surface sont supposées orientées et si l'on envisage sur chacune d'elles les arcs de même orientation et de longueur donnée l, la forme

$$dK = \left[d\vec{G} ds\right], \tag{32}$$

où s est l'abscisse de l'origine P d'un arc quelconque sur sa génératrice support, invariante pour un changement de coordonnées sur la surface et un glissement de l'arc sur la géodésique, peut être regardée comme une espèce de densité cinematique sur la surface, à partir de laquelle la mesure de l'ensemble d'arcs géodésiques de longueur l considérés peut être défini par l'intégrale $\mu = \int dK$.

L'expression (33) de dK, compte tenu de (18), (26), (27), et de l'expression $dP = g\,[d\rho\, d\theta]$ de l'élément d'aire, peut s'écrire [26]

$$dK = [dP\, dV]. \tag{32'}$$

Comme applications de la formule (32′) considérons, sur la surface, un domaine (D) d'aire S. La mesure des arcs de géodésique de longueur l dont l'origine est intérieure à (D) est

$$\mu = \int_{P\in D} d\vec{G}\, ds = \int_{P\in D} \sigma\, d\vec{G} = 2\int_{P\in D} \sigma\, dG,$$

où σ est la longueur de la portion de géodésique (G) intérieure à (D). Tenant compte de (32′), on a

$$\mu = \int_{P\in D} dP\, dV = \int_0^{2\pi} dV \int_{P\in D} dP = 2\pi S,$$

d'où il résulte [26] :

$$\int_{P \in D} \sigma \, dG = \pi S.$$

Soient maintenant sur la surface, deux points P_1 et P_2 qui déterminent la géodésique (G); d'après (32) et (32'), on a

$$[dP_1 \, dV_1] = \left[d\vec{G} \, ds_1 \right]. \tag{33}$$

Dans le système de coordonnées géodésiques d'origine P, l'élément d'aire dP_2 a l'expression $dP_2 = g_{P_1}(P_2)\,[d\,(s_2 - s_1)\,dV]$, et le produit extérieur de cette forme et de (33) donne

$$[dP_1 \, dP_2] = g_{P_1}(P_2) \left[d\vec{G} \, ds_1 \, ds_2 \right].$$

En faisant la convention $s_1 \leqq s_2$ et $0 \leqq V < \pi$, on peut considérer la géodésique non orientée (G), et l'on a ainsi

$$[dP_1 \, dP_2] = g_{P_1}(P_2)\,[dG \, ds_1 \, ds_2]. \tag{34}$$

Pour les surfaces développables $g = s_2 - s_1$ et la formule (34) est la formule (11) du chapitre III.

Pour les surfaces à courbure constante positive $K = 1$,

$$g = \sin(s_2 - s_1),$$

et la formule (34) devient

$$[dP_1 \, dP_2] = \sin(s_2 - s_1)\,[dG \, ds_1 \, ds_2]. \tag{34'}$$

Pour les surfaces à courbure constante négative $K = 1$,

$$g = \operatorname{sh}(s_2 - s_1),$$

et (34) donne

$$[dP_1 \, dP_2] = |\operatorname{sh}(s_2 - s_1)|\,[dG \, ds_1 \, ds_2]. \tag{34''}$$

Les formules (34') et (34'') sont dues à M. Haimovici [14].

BIBLIOGRAPHIE.

BARBIER (E.) :

[1] *Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert* (*Journal de Liouville*, 2e série, t. 5, 1860, p. 225-236).

BIANCHI (L.) :

[2] *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni*, N. Zanichelli, Bologna, 1928.

BLASCHKE (W.) :

[3] *Zur Variationsrechnung* (*Hamburger Abhlandungen*, Bd. 11, 1936, p. 359-366).

[4] *Vorlesung Ueber Integralgeometrie*, ed. III, Veb Detuscher Verlag der Wiss., Berlin, 1955.

[5] *Kreis und Kugel*, ed. II, V. de Gruyter, Berlin, 1955.

CARTAN (É.) :

[6] *Le principe de dualité et certaines intégrales multiples de l'espace tangentiel et de l'espace réglé* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 24, 1896, p. 140-177).

[7] *La théorie des groupes finis et continus et l'*Analysis situs (*Mémorial Sc. math.*, vol. 42, 1930).

[8] *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile*, Gauthier-Villars, Paris, 1951.

CHERN (S. S.) :

[9] *On integral geometry in Klein spaces* (*Ann. of Math.*, vol. 43, 1942, p. 178-189).

[10] *The Sc. Rep. of Nat. Tsiung Hua University*, vol. 4, 1940.

CROFTON (M. W.) :

[11] *On the theory of local probability* (*Trans. Roy. Soc. London*, vol. 158, 1868, p. 181-189).

DELTHEIL (R.) :

[12] *Probabilités géométriques*, Gauthier-Villars, Paris, 1926.

EISENHART (L. P.) :

[13] *Continuous-groups of transformations*, Dover Publ. Inc., New York, 1961.

HAIMOVICI (M.) :

[14] *Géométrie intégrale sur les surfaces courbes* (*Ann. Sc. Univ. Jassy*, t. 24, 1936, p. 57-74).

HOSTINSKI (B.) :

[15] *Sur les probabilités géométriques* (*Publ. Univ. Brno*, t. 50, 1925).

LEBESGUE (H.) :

[16] *Exposition d'un Mémoire de M. W. Crofton* (*Nouvelles Annales*, t. 12, 1912, p. 481-502).

LIE (S.) et ENGEL (F.) :

[17] *Theorie des Transformationsgruppen*, Bd. 3, Teubner, Leipzig, 1893.

MINKOWSKI (H.) :

[18] *Volumen und Oberfläche* (*Mat. Ann.*, Bd. 57, 1903, p. 447-495).

POINCARÉ (H.) :

[19] *Calcul des probabilités*, 2e éd., Gauthier-Villars, Paris, 1921.

SANTALÓ (L. A.) :

[20] *Sobre la medida cinematica en el plano* (*Abhandlungen aus dem Math. Seminar Hamburg*, Bd. 11, 1936, p. 222-236).

[21] *Ueber die kinematische Dichte in Raum* (*Act. scient. et ind.*, Hermann, Paris, 1936).

[22] *Integrale formulas in Crofton's Style on the spheres and some inequalities reffering to spherical curves* (*Duke Math. J.*, vol. 9, 1942, p. 707-722).

[23] *Integral geometry on surfaces, of constant negative curvature* (*Ibid.*, vol. 10, 1943, p. 687-704).

[24] *Integral geometry on surfaces* (*Ibid.*, vol. 16, 1949, p. 361-375).

[25] *Problemas de Geometria Integral* (*Symposium sobre algunos problemas matematicos que se están estudiando en Latino-Americo*, Montevideo, 1951, p. 23-38).

[26] *Introduction to integral geometry* (*Act. scient. et ind.*, Hermann, Paris, 1953).

STOKA (M.) :

[27] *Măsura unei mulţimi de varietăţi dintr-un spaţiu* R_n (*Bull. St. Acad. R. P. R.*, vol. 7, nº 4, 1955, p. 903-937).

[28] *Asupra măsurii mulţimii cercurilor din plan* (*Gazeta Matematică şi fizică*, Seria A, nº 10, 1955, p. 556-559).

[29] *Invarianţii integrali ai unui group Lie de transformări* (*Analele Univ. Bucureşti*, nº 20, 1958, p. 33-35).

[30] *Geometria integrale in uno spazio euclideo* E_n (*Boll. U. M. I.*, vol. 13, 1958, p. 470-485).

[31] *Asupra grupurilor* G_r *măsurabile dintr-un spaţiu* E_n (*Com. Acad. R. P. R.*, vol. 9, nº 1, 1959, p. 5-10).

[32] *Géométrie intégrale dans un espace* E (*Rev. Math. pures et appl.*, t. 4, nº 1, 1959, p. 123-156).

[33] *Mara semestv mnogoobrazii v prostranstve* Ei (*Ibid.*, t. 4, nº 2, 1959, p. 305-316).

[34] *Congruence de variétés mesurables dans un espace* E_n (*Ibid.*, t. 4, nº 3, 1959, p. 431-449).

[35] *Famiglie di varietà misurabili in uno spazio* E_n (*Rend. Circolo Mat. Palermo*, vol. 8, 1959).

[36] *Sulla misura cinematica in uno spazio euclideo* E_n (*Boll. U. M. I.*, vol. 14, 1959, p. 467-476).

[37] *Asupra grupurilor de mişcare ale spaţiilor riemanniene* V_2 *cu curbura constantă* (*Studii şi Cercetări Matematica*, vol. 11, nº 1, 1960, p. 207-228).

[38] *Geometrie integrală intr-un spaţiu riemannien* V_n (*Studii şi Cercetări de Matematică*, Cluj, vol. 11, nº 2, 1960, p. 381-395).

[39] *Das Mass der Untersysteme von Manniggaltigkeitein in einem Raum* X_n (*Rev. Math. pures et appl.*, t. 5, nº 2, 1960, p. 275-286).

[40] *Géométrie intégrale dans un espace* E_n (*Revista Matematica y Fisica Teorica*, Tucuman, vol. 14, 1962, p. 25-59).

SYLVESTER (J. J.) :

[41] *On a funicular solution of Buffon's problem of the needle* (*Acta Math.*, vol. 14, 1890, p. 185-205).

VRĂNCEANU (G.) :

[42] *Leçons de géométrie différentielle*, vol. I, Éd. Acad. R. P. R., Bucarest, 1957.

[43] *Leçons de géométrie différentielle*, vol. III, Éd. Acad. R. P. R., Bucarest, 1964.

[44] *Geometrie analitică proiectiva si diferenţială*, Éd. Didactică si Pedagogică, Bucureşti, 1962.

[45] *Asupra măsurabilităţi grupurilor Lie* (*Studii şi Cercetări Matematice*, vol. 13, nº 1, 1962, p. 7-19).

TABLE DES MATIÈRES.