MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

W. J. TRJITZINSKY

Totalisation des séries dans les espaces abstraits

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 161 (1965)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1965__161__1_0>

W. J. TRJITZINSKY
Urbana, Illinois, U. S. A.

TOTALISATION DES SÉRIES DANS LES ESPACES ABSTRAITS

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Directeur : H. VILLAT

FASCICULE CLXI

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
1965

TOTALISATION DES SÉRIES
DANS LES ESPACES ABSTRAITS.

Par M. W. J. TRJITZINSKY (1).

1. Introduction. — *Notre objet est de développer une totalisation des séries en rapport avec la totalisation* (D) *des fonctions survenant dans le travail* (T) [1] *de l'auteur.* La totalisation (D) dans (T) est une extension dans un certain espace abstrait, *sans compacticité,* des totalisations (avec compacticité) des fonctions, présentées par P. Romanovski dans (R_1) [2], (R_2) [2]. A l'origine de toutes les totalisations sont, bien entendu, les totalisations de A. Denjoy; *voir son livre* (D) [3]. Dans (D; p. 343-388) se trouve une totalisation des séries dans l'espace euclidien $\mathcal{U}_1$; cette totalisation est en rapport avec la totalisation simple (des fonctions), due à Denjoy et qui est maintenant classique; *voir,* par exemple (D; p. 327-343). Les indications qui surviennent dans (D; p. 440-465) sont utiles quand on essaie de développer une totalisation des fonctions, ou bien des séries, dans un espace abstrait. Dans la suite nous ferons usage de notre *fascicule* (T*) [4].

Dans la section 2 on introduit l'espace $\mathcal{U}$, une mesure $\varphi (\geqq 0)$, une famille $\mathcal{F} = \{E\}$ d'ensembles simplement régulière au sens de (2.1), (2.1 *a*), l'ensemble $\Delta(\mathcal{F})$, les notions de noyaux et d'enveloppes (Denjoy) et de la complète régularité de $\mathcal{F}$ au sens de (2.2). En admettant (2.4), on fait en sorte que $F = \Delta(\mathcal{F})$ soit un espace topologique au sens de (2.3). Ainsi les enveloppes et les noyaux (relativement à $\mathcal{F}$) sont respectivement les ensembles ouverts et les

(1) Cet Ouvrage a été développé avec le support complet de National Science Foundation Grant U. S. NSF-G 19834.

ensembles fermés. On admet l'existence d'une famille dénombrable $G' = \{ O' \}$ d'enveloppes satisfaisant à (2.5); F est alors *séparable.* F est distancié au sens de Fréchet, en tant qu'on suppose qu'il existe une pseudo-distance ρ satisfaisant à (2.7), (2.7 *a*) (l'inégalité triangulaire peut être en défaut). En admettant (2.8), il suit que les relations (2.9) et (2.9 *a*) sont équivalentes. Nous supposons toujours que l'espace $F = \Delta(\mathcal{F})$ est *complet*-(G') au sens de (2.10). Alors le *théorème de Cantor-Baire* (T; 4.1) aura lieu. Avec $\mathcal{F}$ complètement régulière (2.2), F satisfait au *second axiome de dénombrabilité* d'accord avec la propriété 2.12. $\mathfrak{M}$ est une famille d'ensembles fondamentaux, si $\mathfrak{M}$ satisfait à l'hypothèse 2.14. On suppose que $G' \subset \mathfrak{M}$. A la suite de l'hypothèse 2.14 on définit une *décomposition dans* $\mathfrak{M}$ d'un ensemble E; deux cas spéciaux importants sont : *décomposition-f dans* $\mathfrak{M}$ *et décomposition-$\bar{f}$ dans* $\mathfrak{M}$. Les *intégrales de Burkill* d'une fonction ψ, définie et finie dans $\mathfrak{M}$, sont spécifiées d'accord avec (2.15). Ensuite il s'agit de notions d'un point isolé-*s*, d'un ensemble parfait-*s*, de la *continuité intérieure.* Les familles d'ensembles $\mathfrak{M}'$, $\tilde{\mathfrak{M}}$ sont introduites dans (2.16), ce qui permet de spécifier la *complète additivité dans* $\tilde{\mathfrak{M}}$. En faisant emploi de ces préliminaires, on est mené à la définition (2.18) de la *totale* (D) d'une fonction. Pour nos objets sont utiles les constatations (2.19), (2.20).

Dans la section 3 nous présentons la construction effective de la totale (D) moyennant une suite transfinie de certaines opérations. La calculabilité de la totale (D) est fondée sur la relation (3.3), qui a lieu dans les circonstances indiquées; on fait intervenir une intégrale de Lebesgue et une intégrale de Burkill. Le calcul dépend aussi du caractère de l'additivité complète dans $\tilde{\mathfrak{M}}$ de la totale. La description sommaire de la suite de calculs se trouve en résumée à la fin de la section 3.

Dans la section 4 il s'agit de fonctions F définies dans la famille $\mathfrak{M}'$ (2.16), qui ne sont pas nécessairement additives dans $\tilde{\mathfrak{M}}$, telles que F(*e*) peut être distincte de o pour un $e \in (*)$ (4.1). Tout $\tilde{r}$ de $\tilde{\mathfrak{M}}$ a une décomposition (4.2) dans $\mathfrak{M}'$; tout *r* de $\mathfrak{M}$ possède une décomposition (4.2 *a*), aussi dans $\mathfrak{M}'$. Les *intégrales de* F *de Burkill modifiées* sont définies selon la définition 4.4. Cette sorte d'intégrale jouit des propriétés spécifiées dans le théorème 4.5. *L'additivité complète dans* $\tilde{\mathfrak{M}}$ d'une fonction F définie dans $\tilde{\mathfrak{M}}$ [avec F(*e*) possiblement $\neq$ o pour un $e \in (*)$] est spécifiée dans la définition 4.6. Dans la totalisation des séries (sections 5, 6, 7, 8) nous faisons usage de l'hypothèse 4.7, ce qui produit une simplification (4.8), en tant que la complète additivité dans $\tilde{\mathfrak{M}}$ entraînera la continuité intérieure dans $\mathfrak{M}$. Le lemme 4.9 est analogue au lemme 7.10 dans (T). Enfin, le lemme 4.10 est relatif à une sorte de couverture; cet énoncé joue un rôle fondamental dans notre totalisation des séries.

On considère une série de nombres u_n $(n = 1, 2, \ldots)$ et un ensemble $\theta = \{\theta_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ de points associés, d'accord avec le texte au commencement de la section 5. On admet (5.1) et l'on emploie la notation $(q)\sum \mathrm{T} u_n$ (5.2) pour *désigner la totale de la série de u_n sur un q de $\tilde{\mathfrak{M}}$*, $q \subset \mathrm{R}$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$). Enfin dans la définition 5.3 nous présentons notre définition de *la totale* $\sum \mathrm{T}$ *de la série de u_n*, en faisant intervenir l'intégrale de Burkill modifiée et des séries absolument convergentes. Le premier résultat, qui est fondamental, pour la totale de la série de u_n est qu'elle est *unique* (théorème 5.4); on établit cet énoncé moyennant le lemme 4.10. On vérifie que cette totale jouit des propriétés (5.6)-(5.6 *d*). Ensuite nous démontrons (théorème 5.7) que, si la série de u_n est absolument convergente, la série est totalisable et vaut la totale.

Dans la section 6, en admettant l'hypothèse 4.7, nous introduisons une définition d'une *totale des séries, au sens modifié* (définition 6.5). Selon (6.6), si l'ensemble $\theta = \{\theta_n\}$ est clairsemé, les deux définitions de la totale des séries sont équivalents. R désignant un ensemble fixe de $\mathfrak{M}$, soit p parfait-s et joint à R; supposons, comme dans (6.8), que la totale F est connue pour tout ρ de $\mathfrak{M}$, contenu dans R et avec sa fermeture disjointe de p; alors (6.9) $\mathrm{F}(\rho)$ sera connue pour tout ρ de $\mathfrak{M}$, contenu dans R et disjoint de p; on introduit l'ensemble p_1 (6.8 *c*), qui est *fermé* dans R et est *non dense* sur Rp; selon (6.10), la totale F sera calculable [d'accord avec (6.10 *a*)-(6.10 *b*)] pour tout $\tilde{r}$ de $\tilde{\mathfrak{M}}$ contenu dans $\mathrm{R} - p_1$; le calcul fait intervenir des séries absolument convergentes et l'intégrale de Burkill modifiée. Soit p^* le *noyau parfait-s* dans R de p_1. Alors en procédant transfiniment, comme spécifié dans le texte en rapport avec (6.11)-(6.14), on résout effectivement le problème de la totalisation pour tout ensemble de $\tilde{\mathfrak{M}}$ dans $\mathrm{R} - p^*$. Nous désignons par (*) l'opération qui à partir de p, ou bien à partir de p_1 (6.8 *c*) donne l'ensemble p^*; ainsi

$$p^* = (p)^* = (p_1)^*;$$

les procédés (6.8)-(6.14) constituent un calcul effectif de la totale-série dans $\mathrm{R} - p^*$, quand on connaît la totale dans $\mathrm{R} - p$, ou bien dans $\mathrm{R} - p_1$. $\mathrm{R} = \mathrm{P}_0$ est parfait-s dans R. En rapport avec (6.16) on introduit l'ensemble $P_{0,1}$, fermé dans R et non dense sur P_0. Une suite transfinie (6.17) d'ensembles est obtenue

$$R = P_0 > P_{0,1} \geqq \ldots \geqq P_{\alpha,1} \geqq P_{\alpha+1} > \ldots;$$

ici $P_{\beta+1} = (P_\beta)^*$ (β de première espèce), $P_{\beta,1} = \prod (\alpha < \beta) P_{\alpha,1}$ (β de seconde espèce), $P_{\alpha+1} = (P_{\alpha,1})^*$; pour $\beta > 0$ de première espèce $P_{\beta,1}$ est définie comme $P_\beta - \sum \rho_i P_\beta$, en rapport avec (6.17 *a*); $P_{\alpha+1}$ est le noyau parfait-*s* dans R de $P_{\alpha,1}$. Les $P_{\alpha,1}$ sont fermés dans R. Pour un α' (des classes I, II) $P_{\alpha',0} = 0$. Comme indiqué à la suite de (6.17 *a*), la totale-série est calculée successivement dans les $R - P_{\alpha,1}$. *Pour* $\alpha = \alpha'$ *la suite d'opérations est terminée et la totale-série est calculée dans* R.

Dans les sections 7, 8 *nous admettons l'hypothèse de compacticité au sens que les fermetures d'ensembles de* $\mathfrak{M}$ *sont compactes.* Dans ces sections nous entreprenons une transformation de la totale (D) d'une fonction $f(x)$ (de point) en une *totale-série.* On désigne (7.1) par $\psi(r)$ la totale (D) sur r d'une fonction $f(x)$, totalisable (D) sur un R de $\mathfrak{M}$; r (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset$ R. L'hypothèse 4.7 est admise pour simplifier les développements qui suivent. Les ensembles (**) sont spécifiés selon la définition 7.2. On introduit une famille $\mathcal{F}_0 = \{q_{0,j}\}$ (7.3) d'ensembles $q_{0,j}$ (de $\mathfrak{M}$) disjoints, tels que (6_1) ait lieu, $P_{0,1}$ étant défini dans (2_1). Il vient (7.4) pour tout $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset R - P_{0,1}$. L'énoncé (7.5) est utile ensuite. P_1 désignant le noyau parfait-*s* de $P_{0,1}$, il en résulte que $R - P_1$ possède la décomposition (7.6) et $\psi(\tilde{r})$ a la représentation (7.6 *a*) dans $R - P_1$. $P_{1,1}$ (9_1) est défini en rapport avec (8_1). Moyennant les procédés (10_1)-(13_1) on obtient une famille $\mathcal{F}_1$ (7.8) d'ensembles $q_{0,j}$, $P_1 p_{1,i}$, qui interviennent dans les décompositions (infinies) de $R - P_{1,1}$ (13_1) et de $R - P_2$ (7.7 *a*). Dans le texte qui suit jusqu'à (7.12 *b*) on obtient progressivement une suite transfinie croissante de familles

$$\mathcal{F}_\beta = \{q_{0,j}\} + \sum (1 \leqq \alpha \leqq \beta) \{P_\alpha p_{\alpha,j}\}$$

[β des classes I, II; $P_\alpha p_{\alpha,j}$ vide pour α de seconde espèce];

$$\mathcal{F}_{\alpha+1} = \mathcal{F}_\alpha + \{P_{\alpha+1} p_{\alpha+1,j}\}.$$

Les ensembles $R - P_{\alpha,1}$, $R - P_{\alpha+1}$ sont représentables dans la forme $S(\mathcal{F}_\alpha) + (^{**})$. Pour un α' (de la première espèce), il vient $P_{\alpha'-1,1} \geqq P_{\alpha'} > P_{\alpha',1}$, où $P_{\alpha',1}$ est mince;

$$R = S(\mathcal{F}_{\alpha'}) + E', \qquad \text{avec} \quad E' = P_{\alpha',1} + (^{**}).$$

Les nombres à totaliser sont les fonctions $v_{\alpha,j}(\tilde{r}) = (\mathrm{L})\int f\,d\varphi$ [l'intégration lebesguienne sur $\tilde{r}\mathrm{P}_\alpha p_{\alpha,j}$; $p_{0,j} = q_{0,j}$], où $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset \mathrm{R}$ et $0 \leqq \alpha \leqq \alpha'$ (α de première espèce); on considère seulement les $v_{\alpha,j}$ pour lesquelles $\varphi(\mathrm{P}_\alpha p_{\alpha,j}) > 0$. On choisit dans chaque $\mathrm{P}_\alpha p_{\alpha,j}$ épais un point $\theta_{\alpha,j}$ (dorénavant associé avec cet ensemble) et l'on dirige les développements, qui donnent éventuellement la famille $\mathcal{F}_{\alpha'}$, de sorte que les propriétés (7.15)-(7.15 *d*) aient lieu. La réalisation de celles-ci est d'accord avec ce que Denjoy exige pour toute totalisation des séries [D; p. 447, 448] et tant que nous allons totaliser la série dont les termes sont les $v_{\alpha,j}(\tilde{r}) = v_n(\tilde{r})$. Dans l'énoncé (7.17) on montre que, si E fermé est contenu dans $\mathrm{P}_{\alpha-1,1} - \mathrm{P}_{\alpha,1}$ (pour un α de première espèce), les $\bar{p}_{\beta,j}$ joints à E [avec $\varphi(\mathrm{P}_\beta p_{\beta,j}) > 0$] sont en nombre fini. Comme une conséquence (7.19), on déduit le fait capital que *l'ensemble de points* $\theta_n [= \theta_{\beta,j} \in \mathrm{P}_\beta p_{\beta,j} = \omega_n;\ 1 \leqq n < \omega]$ *est clairsemé.* Pour simplifier, nous supposons (7.20) que les θ_n peuvent être choisis de sorte que toute frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}$ contient les θ_n en nombre fini (ou bien est dépourvue des θ_n); on peut réaliser cette situation au moins dans l'espace euclidien $\mathfrak{U}_k$ à k dimensions, lorsque $\mathfrak{M}$ consiste d'intervalles à k dimensions. Dans (7.21) on établit une propriété de tout ensemble $p(\subset \overline{\mathrm{R}})$ parfait-*s*.

Nous posons

$$\mathrm{F}(q;\ h) = (q)\sum \mathrm{T}\,v_n(h) \qquad \text{pour} \quad h \subset \mathrm{R},$$

mesurable et q (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset \mathrm{R}$, lorsque la totale-série existe (notation 8.1). Les ω_n ($1 \leqq n < \omega$) étant les ensembles de $\mathcal{F}_{\alpha'}$ et q (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset \mathrm{R}$, définissons $f_q(x) = 0$ (sur $\omega_{n'}$ avec $\theta_{n'} \in \mathrm{R} - q$), $f_q(x) = f(x)$ ailleurs. Si $f_q(x)$ est totalisable-(D) sur un $\tilde{r}_0$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset \mathrm{R}$, pour un q (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset \mathrm{R}$, nous écrivons

$$\psi(q;\tilde{r}) = (\mathrm{D})\int_{\tilde{r}} f_q(x)\,d\varphi(x)$$

[pour tout $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset \tilde{r}_0$] (8.2 *b*). Selon l'énoncé (8.3), si la totale-(D) $\psi(q;\tilde{r}_0)$ existe pour un $\tilde{r}_0$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset \mathrm{R}$ et pour tout q (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset \mathrm{R}$, il suit que

$$\psi(q;\tilde{r}_0) = \mathrm{F}(q;\tilde{r}_0)$$

e. g. $\psi(q;\tilde{r}_0)$ est la totale-série sur q de $v_n(\tilde{r}_0)$, cela étant pour tout q (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset \mathrm{R}$. Cela se démontre en faisant usage de la définition 6.5

de la totale-série, qui s'applique dans les conditions de la section 7, en tant que les θ_n ont une disposition clairsemée.

D'abord nous établissons (8.4) que $\psi(q; \tilde{r}) = F(q; \tilde{r})$ pour $\tilde{r}$ (de $\mathfrak{M}$) $\subset R - P_{0,1}$ et pour tout q (de $\mathfrak{M}$) $\subset R$; puis on montre (8.4 *a*) que

$$\psi(q; \tilde{r}) = F(q; \tilde{r}) \quad \text{dans } R - P_1.$$

Ensuite, dans (8.5)-(8.7), nous indiquons le procédé progressif pour réaliser la transformation en une totale-série (dans R), en suivant *la méthode générale formulée par Denjoy* (D; p. 374) *pour ses totalisations dans l'espace euclidien* $\mathfrak{U}_1$.

Quelques questions restent. Il serait intéressant d'examiner si, dans la transformation de la totale-(D) de fonction en une totale-série, on pourrait remplacer la compacticité des fermetures d'ensembles de $\mathfrak{M}$ (comme on l'a admise dans les sections 7, 8) par une hypothèse plus faible. Un autre problème, que nous n'avons pas abordé, est de transformer notre totale-série en la totale (D) d'une fonction. Pourtant, la dernière question a été résolue par A. Denjoy dans l'espace euclidien $\mathfrak{U}_1$. Des difficultés très grandes additionnelles surviennent dans les espaces abstraits.

2. **Les préliminaires pour la totalisation (D).** — Nous allons nous occuper de la *totalisation* (D) (T; sections 7, 8, 9, 10). Dans les sections 2, ..., 6 dans (T) nous avons introduit dans l'espace $\mathfrak{U}$, considéré, des préconditions topologiques pour qu'il soit possible de développer des totalisations telles que (D) [et en effet aussi la totalisation symétrique (S), décrite dans T; sections 11, ..., 15]. Dans $\mathfrak{U}$ on a une famille complètement additive d'ensembles; correspondamment dans cette famille est donnée une mesure φ non négative (avec les propriétés de la complète additivité et de soustractivité). Si $\varphi(E) = 0$ et $E_1 \subset E$, on a $\varphi(E)_1 = 0$. On envisage une famille $\mathcal{F} = \{E\}$ d'ensembles E *simplement régulière* (T*; définition 11.5) :

$$(2.1)\quad 0 < \varphi(E) < +\infty; \qquad \varphi(S(\mathcal{F})) < \infty \qquad \left[S(\mathcal{F}) = \sum (\mathcal{F}) E\right];$$

(2.1 *a*) Toute réunion, même indénombrable, d'ensembles de $\mathcal{F}$ est mesurable.

$\Delta(\mathcal{F})$ est l'ensemble des points *indéfiniment couverts* par ($\mathcal{F}$) [définition T; (2.2)]. Les *noyaux* et les *enveloppes*, relativement à la famille simplement régulière $\mathcal{F}$, sont définis selon le texte qui se rapporte à [T; (2.3)]. On dira que $\mathcal{F}$ est *complètement régulière*, si $\mathcal{F}$

est simplement régulière et si à tout X, $\subset \Delta(\mathcal{F})$, mesurable et à tout $\varepsilon > 0$ on peut associer un noyau Y, tel que

$$(2.2) \qquad Y \subset X, \qquad \varphi(X - Y) < \varepsilon.$$

On dira qu'un espace F est *topologique*, si dans F il existe une famille $G = \{O\}$ d'ensembles O, dits « ouverts », satisfaisant aux cinq conditions :

$$(2.3) \qquad [T; (2.5\,a), (2.5\,b), (2.5\,c), (2.5\,d), (2.5\,e)]$$

[d'accord avec le livre de H. Hahn et A. Rosenthal, *Set functions*, 1948]. Pour qu'on puisse considérer l'ensemble $F = \Delta(\mathcal{F})$ (où $\mathcal{F}$ est au moins simplement régulière) comme un espace topologique au sens indiqué, avec les enveloppes (relativement à $\mathcal{F}$) jouissant du rôle d'ensembles ouverts, nous faisons l'hypothèse :

(2.4) *La famille* $G = \{O\}$ *d'enveloppes possède les caractères* [T; (2.5 *d*), (2.5 *e*)].

On note que les propriétés [T; (2.5 *a*), (2.5 *b*), (2.5 *c*)] sont satisfaites d'elles-mêmes. Maintenant on voit que les noyaux sont identiques avec les ensembles fermés, situés dans F. L'hypothèse [T; (2.8)] se rattache à la *séparabilité* et elle est la suivante :

(2.5) Il existe une famille *dénombrable* $G' = \{O\}$ d'enveloppes (e. g. d'ouverts) épaisses, telles que :

1° $\Delta(G') = F\ (= \Delta(\mathcal{F}))$, et

2° Si O est un ouvert ($\subset F$) et un point $x \in O$, il existe un nombre $\eta = \eta(x, O) > 0$ de sorte que

$$O' \in G', \qquad O' \ni x, \qquad \varphi(O') < \eta \qquad \text{entraînent} \quad \overline{O'} \subset O.$$

Comme une conséquence, on voit que

(2.6) F *est un espace séparable* (e. g. tout ensemble infini H, $\subset F$, contient un h dénombrable tel que $\overline{h} = \overline{H}$).

Si x_1, x_2 (dans F) sont des points tels que des O de G′ (2.5) contenant x_1, x_2 existent, on définit le nombre

$$(2.7) \qquad \rho(x_1, x_2) = \inf \varphi(O) \qquad (O, \text{ de } G', \text{ contenant } x_1, x_2);$$

on suppose que

$$(2.7\,a) \qquad \rho(x_1, x_2) > 0 \qquad \text{dès que} \quad x_1 \neq x_2 \quad \text{et} \quad \rho(x_1, x_2) \text{ existe.}$$

En tant que nous ferons usage de la totalisation (D) et non pas de la totalisation (S) on peut laisser la condition (T; 3.1 *c*) de continuité de $\rho(x_1, x_2)$ de côté. $\rho(x_1, x_2)$ en général ne satisfait pas à l'inégalité triangulaire; c'est une pseudo-distance; l'espace $F = \Delta(\mathcal{F})$ est ainsi distancié au sens de Fréchet.

Or, pour pouvoir totaliser, il faut le théorème de Cantor-Baire; pour achever cela on devrait faire en sorte que l'espace F soit complet au sens approprié (il est déjà séparable). Ayant cet objet en vue nous introduisons l'hypothèse (T; 3.9) :

(2.8) A tout couple d'ensembles A, B joints de G′ (2.5), il correspond un C de G′, tel que $C \supset A + B$, de sorte que

$$\varphi(A + B) \to 0 \qquad \text{entraîne} \quad \varphi(C) \to 0.$$

Si x_n ($n = 1, 2, \ldots$) et x sont des points de F, on dira que

$$(2.9) \qquad x_n \sim (G')\, x \qquad (x_n \text{ tend vers } x \text{ au sens de } G'),$$

si des O'_n de G′ existent tels que

$$O'_n \ni x, \qquad O'_n \ni x_n, \qquad \varphi(O'_n) \to 0;$$

ceci équivaut à

$$(2.9\,a) \qquad \rho(x, x_n) \to 0.$$

On dira que l'espace $F = \Delta(\mathcal{F})$ est *complet*-(G′), si

$$(2.10) \quad \lim_{n, m \to \infty} \rho(x_n, x_m) = 0 \qquad \text{entraîne} \quad x_n \sim (G')\, x \quad [(2.9), (2.9\,a)].$$

Dans la suite $F = \Delta(\mathcal{F})$ sera toujours séparable et complet-(G′) au sens indiqué. Comme une conséquence, on vérifie que

$$F_n \text{ fermé}, \neq 0, \qquad F_n \subset F, \qquad F_1 \supset F_2 \supset \ldots, \qquad \rho(F_n) \to 0$$

entraînent $\prod F_n$ est un seul point [ici $\rho(A) = \sup \rho(x_1, x_2)$ $(x_1, x_2 \in A)$]. De plus, *le théorème de Cantor-Baire* (T; 4.1) *a lieu;* e. g. toute suite bien ordonnée non croissante d'ensembles ($\subset F$) fermés se stabilise à partir d'un nombre transfini de classe I ou de classe II. On peut envisager la notion d'ensembles *clairsemés*; pour ceux-ci les théorèmes (T; 4.2, 4.3) ont lieu.

La famille $\mathcal{F}$ étant toujours complètement régulière (2.2), on voit que, si H ($\subset F$) est mesurable et $\varepsilon > 0$ est donné, il existe un ensemble ouvert O et un ensemble fermé Q de sorte que

$$(2.11) \qquad Q \subset H \subset O, \qquad \varphi(O - Q) < \varepsilon.$$

PROPRIÉTÉS 2.12. — $F = \Delta(\mathcal{F})$ satisfait au second axiome de dénombrabilité au sens que G′ (2.5) est « une famille dénombrable complète de voisinages » e. g. *à tout* O ($\subset$F) *ouvert il correspond une suite d'ensembles* O_j *de* G′ *tels que* $O = \sum O_j$. De plus, *tout ensemble fermé,* $\subset$F, *est l'intersection d'une suite non croissante d'ensembles ouverts.*

Dans la totalisation (D) survient une *famille* $\mathfrak{M}$ *d'ensembles fondamentaux. Ces ensembles seront désignés, sauf avis contraire, par* (2.12) R, *r*, ρ, avec ou sans indices supérieurs ou inférieurs.

Les ensembles de $\mathfrak{M}$ *sont ouverts,* contenus dans $F = \Delta(\mathcal{F})$, épais; nous admettons dans l'Ouvrage actuel que

$$G'\ (2.5) \subset \mathfrak{M} \tag{2-13}$$

et que $\mathfrak{M}$ satisfait aux conditions (1°), ..., (9°) de (T; hypothèse 7.4); les voici :

HYPOTHÈSE 2.14. — 1° Les R sont ouverts;

2° Si $r \subset R$, il y a une *décomposition-f dans* $\mathfrak{M}$ de R, dont *r* est un composant;

3° Si $R_1 R_2 \neq 0$, $R_1 R_2$ aura une décomposition-*f* dans $\mathfrak{M}$;

4° Toute *décomposition dans* $\mathfrak{M}$ de R est une décomposition-*f* dans $\mathfrak{M}$; si un R et un $\varepsilon > 0$ sont donnés, il y a une décomposition-*f* dans $\mathfrak{M}$ de R, dont les composants sont de mesure $< \varepsilon$;

5° Si $\{r_j\}$ est une décomposition-*f* dans $\mathfrak{M}$ de *r* et $r_j \subset R$, $r \subset R$;

6° R et $\varepsilon > 0$ étant donnés, on peut trouver un *r* et un ρ de sorte que

$$\bar{r} \subset R, \qquad \bar{R} \subset \rho, \qquad \varphi(R - r) < \varepsilon, \qquad \varphi(\rho - R) < \varepsilon;$$

7° un H ($\subset$F) fermé et un $\varepsilon > 0$ étant donnés, on peut trouver un O ouvert et un $\delta = \delta(\varepsilon, H, O) > 0$, de sorte que $O \supset H$, $\varphi(O - H) < \varepsilon$, tandis que $\bar{r} H \neq 0$, $\varphi(r) < \delta$ entraînent $r \subset O$. Soient un *r* et un point *y*, $\in r$, donnés; alors il existe un $r_0 \ni y$, $\bar{r}_0 \subset r$, et un $\sigma = \sigma(r, r_0, y) > 0$ tels que $\bar{\rho} . \bar{r}_0 \neq 0$, $\varphi(\rho) < \sigma$ entraînent $\rho < r$;

8° Deux constantes $1 < a < b$ existent de sorte que, E ($\subset$F) étant fermé, les relations *r* (fixe) $\subset$E, ρ (variable) $\subset$E, $\bar{r} . \bar{\rho} \neq 0$, $\varphi(\rho) < a\,\varphi(r)$ entraînent $\varphi_e\left(\sum \bar{\rho}\right) < b\,\varphi(r)$;

9° Les relations

$$\varphi(r) \to 0, \qquad \rho(r) = \sup \rho(x_1, x_2)\ (x_1, x_2 \in r) \to 0$$

s'équivalent.

Une *décomposition dans* $\mathfrak{M}$ d'un E veut dire

$$E = E_0 + R_1 + \ldots + R_m, \qquad \varphi(E_0) = 0,$$

les ensembles au second membre étant disjoints; on dit que $\{R_j\}$ est une décomposition dans $\mathfrak{M}$ de E. Une telle décomposition s'appelle *décomposition-f dans* $\mathfrak{M}$, si E_0 est contenu dans les frontières des R_j. Une décomposition dans $\mathfrak{M}$ d'un E sera dite *décomposition-$\tilde{f}$ dans* $\mathfrak{M}$, si E_0 est contenu dans une réunion finie des frontières d'ensembles de $\mathfrak{M}$ (comprenant possiblement les frontières de quelques ensembles de $\mathfrak{M}$ qui ne sont pas parmi les R_j). Si $S = \{r_j\}$ est un système fini d'ensembles (dans $\mathfrak{M}$) disjoints, on pose

$$M(S) = \sup_j \varphi(r_j), \qquad \varphi(S) = \sum \varphi(r_j),$$

$\left[\text{aussi } \psi(S) = \sum \psi(r_j), \text{ si } \psi \text{ est définie dans } \mathfrak{M}\right]$. Si $\psi(r)$, possiblement non additive, est définie et finie pour tout $r \in \mathfrak{M}$, on peut envisager les intégrales sup, inf et exacte de ψ, au sens de Burkill, ainsi

$$(2.15) \qquad \overline{\int_r} \psi = \overline{\lim}\, \psi(S), \qquad \underline{\int_r} \psi = \underline{\lim}\, \psi(S), \qquad \int_r \psi = \lim \psi(S)$$

(si lim ... existe) pour $M(S) \to 0$, $S = \{r_j\}$ étant une décomposition variable dans $\mathfrak{M}$ de r et $\psi(S) = \sum \psi(r_j)$.

Un point x d'un ensemble E ($\subset F$) est dit *isolé* (dans E) *au sens spécial*, ou bien *isolé-s* (dans E), s'il existe un ensemble O ouvert, tel que $O \ni x$ et EO est contenu dans la frontière d'un r. Un ensemble p ($\subset F$) est *parfait-s*, si p est fermé et dépourvu de points isolés-s dans p.

On dira que ψ (définie dans $\mathfrak{M}$) est *intérieurement continue pour un* r, si un $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ correspond à tout $\varepsilon > 0$ de sorte que $r' \subset r$ et $\varphi(r - r') < \eta$ entraînent $|\psi(r) - \psi(r')| < \varepsilon$; ψ est *intérieurement continue sur un* R, si ψ est intérieurement continue pour tout $r \subset R$.

D'accord avec (T; définition 7.7) nous introduisons *les familles* $\mathfrak{M}'$, $\tilde{\mathfrak{M}}$ comme il suit.

(2.16) *$\mathfrak{M}'$ est la famille de tous les ensembles $r + e$, où $r \in \mathfrak{M}$ et e quelconque est dans $\bar{r} - r$; $\tilde{\mathfrak{M}}$ est la famille minimale contenant $\mathfrak{M}'$*, telle que, si $\tilde{r}_1$ et $\tilde{r}_2$ sont dans $\tilde{\mathfrak{M}}$, $\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2$, $\tilde{r}_1 \tilde{r}_2$, $\tilde{r}_1 - \tilde{r}_1 \tilde{r}_2$ (si non vides) seront dans $\tilde{\mathfrak{M}}$.

(2.17) Tout sous-ensemble de $\bar{r} - r$ est mince-φ. On dira qu'une fonction finie ψ, *définie dans $\tilde{\mathfrak{M}}$ et s'annulant pour tout sous-ensemble* *de la frontière d'un ensemble de* $\mathfrak{M}'$ (de $\mathfrak{M}$), *est complètement additive dans* $\tilde{\mathfrak{M}}$, si $H \in \tilde{\mathfrak{M}}$, $H_n \in \tilde{\mathfrak{M}}$, les H_n $(n = 1, 2, \ldots)$ disjoints,

$$H = H_1 + H_2 + \ldots \qquad \text{entraînent} \quad \psi(H) = \sum \psi(H_n);$$

e. g., si $\tilde{r}_n$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\uparrow$ un $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$), il vient $\psi(\tilde{r}_n) \to \psi(\tilde{r})$.

La définition de la totale (D) (T; définition 7.12) est la suivante.

(2.18) *Une* $f(x)$, *définie (et finie) sur une plénitude d'un* R *(de* $\mathfrak{M}$*) est dite totalisable* (D) *sur* R, *s'il existe une* ψ *complètement additive dans* $\tilde{\mathfrak{M}}$ *sur* R (2.17), *intérieurement continue dans* $\mathfrak{M}$ *sur* R *de sorte que, si* p *est parfait-s et* r *(de* $\mathfrak{M}$*),* $\subset$ R, *est joint à* p, *il existe un* $r' \subset r$ *joint à* p *tel que pour tout* $r_1 \subset r'$ *on ait*

$$(2.18\,a) \quad \int_{r_1} \psi_p = (\mathrm{L}) \int_{r_1 p} f(x)\, d\varphi(x), \qquad \text{avec} \quad \psi_p(\rho) = \begin{cases} \psi(\rho) & (\text{si } \bar{\rho} p \neq 0), \\ 0 & (\text{si } \bar{\rho} p = 0), \end{cases}$$

(L) $\int \cdots$ *désignant une intégrale de Lebesgue. Le résultat du calcul de* ψ(R) *à partir de* $f(x)$ *totalisable* (D) *sur* R *est la totale* (D) *de* $f(x)$ *sur* R

$$\psi(\mathrm{R}) = (\mathrm{D}) \int_{\mathrm{R}} f(x)\, d\varphi(x).$$

On voit que *tout ensemble* $\tilde{r}$ *de* $\tilde{\mathfrak{M}}$ *possède une décomposition-*$\tilde{f}$ *dans* $\mathfrak{M}$, e. g.

$$(2.19) \qquad \tilde{r} = \sum_{i=1}^{k} r_i + e_0, \quad \text{les } r_i \text{ (de } \mathfrak{M}) \text{ étant disjoints,}$$

où e_0 est contenu dans la réunion d'un nombre fini des frontières d'ensembles de $\mathfrak{M}$. Notons encore (T; lemme 7.10) :

(2.20) *Soient une famille* $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ *et un* $\tilde{r}$ *dans* $\tilde{\mathfrak{M}}$, *tels que* $\tilde{r} \subset \sum(\mathfrak{N})\,\rho$. *Alors des* $\tilde{\rho}_\nu$, *disjoints, de* $\tilde{\mathfrak{M}}$ *et des* r_ν *de* $\mathfrak{N}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *existent de sorte que*

$$(2.20\,a) \qquad \tilde{r} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \tilde{\rho}_\nu, \qquad \tilde{\rho}_\nu \subset r_\nu$$

[nécessairement tout $\tilde{\rho}_\nu$ possède une décomposition-$\tilde{f}$, dans $\mathfrak{M}$, soit

$$\tilde{\rho}_\nu = \sum_{i=1}^{k_\nu} r_{\nu, i} + e_\nu,$$

e_ν étant le composant situé dans un nombre fini des frontières d'ensembles de $\mathfrak{M}$ et les $r_{\nu,i}$ ($\in \mathfrak{M}$) étant disjoints$\Big]$.

Dans les conditions qu'on vient de donner, si ψ est complètement additive dans $\tilde{\mathfrak{M}}$, on aura

$$\psi(\tilde{r}) = \sum_\nu \psi(\tilde{\rho}_\nu) = \sum_\nu \left[\sum_{i=1}^{k_\nu} \psi(r_{\nu,i}) \right], \tag{2.20 b}$$

Les énoncés principaux relativement à la totale (D) sont compris dans (T) comme il suit :

Théorème 7.13; (7.13 *a*), (7.13 *b*), (7.13 *c*), (7.13 *d*), (7.13 *e*); théorème 8.8; (9.6); (9.10); (10.3); (10.4); (10.5); théorème 10.6; théorème 10.8; (10.9); théorème 10.11; théorème 10.13.

3. **Succession transfinie des calculs d'une totale (D).** — Si ψ est une fonction quelconque d'ensemble de $\mathfrak{M}$ et p est fermé, posons

$$\psi^p(r) = \begin{cases} \psi(r) & (\text{si } \bar{r}p = 0), \\ 0 & (\text{si } \bar{r}p \neq 0), \end{cases} \tag{3.1}$$

d'où

$$\psi^p(r) = \psi(r) - \psi_p(r) \quad (2.18\, a),$$

pour tout r de $\mathfrak{M}$. *Soit $f(x)$ une fonction totalisable* (D) *sur un* R *particulier de* $\mathfrak{M}$. Selon la définition (2.18), à la fonction $f(x)$ il correspond une fonction ψ, définie dans $\tilde{\mathfrak{M}}$ sur R, avec les propriétés y indiquées, de sorte que

$$\psi(\mathrm{R}) = (\mathrm{D})\int_{\mathrm{R}} f(x)\, d\varphi(x);$$

d'après le théorème (T; 7.13), cette ψ *est unique.* Il s'ensuit que :

(3.2) *f est totalisable*-(D) *sur tout r* ($\in \mathfrak{M}$) $\subset$ R et

$$\psi(r) = (\mathrm{D})\int_r f(x)\, d\varphi(x) \quad \text{pour tout tel } r;$$

$\psi(r)$ est complètement additive dans $\tilde{\mathfrak{M}}$ et intérieurement continue sur R.

En plus, en raison de (2.18), *si p est parfait-s, joint à* R, *à tout r* ($\in \mathfrak{M}$) $\subset$ R, *joint à p, il correspond un r', $r'p \neq 0$, $r' \subset r$, tel que sur r' on ait* (2.18 *a*) $\Big[f$ sera sommable sur $r'p$ et l'intégrale de

Burkill $\int \psi_p$ sera définie sur r']; en tenant compte de la seconde relation (3.1), il vient

$$\int_{r_1} \psi_p = \int_{r_1} [\psi - \psi^p] = \psi(r_1) - \int_{r_1} \psi^p,$$

d'où

$$(3.3) \qquad \psi(r_1) = (\mathrm{L}) \int_{r_1 p} f\,d\varphi + \int_{r_1} \psi^p \qquad (\text{pour tout } r_1, \in \mathfrak{M}, \subset r').$$

L'intégrale de Burkill au second membre est calculable, si l'on sait la totale-(D) *de* f *sur tout* r *(de* $\mathfrak{M}$*), pour lequel* $r \subset \mathrm{R}$ *et* $\bar{r}p = 0$ [rappelons-nous qu'à présent f est supposée totalisable (D) sur R].

Il n'y a aucune perte de généralité, si l'on suppose que R est contenu dans un ensemble parfait-s. Par conséquent, *tout* r (de $\mathfrak{M}$), *contenu dans* R, *contient un* r' (de $\mathfrak{M}$) *sur lequel* f *est sommable et*

$$(3.3\,a) \qquad \psi(r_1) = (\mathrm{L}) \int_{r_1} f\,d\varphi \qquad (\text{tout } r_1, \in \mathfrak{M}, \subset r')$$

[en prenant un p parfait-s, $p \supset \mathrm{R}$, l'énoncé en rapport avec (3.3) s'applique avec $\psi^p = 0$].

Ayant en vue la constatation relativement à (3.3), désignons par $\mathfrak{N} = \{\rho_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ la famille de *tous* les ensembles de G′ (2.5) ($\subset \mathfrak{M}$) tels que

$$(3.4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \rho_i \subset \mathrm{R}, \qquad \rho_i p \neq 0, \qquad \psi(\rho) = (\mathrm{L}) \displaystyle\int_{\rho p} f\,d\varphi + \int_{\rho} \psi^p \\ \qquad\qquad\qquad (\text{tout } \rho, \in \mathfrak{M}, \subset \rho_i). \end{array} \right.$$

Si un r (de $\mathfrak{M}$), $\subset \mathrm{R}$, est joint à p, il existe un r' (de $\mathfrak{M}$), $\subset r$ et joint à p, pour lequel (3.3) a lieu; soit x un point sur $r'p$; on pourra trouver un ρ' de G′, tel que $\rho' \ni x$ et $\rho' \subset r'$; nécessairement ρ' est un des ρ_i dont il s'agit dans (3.4), e. g. $\rho' \in \mathfrak{N}$. Ainsi tout r (de $\mathfrak{M}$), $\subset \mathrm{R}$, joint à p contient un ρ' de $\mathfrak{N}$; donc $\sum \rho_i p$ est partout dense sur $\mathrm{R}p$; par conséquent,

(3.4 *a*) $p_1 = \mathrm{R}p - \sum \rho_i p$ *est fermé dans* R *et non dense sur* $\mathrm{R}p$.

Ayant (3.3)-(3.4 *a*) en vue, supposons que

(3.5) la totale $\psi(r)$ a été calculée pour tout r (de $\mathfrak{M}$) $\subset \mathrm{R}$, avec $\bar{r}p = 0$. Alors les intégrales de Burkill dans (3.3), (3.4) seront calculables.

(3.6) *Si* (3.5) *a lieu, on pourra calculer* $\psi(r_0)$ *pour tout* r_0 (de $\mathfrak{M}) \subset \mathrm{R}$, *tel que* $r_0 p = 0$, *moyennant une opération qui traduit la propriété de la continuité intérieure de* ψ.

En effet, r_0 étant indiquée de la sorte, d'après l'hypothèse (2.14, 6°), il existe un r_n de $\mathfrak{M}$ tel que $\bar{r}_n \subset r_0$, $\varphi(r_0 - r_n) < \frac{1}{n}$; $\psi(r_n)$ sera connue, puisque $\bar{r}_n p = 0$; en vertu de la continuité intérieure de ψ, il vient

$$(3.6\,a) \qquad \psi(r_0) = \lim_{n=\infty} \psi(r_n),$$

ce qui vérifie (3.6). Revenons maintenant à l'ensemble p_1 (3.4 *a*). Si x est un point dans $\mathrm{R} - p_1$ (ouvert), e. g. dans $(\mathrm{R} - \mathrm{R}p) + \sum \rho_\iota p$, deux cas peuvent se présenter :

$$(1^\circ) \quad x \in \mathrm{R} - \mathrm{R}p; \qquad (2^\circ) \quad x \in \mathrm{R}p - p_1 = \sum \rho_\iota p.$$

Au cas (1°), d'après (3.5), (3.6), il existe un ρ de G' tel que :

(1_0) $\rho \ni x$, $\rho \subset \mathrm{R} - \mathrm{R}p$, d'où $\psi(\rho)$ est connue.

Dans le cas 2° :

(2_0) un ρ_ι (de $\mathfrak{N}) \ni x$, d'où (3.4) a lieu et $\psi(\rho_\iota)$ est connue.

Soit $\mathfrak{N}' = \{\rho^k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ la famille de *tous* les ensembles de G' (2.5) tels que $\rho^k \subset \mathrm{R} - \mathrm{R}p$; l'ensemble ρ dans (1_0) est un ρ^k; par là (3.7) $\mathfrak{N}'$ couvre $\mathrm{R} - \mathrm{R}p$; les $\psi(\rho^k)$ sont connues [(3.5), (3.6)].

D'autre part, (3.4 *a*) $\mathfrak{N} = \{\rho_\iota\}$ couvre $\mathrm{R}p - p_1$, tandis que les $\psi(\rho_\iota)$ sont calculées moyennant (3.4). On observe que

$$(3.7\,a) \qquad \mathfrak{N} + \mathfrak{N}' \quad (\subset \mathrm{G}' \subset \mathfrak{M}) \text{ couvre } \mathrm{R} - p_1.$$

Maintenant on peut établir la proposition suivante :

(3.8) *Soit p parfait-s*, $p\mathrm{R} \neq 0$; $\mathrm{R}p$ *contient un ensemble* p_1 (3.4 *a*) *fermé dans* R *et non dense sur* $\mathrm{R}p$; *admettons* (3.5). *Comme une conséquence la totale* ψ *sera calculable pour tout* $\tilde{r}$ *de* $\tilde{\mathfrak{M}}$ *contenu dans* $\mathrm{R} - p_1$.

En effet, le calcul se fait d'accord avec les développements (2.20)-(2.20 *b*), en y remplaçant $\mathfrak{N}$ par la famille $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}'$ (3.7 *a*). Ainsi des r_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ de $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}'$ et des $\tilde{\rho}_\nu$ *disjoints de* $\tilde{\mathfrak{M}}$ existent, de sorte que

$$\tilde{r} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \tilde{\rho}_\nu, \qquad \tilde{\rho}_\nu \subset r_\nu, \qquad \tilde{\rho}_\nu = \sum_{\iota=1}^{k_\nu} r_{\nu,\iota} + e_\nu \qquad [\varphi(e_\nu) = \psi(e_\nu) = 0],$$

où les $r_{\nu,\iota} \in \mathfrak{M}$ et sont disjoints. D'après l'additivité complète dans $\tilde{\mathfrak{M}}$, il vient

$$(3.8\,a) \qquad \psi(\tilde{r}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\iota=1}^{k_\nu} \psi(r_{\nu,\iota}).$$

Or $r_{\nu,\iota}(\subset \tilde{\rho}_\nu) \subset r_\nu$ (de $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}'$). Donc pour tout $r_{\nu,\iota}$ il y a deux alternatives :

(3°) $r_{\nu,\iota} \subset$ un ρ^k; (4°) $r_{\nu,\iota} \subset$ un ρ_l.

Correspondamment $\psi(r_{\nu,\iota})$ est déjà connue :

au cas (3°), d'accord avec (3.7) [(3.5), (3.6)];

au cas (4°), selon (3.4), e. g.

$$(3.8\,b) \qquad \psi(r_{\nu,\iota}) = (\mathrm{L})\int_{p r_{\nu,\iota}} f\,d\varphi + \int_{r_{\nu,\iota}} \psi^p;$$

ψ^p ici est déjà connue à partir de f. *L'énoncé* (3.8) *est vérifié.*

(3.9) *Si la totale* $\psi(\tilde{r})$ *est connue pour un* $\tilde{r}$ *de* $\tilde{\mathfrak{M}}$, *on saura* $\psi(\bar{\tilde{r}})$ *et l'on aura* $\psi(\bar{\tilde{r}}) = \psi(\tilde{r})$ [car la frontière $\tilde{g}$ de $\tilde{r}$ est contenue dans une réunion finie des frontières d'ensembles de $\mathfrak{M}$; $\psi(e) = 0$ pour tout ensemble e situé dans $\tilde{g}$].

Supposons maintenant que la situation décrite dans (3.8) *a lieu.* Continuons le calcul de la totale. On connaît $\psi(r)$ pour tout r (de $\mathfrak{M}$) $\subset \mathrm{R} - p_1$, même si $\bar{r}$ est joint à p_1 [car toujours $\psi(\bar{r}) = \psi(r)$]. Si p_1 (fermé dans R) n'est pas parfait-s (dans R), p_1 possède des points isolés-s dans p_1. Si x_0 est un tel point, il se trouve un r_0 (de $\mathfrak{M}) \subset \mathrm{R}$, qu'on peut choisir dans G′, tel que $r_0 \ni x_0$ et $r_0 p_1 \subset g_0$, où g_0 est la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}$. Soit $\mathfrak{N} = \{\rho_\iota\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ la famille de tous les ensembles de G′, tels que

$$(1') \qquad \rho_\iota \subset \mathrm{R}, \qquad \rho_\iota p_1 \neq 0, \qquad \rho_\iota p_1 \subset g_\iota,$$

où g_ι est la frontière d'un ensemble r_ι de $\mathfrak{M}$.

L'ensemble e^1 *des points isolés-s dans* p_1 est couvert par $\mathfrak{N}$. Or $r_\iota + \rho_\iota p_1 \in \mathfrak{M}'$ (2.16); donc

$$\rho_\iota p_1 [= (r_\iota + \rho_\iota p_1) - r_\iota] \in \tilde{\mathfrak{M}}, \qquad \psi(\rho_\iota p_1) = 0;$$

$\rho_\iota - \rho_\iota p_1$ ($\dot{\subset}$R) est dans $\tilde{\mathfrak{M}}$ et est disjoint de p_1; d'après (3.8), $\psi(\rho_\iota - \rho_\iota p_1)$ est connue; ainsi

$$(3.10) \qquad \psi(\rho_\iota) = \psi[(\rho_\iota - \rho_\iota p_1) + \rho_\iota p_1] = \psi(\rho_\iota - \rho_\iota p_1)$$

sera connue pour $i = 1, 2, \dots$. Soient

$$(2') \qquad p_2 = p_1 - e^1 \quad \text{et un } \tilde{r} \text{ (de } \tilde{\mathfrak{M}}) \subset R - p_2.$$

On a remarqué que $e^1 \subset \sum_i \rho_i p_1$; d'autre part, tout point de $\rho_i p_1$ est isolé-s dans p_1, e. g. $\sum_i \rho_i p_1 \subset e^1$; donc

$$(3') \qquad e^1 = \sum_i \rho_i p_1, \quad \text{d'où } p_2 \textit{ est fermé} \text{ dans R}.$$

Désignons par $\mathfrak{N}' = \{\rho^k\}$ $(k = 1, 2, \dots)$ la famille de *tous* les ensembles de G′ $(\subset \mathfrak{M})$ contenus dans $R - p_1$; $\mathfrak{N}'$ couvre l'ensemble $R - p_1$. On voit que

$$(3.10\,a) \qquad \mathfrak{N} + \mathfrak{N}' \quad (1') \quad \text{couvre } R - p_2.$$

En raison de (3.8), les $\psi(\rho^k)$ sont connues. Ainsi (3.10) $\psi(r)$ est déjà calculée, dès que r (de $\mathfrak{M}$) est contenu dans un ensemble de $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}'$. En procédant à partir de (3.10 *a*) [au lieu de (3.7 *a*)] et avec $\tilde{r}$ (2′) contenu dans $R - p_2$ [au lieu de $\tilde{r} \subset R - p_1$ (3.8)], on obtient, comme à la suite de (3.8),

$$(3.10\,b) \qquad \psi(\tilde{r}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_\nu} \psi(r_{\nu,i}),$$

les $r_{\nu,i}$ $(\in \mathfrak{M})$ disjoints, tout $r_{\nu,i}$ étant dans un ensemble de $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}'$ (3.10 *a*). On est mené à la conclusion suivante :

(3.11) *Envisageons l'ensemble p_2 fermé dans* R $[p_2 = p_1 - e^1$ (2′)], *qui est p_1* (3.4 *a*) *dépourvu des points isolés-s dans p_1. La totale ψ sera calculable, d'accord avec* (3.10) *et* (3.10 *b*), *pour tout $\tilde{r}$ de $\tilde{\mathfrak{M}}$ contenu dans* $R - p_2$.

Le calcul qui survient dans (3.11) revient essentiellement à l'addivité complète dans $\tilde{\mathfrak{M}}$ de ψ.

Si p_2 n'est pas parfait-s dans R, on désigne par p_3 l'ensemble $p_2 - e^2$, où e^2 est l'ensemble des points isolés-s dans p_2; en même temps, la totale ψ sera effectivement calculable pour tout $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset R - p_3$ [moyennant des procédés du genre survenant dans (3.10)-(3.10 *b*)]. On continue ainsi le calcul de proche en proche. En général, supposons que β est un *transfini* (des classes I, II), tel que la totale ψ a été calculée pour tout $\tilde{r}$ $(\in \tilde{\mathfrak{M}}) \subset R - p_\alpha$, cela étant pour tout $\alpha < \beta$.

CAS I : β *est de seconde espèce.* — Alors p_β est l'intersection de tous les p_α pour $\alpha < \beta$; les p_α et p_β sont situés dans R et sont fermés dans R; $p_\alpha \supset p_{\alpha+1}$. Désignons par $\mathfrak{N}$

(3.12) la famille $\mathfrak{N} = \{\rho_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ de tous les ensembles de G' tels que $\rho_i \subset R - p_\alpha$ pour un $\alpha < \beta$.

Les totales $\psi(\rho_i)$ sont déjà connues. *Soit x un point dans* $R - p_\beta$ (ouvert). Des ρ de G' existent tels que $\rho \ni x$, $\rho \subset R - p_\beta$; démontrons que

(3.12 *a*) *un* ρ_i $(\in \mathfrak{N})$ *contient* x.

Au cas contraire, si un ρ de G' contient x et $\rho \subset R - p_\beta$, ρ n'est pas un ρ_i, e. g. il n'est pas vrai que $\rho \subset R - p_\alpha$ pour un $\alpha < \beta$; ainsi ρ est joint à p_α pour tout $\alpha < \beta$. Pour un α_0, $< \beta$, *fixe*, mais autrement quelconque, l'ensemble p_{α_0} possède des points dans *tout* ρ de $G_{,}$ contenant x; d'où x $(\in R)$ est un point d'accumulation d'ensemble p_{α_0} fermé dans R; par là $x \in p_{\alpha_0}$; cela étant pour tout $\alpha_0 < \beta$, il vient $x \in p_\beta$, ce qui est contraire à l'hypothèse $x \in R - p_\beta$; *l'énoncé* (3.12 *a*) *est vérifié.* Cela revient à ce que *la famille* $\mathfrak{N}$ (3.12) *couvre l'ensemble* $R - p_\beta$. On conclut comme il suit :

(3.13) *Supposons que la totale* ψ *a été calculée pour tout* $\tilde{r}$ $(\in \tilde{\mathfrak{M}}) \subset R - p_\alpha$ *pour tout* $\alpha < \beta$, *où* β *est un transfini de seconde espèce. Envisageons la famille* $\mathfrak{N} = \{\rho_i\}$ (3.12); *les* $\psi(\rho_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *sont connues.* ψ *est calculable sur tout* $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}) \subset R - p_\beta$, *à partir de la famille* $\mathfrak{N}$ *moyennant les procédés du genre survenant dans* (3.10 *a*)-(3.10 *b*) [avec $\mathfrak{N}$ (3.12) au lieu de $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}'$ (3.10 *a*); $r_{\nu,i} \in \mathfrak{N}$, les $\psi(r_{\nu,i})$ étant ainsi connues].

CAS II : β *est de première espèce.* — *On a*

$$p_\beta = p_{\beta-1} - e^{\beta-1},$$

où $e^{\beta-1}$ *est l'ensemble des points isolés-s dans* $p_{\beta-1}$ *et l'on suppose déjà calculées les totales* $\psi(\tilde{r})$, *lorsque* $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}) \subset R - p_{\beta-1}$ (donc aussi pour $\tilde{r} \subset R - p_\alpha$, pour tout $\alpha < \beta$).

(3.14) *Au cas* II *le calcul de la totale* ψ *pour* $\tilde{r}$ (*de* $\tilde{\mathfrak{M}}) \subset R - p_\beta$ *se fait d'accord avec le texte à la suite de* (3.9) *jusqu'à* (3.11) [en remplaçant p_1, e^1 et p_2 par $p_{\beta-1}$, $e^{\beta-1}$ et p_β, $\mathfrak{N} = \{\rho_i\}$ étant la famille des $\rho \in G'$, tels que

$$\rho_i \subset R, \qquad \rho_i p_{\beta-1} \neq 0, \qquad \rho_i p_{\beta-1} \subset g_i$$

(la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}$), $\mathfrak{N}' = \{\rho^k\}$ étant la famille des ρ de G', tels que $\rho^k \subset \mathrm{R} - p_{\beta-1}$; $e^{\beta-1} = \sum_i \rho_i p_{\beta-1}\Big]$.

On a une suite transfinie d'ensembles

(3.15) $\qquad p_1 \supset p_2 \supset \ldots \supset p_\alpha \supset \ldots \qquad$ (α des classes I, II),

contenus dans R et *fermés* dans R; p_1 est défini dans (3.4 *a*) à partir d'un certain ensemble p parfait-s. Cette suite se stabilise (Cantor-Baire) pour un α_0 des classes I, II, au sens que $p_{\alpha_0} = p_\beta$ (tout $\beta > \alpha_0$). Nécessairement :

(3.15 *a*) $\quad p^* = p_{\alpha_0} \, (\subset p_1 \subset p)$ *est parfait-s dans* R,

car si ce n'était pas le cas, on pourrait former l'ensemble $p_{\alpha_0+1} = p_{\alpha_0} - e^{\alpha_0}$, où l'ensemble e^{α_0} des points isolés-*s* dans p_{α_0} est non vide. On a établi le fait suivant :

(3.16) *Soient un* $\mathrm{R} \in \mathfrak{M}$ *et un ensemble parfait-s* p, $\mathrm{R}p \neq 0$. *Supposons que la totale* ψ *a été calculée sur tout* r (de $\mathfrak{M}$) $\subset$ R, *avec* $\bar{r}p = 0$; *ainsi* (3.6) ψ *est connue sur tout* r (de $\mathfrak{M}$) $\subset \mathrm{R} - \mathrm{R}p$ *et, en effet, sur tout* $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset \mathrm{R} - \mathrm{R}p$. *Alors il y a une suite transfinie de calculs* [*voir* les développements (3.5), ..., (3.15 *a*)], *qui effectivement donnent la totale* ψ *dans* $\mathrm{R} - p^*$ (e. g. sur tout $\tilde{r}$ de $\tilde{\mathfrak{M}}$ contenu dans $\mathrm{R} - p^*$), *l'ensemble* p^* ($\subset$ R) *étant parfait-s dans* R *et non dense sur* Rp.

Il convient d'introduire

Définition 3.17. — *Ayant la situation décrite dans* (3.16) *en vue, désignons par* (*) *l'opération qui mène de l'ensemble p, joint à* R *et parfait-s, ou bien de l'ensemble* p_1 (3.4 *a*), $\subset$ R, *fermé, à l'ensemble* p^*, $\subset$ R, *parfait-s dans* R *et non dense sur* Rp; on écrira

(3.17 *a*) $\qquad p^* = (p)^*$

(3.17 *b*) $\qquad p^* = (p_1)^*$

(p^* *est le noyau parfait*-s *dans* R *de* p_1).

L'importance de l'opération (*) est due au fait que, si la totale ψ est connue sur tout r (de $\mathfrak{M}$) $\subset$ R, avec $\bar{r}p = 0$, la suite de calculs indiqués dans (3.16) nous donne ψ sur tout $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) dans $\mathrm{R} - p^*$.

Pour commencer le calcul de la totale ψ sur un R de $\mathfrak{M}$, on note qu'un ensemble parfait-*s* P_0 contient R; $\mathrm{R} = \mathrm{RP}_0$ est parfait-s dans R.

Tout r (de $\mathfrak{M}$) contenu dans R contient un r' (de $\mathfrak{M}$), où f est sommable, de sorte que

$$\psi(r_1) = (\mathrm{L})\int_{r_1} f\,d\varphi \qquad [\text{tout } r_1 \text{ (de } \mathfrak{M}) \subset r'].$$

$\mathfrak{N}_{0,1} = \{\rho_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ étant la famille de tous les ensembles de G', tels que

$$(1_1) \qquad \rho_i \subset \mathrm{R}, \qquad \psi(\rho) = (\mathrm{L})\int_{\rho} f\,d\varphi \qquad (\text{pour tout } \rho, \in \mathfrak{M}, \subset \rho_i),$$

l'ensemble

$$(2_1) \qquad \mathrm{P}_{0,1} = \mathrm{R} - \sum \rho_i$$

est *fermé* dans R et *non dense* sur R ($= \mathrm{RP}_0$) [voir (3.4 *a*)]. Soit $\tilde{r}$ un ensemble $\tilde{\mathfrak{M}}$, $\tilde{r} \subset \mathrm{R} - \mathrm{P}_{0,1}$; alors en tenant compte de (2.20)-(2.20 *b*) et en procédant comme on l'a fait à la suite de (3.8), on obtient

$$(3_1) \qquad \psi(\tilde{r}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{k_\nu} \psi(r_{\nu,i}) \right],$$

les $r_{\nu,i}$ ($\in \mathfrak{M}$) étant disjoints;

$$r_{\nu,i} \subset \text{un } p_j; \qquad \psi(r_{\nu,i}) = (\mathrm{L})\int_{r_{\nu,i}} f\,d\varphi.$$

Posons

$$(4_1) \qquad \mathrm{P}_{0,2} = \mathrm{P}_{0,1} - e_{0,1},$$

$e_{0,1}$ étant l'ensemble des points isolés-*s* dans $\mathrm{P}_{0,1}$ [voir (2')]. Envisageons la famille

$$(5_1) \qquad \mathfrak{N}_{0,2} = \{\rho_{0,i}\} + \{\rho^{0,k}\} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots),$$

où $\{\rho_{0,i}\}$ consiste des ensembles de G' tels que

$$\rho_{0,i} \subset \mathrm{R}, \qquad \rho_{0,i}\mathrm{P}_{0,1} \neq 0, \qquad \rho_{0,i}\mathrm{P}_{0,1} \subset \text{la frontière d'un } r_i \text{ de } \mathfrak{M},$$

et $\{\rho^{0,k}\}$ est la famille des ensembles de G' contenus dans $\mathrm{R} - \mathrm{P}_{0,1}$. On a $e_{0,1} = \sum \rho_{0,i}\mathrm{P}_{0,1}$. Comme dans (3.10), on obtient

$$(6_1) \qquad \psi(\rho_{0,i}) = \psi(\rho_{0,i} - \rho_{0,i}\mathrm{P}_{0,1});$$

l'ensemble au second membre appartient à $\tilde{\mathfrak{M}}$ et est situé dans $\mathrm{R} - \mathrm{P}_{0,1}$; par conséquent la totale $\psi(\rho_{0,i})$ est calculée d'accord avec (3_1);

les $\psi(\rho^{0,k})$ sont aussi calculables selon (3_1). La totale est ainsi calculable sur tout ensemble de $\mathfrak{N}_{0,2}$ (5_1), tandis que cette famille dénombrable couvre l'ensemble $R - P_{0,2}$. En tenant compte de ces propriétés de $\mathfrak{N}_{0,2}$, nous procédons comme à la suite de (3.8 *a*); il vient

$$(7_1) \qquad \psi(\tilde{r}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\iota=1}^{k_\nu} \psi(r_{\nu,\iota}), \qquad \text{dès que} \quad \tilde{r}\,(\text{de } \tilde{\mathfrak{M}}) \subset R - P_{0,2},$$

où les $r_{\nu,\iota}$ disjoints sont certains ensembles de $\mathfrak{M}$ et tout $r_{\nu,\iota}$ est contenu dans un ensemble de $\mathfrak{N}_{0,2}$. On résout successivement le problème de totalisation dans les ensembles $R - P_{0,\alpha}$, où

$$(3.18) \qquad P_{0,1} \supset P_{0,2} \supset \ldots \supset P_{0,\alpha} \supset \ldots \qquad (\alpha \text{ transfini des classes I, II}),$$

$P_{0,\beta} = \prod_{\alpha<\beta} P_{0,\alpha}$ (pour β de seconde espèce); $P_{0,\beta} = P_{0,\beta-1} - e_{0,\beta-1}$ (pour β de première espèce), $e_{0,\beta-1}$ étant l'ensemble des points isolés-*s* dans $P_{0,\beta-1}$. Les $P_{0,\alpha}$ sont fermés dans R et pour un α_0 (des classes I, II), la suite (3.18) se stabilise, de sorte que $P_1 = P_{0,\alpha_0}$ ($\subset R$) *est parfait-s dans* R (*non dense sur* $R = RP_0$); *en même temps* $\psi(\tilde{r})$ *sera calculée pour tout* $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset R - P_1$. Si β est de première espèce et ψ est déjà connue dans $R - P_{0,\beta-1}$, ψ s'obtient dans $R - P_{0,\beta}$ d'accord avec les procédés qui de (2_1) mènent à (7_1). Au cas où β est de seconde espèce et ψ est connue dans les $R - P_{0,\alpha}$ ($\alpha < \beta$), on calcule $\psi(\tilde{r})$ pour $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset R - P_{0,\beta}$ d'accord avec (3.13) [on emploie la famille $\mathfrak{N} = \{\rho_\iota\}$ des ensembles de G' tels que $\rho_\iota \subset R - P_{0,\alpha}$ pour un $\alpha < \beta$; $\mathfrak{N}$ couvre $R - P_{0,\beta}$; on obtient une relation comme (7_1), où les $r_{\nu,\iota}$ ($\in \mathfrak{M}$) sont disjoints et tout $r_{\nu,\iota}$ est dans un ρ_ι]. On peut écrire

$$(3.18\,a) \qquad P_1\,(= P_{0,\alpha_0}) = (P_0)^* = (R)^* \qquad (\text{définition } 3.17),$$

où P_0 parfait-*s* contient R.

(3.19) *Dans la suite transfinie des calculs qui mènent à la résolution du problème totalisant dans* $R - P_1$ (3.18 *a*) *les intégrales au sens de Burkill n'interviennent pas.* Ces calculs procèdent à partir des intégrations lebesguiennes (1_1) $(L)\int_\rho f\,d\varphi$ (ρ variable, $\in \mathfrak{M}$, $\rho \subset \rho_\iota$), où $\{\rho_\iota\}$ ($i = 1, 2, \ldots$) est la famille des ensembles ρ_ι, $\subset R$, de G', sur chacun desquels $f(x)$ est sommable; puis survient une suite transfinie d'opérations traduisant le caractère de l'additivité complète dans $\tilde{\mathfrak{M}}$ de la totale.

$P_1(\subset R)$ est parfait-*s* dans R et est non dense sur R. Posons $P_2 = (P_1)^*$; $P_2(\subset R)$ est parfait-*s* dans R et non dense sur P_1. Le problème de totalisation dans $R - P_2$ est résolu moyennant une suite transfinie de calculs d'accord avec (3.5), ..., (3.15 *a*). *Dans ces calculs les intégrales au sens de Burkill surviennent.* Pour vérifier ce fait, il suffit d'examiner le calcul de ψ dans $R - P_{1,1}$, $P_{1,1}$ désignant l'ensemble p_1 (3.4 *a*), lorsque R*p* est P_1.

On obtient une suite transfinie d'ensembles

$$(3.20)\qquad R = RP_0 > P_{0,1};$$
$$(2_1) \geqq P_1 > P_{1,1} \geqq P_2 > P_{2,1} > \ldots > P_{\alpha,1} \geqq P_{\alpha+1} > \ldots,$$

définis comme il suit. *Les* $P_{\alpha,1}$ *sont fermés dans* R; *les* P_α $(\alpha > 0)$ *sont parfaits-s dans* R (P_0, $\supset R$, est parfait-*s*). $P_{\alpha+1}$ *est le noyau parfait-s dans* R *de* $P_{\alpha,1}$; P_α *n'est pas défini pour* α *de seconde espèce.*

$$(3.20\,a)\qquad P_{\beta+1} = (P_\beta)^* \quad [\text{définition } (3.17\,a)],$$

si β est de première espèce; pour β de seconde espèce,

$$P_{\beta,1} = \prod_{\alpha<\beta} P_{\alpha,1} = \prod_{\alpha<\beta} P_\alpha$$

et

$$P_{\beta+1} = (P_{\beta,1})^* \quad [\text{définition } (3.17\,b)].$$

(3.20 *b*) Pour $\beta > 0$ de première espèce $P_{\beta,1}$ est donné d'accord avec (3.4 *a*), où R*p* est P_β $\Big[$e. g. $P_{\beta,1} = P_\beta - \sum \rho_i P_\beta$, $\{\rho_i\}$ étant la famille des ensembles de G′ tels que

$$\rho_i \subset R, \qquad \rho_i P_\beta \neq 0, \qquad \psi(\rho) = (L)\int_{\rho P_\beta} f\,d\varphi + \int_\rho \psi P_\beta$$

(tout ρ, $\in \mathfrak{M}$, ρ_i)$\Big]$.

On note que $P_{\beta,1}$ ($\beta > 0$ de première espèce) *est non dense sur* P_β. De plus, $P_{\alpha+1} = (P_{\alpha,1})^*$, où l'opération (*) est au sens donné dans (3.17 *b*).

Le théorème de Cantor-Baire s'applique à la suite

$$P_{0,1} > P_{1,1} > \ldots > P_{\alpha,1} > P_{\alpha+1,1} > \ldots.$$

Donc *pour un* α' (minimal) *de première espèce* $P_{\alpha',1} = 0$.

Supposons que β *est de seconde espèce et que* ψ *a été déjà calculée dans* $R - P_{\alpha,1}$ *pour tout* $\alpha < \beta$ [ou bien dans $R - P_\alpha$, $\alpha < \beta$]. Pour obtenir $\psi(\bar{r})$, un $\bar{r}$ de $\bar{\mathfrak{M}}$ étant dans $R - P_{\beta,1}$, nous procédons comme au cas I à la suite de (3.11). Soit $\mathfrak{N} = \{\rho_\iota\}$ la famille des ensembles de G′ tels que

$$(3.21) \qquad \rho_\iota \subset R - P_{\alpha,1} \quad \text{pour un } \alpha < \beta.$$

Si x est un point dans $R - P_{\beta,1}$, *un* ρ_ι *de* $\mathfrak{N}$ *contiendra* x. En effet, au cas contraire, soit un ρ (de G′) tel que $\rho \ni x$ et $\rho \subset R - P_{\beta,1}$; ρ sera étranger à $\mathfrak{N}$, ainsi $\rho P_{\alpha,1} \neq 0$ pour *tout* $\alpha < \beta$. Pour α, $< \beta$, fixe $P_{\alpha,1}$ est joint à tout ρ de G contenant x; x est un point d'accumulation de ce $P_{\alpha,1}$ fermé (dans R), d'où $x \in P_{\alpha,1}$; cela étant vrai pour tout $\alpha < \beta$, on aura (3.20 *a*) $x \in P_{\beta,1}$, ce qui est une contradiction; par conséquent,

(3.21 *a*) $\mathfrak{N}$ (3.21) couvre $R - P_{\beta,1}$ (β de seconde espèce).

Dans ce cas, à partir de l'inclusion (3.21 *a*), *on calcule* $\psi(\bar{r})$ *pour* $\bar{r}$ (de $\bar{\mathfrak{M}}$) *dans* $R - P_{\beta,1}$ d'accord avec (3.10 *a*)-(3.10 *b*) [où $\mathfrak{N}$ (3.21) remplace $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}'$ (3.10 *a*), tout $r_{\nu,\iota}$ est dans un ensemble de $\mathfrak{N}$; les $\psi(r_{\nu,\iota})$ sont déjà connues].

Dans le cas où β est de *première espèce* et ψ a été calculée dans $R - P_{\beta-1,1}$ on note que

$$\begin{aligned} P_{\beta-1,1} &\geqq P_\beta \quad (\text{noyau parfait-}s \text{ dans R de } P_{\beta-1,1}), \\ &> P_{\beta,1} \quad (\text{non dense sur } P_\beta). \end{aligned}$$

Or $P_\beta = (P_{\beta-1\ 1})^*$ au sens de (3.17 *b*); correspondamment ψ se calcule dans $R - P_\beta$ moyennant une suite transfinie d'opérations fondées sur l'additivité complète dans $\bar{\mathfrak{M}}$. *Puis on calcule* ψ *sur tout* $\bar{r}$ (de $\bar{\mathfrak{M}}$) *situé dans* $R - P_{\beta,1}$ *d'accord avec* (3.8)-(3.8 *b*) [où p est P_β et p_1 (3.4 *a*) est $P_{\beta,1}$].

En résumé : Si f est totalisable (D) et R est un ensemble de $\mathfrak{M}$, on commence le calcul d'accord avec (1_1)-(3_1) [à la suite de (3.17 *a*)], obtenant la totale ψ (de f) sur tout $\bar{r}$ (de $\bar{\mathfrak{M}}$) situé dans $R - P_{0,1}$. où $P_{0,1}$ (2_1) fermé dans R est non dense sur R. On obtient une suite transfinie d'ensembles (3.20), formés selon (3.20 *a*), (3.20 *b*); $P_{\alpha+1} = (P_{\alpha,1})^*$ [au sens de (3.17 *b*)]; $P_\beta = (P_{\beta-1})^*$ [au sens de (3.17 *a*)], si β est de première espèce. *De proche en proche on calcule la totale sur tout* $\bar{r}$ (de $\bar{\mathfrak{M}}$) *situé dans les* $R - P_{\alpha,1}$*; dès que* α *est un* α' (des classes I, II), *pour lesquels* $P_{\alpha',1}$ *est vide, la totalisation de* f *dans* R *est réalisée.*

4. **Préliminaires pour totalisation des séries.** — Dans la suite nous ferons intervenir des *fonctions* F, *définies* (et finies) *pour les*

ensembles de $\mathfrak{M}'$ (2.16), e. g. pour les ensembles $r' = r + e$, où $r \in \mathfrak{M}$ et e quelconque est contenu dans $\bar{r} - r$; F *sera aussi définie pour tout* e *de la sorte indiquée, mais* $F(e)$ *ne sera pas nécessairement zéro.* A certaines reprises F sera additive dans $\tilde{\mathfrak{M}}$. Soit un $\tilde{r}$ dans $\tilde{\mathfrak{M}}$; alors (2.19)

$$\tilde{r} = \sum_{i=1}^{k} r_i + e_0,$$

les r_i (de $\mathfrak{M}$) étant disjoints et e_0 étant dans un ensemble de la forme :

(4.1) (*) = *un ensemble contenu dans une somme finie de frontières d'ensembles de* $\mathfrak{M}$.

Dans (2.19) l'ensemble e_0, $\in$ (*), peut contenir des points qui ne sont pas dans les frontières des r_i ($i = 1, 2, \ldots$). On conclut que

$$\text{tout } \tilde{r} \ (\text{de } \tilde{\mathfrak{M}}) = \sum_{i=1}^{k} r'_i + e^0, \tag{4.2}$$

les r'_i (de $\mathfrak{M}'$) *et* e^0 *étant disjoints;* $e^0 \in$ (*), tout point de e^0 étant disjoint des frontières des r'_i ($i = 1, \ldots, k$).

En tant que [hypothèse 2.14, (4°)] toute décomposition dans $\mathfrak{M}$ d'un r de $\mathfrak{M}$ est une décomposition-f dans $\mathfrak{M}$ de r, d'après (4.2) il vient

$$\text{tout } r \ (\text{de } \mathfrak{M}) = \sum_{i=1}^{k} r'_i, \tag{4.2 a}$$

les r'_i (de $\mathfrak{M}'$) étant disjoints. *On peut regarder les décompositions* (4.2), (4.2 *a*) *comme étant dans* $\mathfrak{M}'$; d'après (2.14, 4°) on peut faire en sorte que $\varphi(r_i) < \varepsilon$. Si F est additive dans $\tilde{\mathfrak{M}}$, en rapport avec les décompositions (4.2), (4.2 *a*), on aura

$$\left\{\begin{array}{ll} F(\tilde{r}) = \sum_{i=1}^{k} F(r'_i) + F(e^0) & [\text{cas } (4.2)]; \\ F(r) = \sum_{i=1}^{k} F(r'_i) & [\text{cas } (4.2\,a)]. \end{array}\right. \tag{4.3}$$

Une décomposition (4.2 *a*) *aura lieu même si* $r \in \mathfrak{M}'$. Nous introduisons la modification suivante de l'intégrale de Burkill.

DÉFINITION 4.4. — Soit r un ensemble de $\mathfrak{M}$ (ou bien de $\mathfrak{M}'$) $S = \{r'_i\}$ désignant décomposition dans $\mathfrak{M}'$ de r, au sens de (4.2 *a*), posons

$$F(S) = \sum_{i=1}^{k} F(r'_i),$$

si F est une fonction, *possiblement non additive, définie et finie au moins pour tous les* r' (de $\mathfrak{M}'$)$\subset r$. *Les intégrales de Burkill modifiées extrêmes et unique* (si celle-ci existe) sont définies ainsi :

$$(4.4\,a)\qquad \begin{cases} \overline{\int_r} F = \overline{\lim}\, F(S), & \underline{\int_r} F = \underline{\lim}\, F(S), \\ \int_r F = \lim F(S) & \left(\text{si } \overline{\int_r} = \underline{\int_r}\right), \end{cases}$$

pour

$$M(S) = \max_i \varphi(r'_i) \to 0.$$

THÉORÈME 4.5. — Si pour un r de $\mathfrak{M}$ l'intégrale modifiée de Burkill $\int_r F$ existe (finie), l'intégrale $\int_{r'} F$ existe pour tout r' (de $\mathfrak{M}'$)$\subset r$ et $\int_{r''} F$ est additive (dans $\mathfrak{M}'$) dans r. Si $\int_r F$ existe et $\varepsilon > 0$ est donné, un $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ existe de sorte que

$$(4.5')\qquad \left| F(\sigma) - \int_\sigma F \right| < \varepsilon, \qquad \text{dès que } \sigma = \{r_j\} \quad (j = 1, \ldots, \nu)$$

est un système fini de r_j de $\mathfrak{M}'$ disjoints, avec

$$M(\sigma) \left[= \max_j \varphi(r_j) \right] < \eta \qquad (r_j \subset r).$$

Notons que

(4.5 *a*) $\int_r F = F(r)$, si F est additive dans $\mathfrak{M}'$($r \in \mathfrak{M}$, ou $r \in \mathfrak{M}'$),

ce qui s'ensuit du fait que pour toute décomposition $S = \{r'_i\}$ (4.2 *a*) dans $\mathfrak{M}'$ de r on a

$$F(S) = \sum F(r'_i) = F(r),$$

d'après la seconde relation (4.3).

En tenant compte de l'hypothèse (2.14, 2°), on démontre la proposition :

(4.5 *b*) *Soit un* r' (de $\mathfrak{M}'$) $\subset r$ (de $\mathfrak{M}$) *et supposons que l'intérieur de* r' *ne coïncide pas avec* r. *Alors il existe une décomposition* S *dans* $\mathfrak{M}'$ *de* r, *dont* r' *est un composant.*

On a

$$r' = \rho' + e', \qquad \rho' \in \mathfrak{M}, \qquad \rho' \subset r, \qquad e' \subset \bar{\rho}' - \rho', \qquad e' \subset r.$$

D'après (2.14, 2°) il y a une décomposition-f dans $\mathfrak{M}$ de r, dont ρ' est un composant :

$$r = \rho' + \sum_{1}^{k} \rho_j + \xi,$$

avec ρ', ξ et les $\rho_j (\in \mathfrak{M})$ disjoints,

$$\xi \subset (\bar{\rho}' - \rho') + \sum_{1}^{k} (\bar{\rho}_j - \rho_j); \qquad e' \subset \xi \subset r;$$

e' est disjoint de la frontière de r (car $e' \subset r$ ouvert). Il vient

$$r = \rho' + e' + \sum_{1}^{k} \rho_j + (\xi - e') = r' + \sum_{1}^{k} \rho_j + (\xi - e');$$

r', les ρ_j et $\xi - e'$ sont disjoints; $\xi - e'$ est contenu dans les frontières des ρ_j; on peut faire une décomposition $\xi - e' = \sum_{1}^{k} e_j$, e_j disjoints, $e_j \subset \bar{\rho}_j - \bar{\rho}_j$; enfin

$$r = r' + \sum_{1}^{k} r_j, \qquad r_j = \rho_j + e_j \in \mathfrak{M}',$$

r' et les r_j étant disjoints, *ce qui démontre* (4.5 *b*). Procédons à la démonstration du théorème 4.5. Supposons que $\int_{r} \mathrm{F}$ finie existe pour un r de $\mathfrak{M}$; soit un r' (de $\mathfrak{M}'$) $\subset r$. Si $\int_{r'} \mathrm{F}$ n'existe pas, il y a un $\varepsilon > 0$ et deux décompositions S_1, S_2 dans $\mathfrak{M}'$ de r', avec $\mathrm{M}(\mathrm{S}_1)$, $\mathrm{M}(\mathrm{S}_2)$ arbitrairement petits, de sorte que

$$|\,\mathrm{F}(\mathrm{S}_1) - \mathrm{F}(\mathrm{S}_2)\,| > \varepsilon.$$

D'accord avec (4.5 *b*) envisageons des décompositions S dans $\mathfrak{M}'$ de r, pour lesquelles r' est un composant;

$$S = \{ r', r'_1, r'_2, \ldots r'_\nu \},$$

r' et les r'_i étant disjoints, $r'_i \in \mathfrak{M}'$; de plus, $r = r' + \sum_1^\nu r'_i$. Pour $i = 1, \ldots, \nu$ soit $S_{r'_i}$ une décomposition dans $\mathfrak{M}'$ de r'_i; $S_{r'_i} = \{ r'_{i,j} \}$ $(j = 1, \ldots, k_i)$, les $r'_{i,j} (\in \mathfrak{M}')$ étant disjoints et $r'_i = \sum_j r'_{i,j}$. Soit

$$S^* = \{ r'_{i,j} \} \qquad (j = 1, \ldots, k_i;\ i = 1, \ldots, \nu);$$

posons

$$S_1^* = S_1 + S^*, \qquad S_2^* = S_2 + S^*;$$

S_1^* et S_2^* représentent décomposition dans $\mathfrak{M}'$ de r, avec les nombres $M(S_1^*)$, $M(S_2^*)$ arbitrairement petits. On a

$$F(S_p^*) = F(S_p) + F(S^*) \qquad (p = 1, 2),$$

donc

$$| F(S_1^*) - F(S_2^*) | = | F(S_1) - F(S_2) | > \varepsilon,$$

ce qui pour $M(S_1^*)$, $M(S_2^*)$ suffisamment petits présente une contradiction à l'existence de $\int_r F$ finie. Ainsi $\int_{r'} F$ *existe pour tout* r' (de $\mathfrak{M}'$) $\subset r$. L'additivité de $\int_{r'} F$ dans $\mathfrak{M}'$ s'ensuit sans difficulté.

Démontrons maintenant (4.5'). En supposant que $\int_r F$ existe, il s'ensuit qu'un $\eta = \eta(\varepsilon)$, > 0 pour $\varepsilon > 0$, existe de sorte que, si $S(p)$ $(p = 1, 2)$ sont décompositions dans $\mathfrak{M}'$ de r pour lesquelles $M(S(p) < \eta$, on aura

$$| F(S(1)) - F(S(2)) | < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $\sigma = \{ r'_i \}$ $(i = 1, \ldots, \nu)$ un système fini d'ensembles disjoints de $\mathfrak{M}'$, avec $r'_i \subset r$ et $\varphi(r'_i) < \eta$. Soit S^i une décomposition dans $\mathfrak{M}'$ de r'_i, telle que

$$\left| \int_{r'_i} F - F(S^i) \right| < \frac{\varepsilon}{2\nu}.$$

Posons $S_1 = \sum_1^\nu S^i$. En vertu de (4.5 *b*) on peut trouver une décomposition σ' dans $\mathfrak{M}'$ de r, possédant les r'_i $(i = 1, \ldots, \nu)$ parmi les composants (e. g. $\sigma' \supset \sigma$); $\sigma' - \sigma = \{\rho_j\}$ $(j = 1, \ldots, k)$, $\rho_j (\in \mathfrak{M}')$ étant disjoints. ρ_j possède une décomposition S_{ρ_j} dans $\mathfrak{M}'$, avec $M(S_{\rho_j}) < \eta$; posons $S_2 = \sum S_{\rho_j}$. On note que les nombres $M(\sigma)$, $M(S_1)$, $M(S_1 + S_2)$, $M(\sigma + S_2)$ sont inférieurs à η. Donc

$$(1^o) \quad |F(S_1) - F(\sigma)| = |F(S_1 + S_2) - F(\sigma + S_2)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

puisque $S_1 + S_2$ et $\sigma + S_2$ sont décompositions dans $\mathfrak{M}'$ de r. De plus,

$$(2^o) \quad \left| \int_\sigma F - F(S_1) \right| = \left| \sum_{i=1}^{\nu} \left[\int_{r'_i} F - F(S^i) \right] \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'après (1^o) et (2^o) : $\left| \int_\sigma F - F(\sigma) \right| < \varepsilon$, *ce qui achève la démonstration du théorème* 4.5. La preuve de ce théorème a été modelée sur celle des résultats analogues, présentés par Romanovski (R_1; section 2); pourtant dans notre cas l'intégrale de Burkill est au sens modifié, d'accord avec la définition 4.4, tandis qu'au lieu de décompositions-f dans $\mathfrak{M}$ on a fait usage de décompositions dans $\mathfrak{M}'$ au sens précis, ainsi que de la proposition (4.5 *b*), relative à de telles décompositions.

Dans (2.17) on a défini la notion de la *complète additivité dans* $\tilde{\mathfrak{M}}$ (2.16) d'une fonction ψ, qui s'annule pour les ensembles (*) (4.1); la même définition s'applique à F, même si F n'est pas nécessairement nulle pour tous les ensembles (*).

DÉFINITION 4.6. — Une fonction F, définie dans $\mathfrak{M}$, possiblement distincte de zéro pour quelques ensembles (*), sera *dite complètement additive dans* $\tilde{\mathfrak{M}}$, si

$$r \in \tilde{\mathfrak{M}}, \quad r_n \in \tilde{\mathfrak{M}}, \quad r_n \ (n = 1, 2, \ldots) \text{ disjoints},$$
$$r = \sum r_n \quad \text{entraînent } F(r) = \sum F(r_n);$$

e. g. $r \in \tilde{\mathfrak{M}}$, $r^n (\in \tilde{\mathfrak{M}}) \uparrow r$ entraînent $F(r) = \lim F(r_n)$.

En développant dans la suite une totalisation des séries, *il nous conviendra de procéder sous l'hypothèse suivante.*

HYPOTHÈSE 4.7. — Admettons que les relations

$$(4.7\,a) \quad r \in \mathfrak{M}, \quad r_n (\text{de } \mathfrak{M}) \subset r, \quad \varphi(r - r_n) \to 0 \quad (\text{pour } n \to \infty)$$

entraînent qu'il existe une suite infinie partielle r_{n_i} $(n_1 < n_2 < \ldots)$ telle que $r_{n_i} \uparrow r$.

REMARQUE 4.7′. — Si cette hypothèse est remplacée par une condition moins restrictive, à savoir :

(4.7′ *a*) Les relations (4.7 *a*) entraînent l'existence d'une suite de r_{n_1} $(n_1 < n_2 < \ldots)$ tels que $r_{n_1} \uparrow r - e_0$, avec $e_0 \in (*)$ (4.1); alors dans la totalisation (D) (*voir* les sections précédentes) *le caractère de continuité intérieure* (le texte antérieur à 2.16) *sera une conséquence de l'hypothèse de l'additivité complète dans* $\tilde{\mathfrak{M}}$.

En effet, soit ψ [s'annulant pour les (*)] complètement additive dans $\tilde{\mathfrak{M}}$; r étant dans $\mathfrak{M}$, supposons que ψ n'est pas intérieurement continue pour r de $\mathfrak{M}$. On peut alors trouver une suite de r^n (de $\mathfrak{M}$) tels que $r^n \subset r$, $\varphi(r - r^n) \to 0$, de sorte que

$$(1_0) \qquad \psi(r - r^n) \to \alpha, \quad \text{où } \alpha \text{ est un nombre} \neq 0;$$

les r^n satisfont à (4.7 *a*), donc d'après (4.7′ *a*) il existe une suite partielle $\{r_n\}$ de $\{r^n\}$ telle que $r_n \uparrow r - e_0$, avec $e_0 \in (*)$; on aura

$$(2_0) \qquad \psi(r - r_n) \to \alpha \neq 0, \qquad \varphi(r - r_n) \to 0.$$

Or $r = \sum r_n + e_0$; $e_0 \in \tilde{\mathfrak{M}}$, par là $\sum r_n \in \tilde{\mathfrak{M}}$ et

$$\psi(r) = \psi\left(\sum r_n\right) + \psi(e_0) = \psi\left(\sum r_n\right) = \lim \psi(r_n),$$

d'après l'additivité complète dans $\tilde{\mathfrak{M}}$, e. g. $\psi(r - r_n) \to 0$, ce qui est contraire à (2_0). *La remarque* 4.7′ *est vérifiée.*

Pourtant on ne pourrait pas en dire autant d'une F complètement additive dans $\tilde{\mathfrak{M}}$, mais possiblement ne s'annulant pas pour tous les (*); d'autre part :

(4.8) *Si* F *est de la sorte qu'on vient d'indiquer, tandis que l'hypothèse* 4.7 *a lieu,* F *jouira de la continuité intérieure* (dans $\mathfrak{M}$).

Cela se démontre en remplaçant plus haut ψ par F et e_0 par l'ensemble vide.

Voici une modification du lemme 7.10 dans (T).

LEMME 4.9. — *Soit un* $\tilde{r}$, $\in \tilde{\mathfrak{M}}$, *couvert par une famille* $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}'$: $\tilde{r} \subset \sum(\mathfrak{N})\rho$. Il existe une suite finie ou dénombrable d'ensembles $r_\nu (\nu = 1, 2, \ldots) \in \mathfrak{N}$, de sorte qu'on peut trouver des $\tilde{\rho}_\nu$ et des $q_{\nu,i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k_\nu)$, tels que :

(4.9 *a*) les $\tilde{\rho}_\nu (\in \tilde{\mathfrak{M}})$ sont disjoints, $\tilde{\rho}_\nu \subset r_\nu$, $\tilde{r} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \tilde{\rho}_\nu$;

(4.9 *b*) $\tilde{\rho}_\nu = \sum_{\iota=1}^{k_\nu} q_{\nu,\iota} + e_\nu$, les $q_{\nu,\iota} (\in \mathfrak{M}')$ et e_ν sont disjoints, $e_\nu \in (*)$ (4.1) et e_ν *est disjoint des frontières des* $q_{\nu,\iota}$.

Pour démontrer, notons d'abord que $\mathfrak{N}$ contient une suite finie ou dénombrable d'ensembles r_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) joints à $\tilde{r}$ et couvrant $\tilde{r}$. On obtient $\tilde{r} = \sum \tilde{r} r_\nu$, les $\tilde{r} r_\nu$ étant dans $\tilde{\mathfrak{M}}$; posons

$$\tilde{\rho}_1 = \tilde{r}\, r_1, \qquad \tilde{\rho}_2 = \tilde{r}\, r_2 - \tilde{r}\, r_2 \tilde{\rho}_1, \qquad \tilde{\rho}_3 = \tilde{r}\, r_3 - \tilde{r}\, r_3 (\tilde{\rho}_1 + \tilde{\rho}_2), \qquad \ldots.$$

Les $\tilde{\rho}_\nu$ ainsi définis satisfont à (4.9 *a*). Les décompositions (4.9 *b*) s'ensuivent de (4.2).

Si F est complètement additive dans $\tilde{\mathfrak{M}}$ [possiblement $\neq 0$ pour quelques (*)], dans les conditions du lemme 4.9 on aura

$$\text{(4.9')} \qquad \mathrm{F}(\tilde{r}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathrm{F}(\tilde{\rho}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\sum_{\iota=1}^{k_\nu} \mathrm{F}(q_{\nu,\iota}) + \mathrm{F}(e_\nu) \right].$$

En développant la totalisation des séries, le résultat suivant, qui est une adaptation du lemme 7.11 dans (T), nous sera utile.

LEMME 4.10. — *Soit un* R *dans* $\mathfrak{M}$. *Désignons par* $\mathfrak{N}$ *une sous-famille de* $\mathfrak{M}'$ (2.16) *d'ensembles contenus dans* $\overline{\mathrm{R}}$, *avec la propriété :* (4.10 *a*) *Si un* $\rho \in \mathfrak{N}$, *tout ensemble de la forme* $(\rho)^0 + e_0$, *avec* e_0 *dans la frontière de* ρ [de $(\rho)^0$], *sera dans* $\mathfrak{N}$.

Supposons que :

(1_0) Si r (de $\mathfrak{M}'$) $\subset \overline{\mathrm{R}}$ et si r^n de $\tilde{\mathfrak{M}}$ a une décomposition (4.2) dont les composants sont dans $\mathfrak{N}$ $\left[\text{e. g. } r^n = \sum_{\iota=1}^{k} r'_{n,\iota} + e^n\right.$, les $r'_{n,}$ (pour n fixe) étant disjoints, $r'_{n,\iota} \in \mathfrak{N}$, $e^n \in (*)$ (4.1), e^n étant disjoint des $\tilde{r}'_{n,\iota}$ (n fixe)$\left.\right]$, si $r^n \subset r^{n+1}$ et $r = \lim r^n$, alors $r \in \mathfrak{N}$;

(2_0) Tout r (de $\mathfrak{M}'$), $\subset$ un R' de $\mathfrak{N}$, est dans $\mathfrak{N}$;

(3_0) Si une famille $\mathfrak{N}_1$, $\subset \mathfrak{N}\mathfrak{M}$, ne couvre pas R, il existe un R' de $\mathfrak{N}\mathfrak{M}$ non couvert par $\mathfrak{N}_1$.

Dans les conditions (4.10 *a*)-(3_0) R *sera dans* $\mathfrak{N}$ (ainsi que tout ensemble R + *e*, avec $e \subset \overline{\mathrm{R}} - \mathrm{R}$).

Désignons par $\rho^0 = (\rho)^0$ (ρ décrivant $\mathfrak{N}$) les ensembles d'une famille particulière $\mathfrak{N}_1$, e. g. $\mathfrak{N}_1 = \{\rho^0\} = \mathfrak{N}\mathfrak{M}$. On a $\rho^0 \subset R$ et $\sum \rho^0 \subset R$. Si $R - \sum \rho^0 \neq 0$, e. g. si $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}\mathfrak{M}$ ne couvre pas R, d'après (3_0) il existe un R' de $\mathfrak{N}_1$ non couvert par $\mathfrak{N}_1$, ce qui est impossible; d'où $R = \sum \rho^0$ et d'après les propriétés de $\mathfrak{M}$ on aura

$$(1_1) \qquad \bar{R} = \left[\sum_{\rho \in \mathfrak{N}} \bar{\rho}^0 = \sum_{\rho \in \mathfrak{N}} \bar{\rho} \right] = \sum (\mathfrak{N}) \rho \quad \text{[d'après (4.10 } a\text{)]}.$$

Soit r un ensemble de $\mathfrak{M}'$ contenu dans $\bar{R}$; selon (1_1) r (ainsi que $\bar{r}$) est couvert par $\mathfrak{N}$. En vertu du lemme 4.9 on peut trouver des r_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) de $\mathfrak{N}$, des $\tilde{\rho}_\nu$ disjoints de $\tilde{\mathfrak{M}}$ et des $q_{\nu,i}$, de sorte que

$$(2_1) \qquad \tilde{\rho}_\nu \subset r_\nu, \qquad r = \sum_{\nu=1}^{\infty} \tilde{\rho}_\nu, \qquad \tilde{\rho}_\nu = \sum_{i=1}^{k_\nu} q_{\nu,i} + e_\nu;$$

les $q_{\nu,i}$ (de $\mathfrak{M}'$) et e_ν [de (*) (4.1)] sont disjoints; e_ν est disjoint des frontières des $q_{\nu,i}$. En tant que $q_{\nu,i} (\subset \tilde{\rho}_\nu) \subset r_\nu$ (de $\mathfrak{N}$), d'après (2_0) il vient $q_{\nu,i} \in \mathfrak{N}$. Posons

$$r = r^n + \rho^n, \qquad r^n = \sum_1^n \tilde{\rho}_\nu, \qquad \rho^n = \sum_{\nu > n} \tilde{\rho}_\nu,$$

On a

$$r^n \in \tilde{\mathfrak{M}}, \qquad \rho^n = r - r^n \in \tilde{\mathfrak{M}} \qquad \text{et} \qquad r^n \uparrow r;$$

de (plus (2_1),

$$(3_1) \quad r^n = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{i=1}^{k_\nu} q_{\nu,i} + \sum_1^n e_\nu, \qquad q_{\nu,i} \text{ (disjoints)} \in \mathfrak{N}, \qquad \sum_1^n e_\nu \in (*).$$

e_ν est disjoint des $\bar{q}_{\nu,i}$ ($i = 1, \ldots, k_\nu$) pour le même ν, mais e_ν peut être joint à quelques frontières des $q_{p,i}$ pour $p \neq \nu$. Soit e^n l'ensemble des points de $\sum_1^n e_\nu$ étrangers aux frontières des $q_{\nu,i}$ ($i = 1, \ldots, k_\nu$; $\nu = 1, \ldots, n$); les points de $\sum_1^n e_\nu - e^n$ on peut ajouter aux frontières des $q_{\nu,i}$ d'une telle façon que (3_1) devienne

$$(4_1) \quad r^n = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{i=1}^{k_\nu} q'_{\nu,i} + e^n \qquad [e^n, \in (*), \text{ disjoints des } \bar{q}'_{\nu,i} = \bar{q}_{\nu,i}],$$

où les $q'_{\nu,\iota}$ *sont disjoints,* $q'_{\nu,\iota} \supset q_{\nu,\iota}$, $q'_{\nu,\iota} - q_{\nu,\iota}$ (si non vide) étant contenu dans la frontière de $q_{\nu,\iota}$ [de $(q_{\nu,\iota})^0$]; d'après (4.10 *a*), les $q'_{\nu,\iota}$ sont dans $\mathfrak{N}$; ainsi (4_1) représente une décomposition de r'' de la forme (4.2), avec les composants dans $\mathfrak{N}$. En vertu de (1_0) $r \in \mathfrak{N}$, comme une conséquence de la supposition : r (de $\mathfrak{M}'$) $\subset \overline{\mathrm{R}}$. C'est-à-dire, tout r (de $\mathfrak{M}'$) contenu dans $\overline{\mathrm{R}}$ est dans la famille $\mathfrak{N}$; $\overline{\mathrm{R}} \in \mathfrak{M}'$, donc en particulier $\overline{\mathrm{R}} \in \mathfrak{N}$. Enfin (4.10 *a*), R (ainsi que tout ensemble $\mathrm{R} + e$, avec $e \subset \overline{\mathrm{R}} - \mathrm{R}$) sera dans $\mathfrak{N}$, *ce qui vérifie le lemme.*

5. **Totalisation des séries.** — Nous envisageons une série $\sum_1^\infty u_n$ de nombres u_n et *un ensemble* $\theta = \{\theta_n\}$ ($n = 1, 2, \ldots$) *de points* θ_n, *situés dans un ensemble* R *de* $\mathfrak{M}$; de plus, on associe avec θ_n uniquement le nombre u_n du même indice. *On suppose que les* u_n *ont* o *pour le seul point d'accumulation. Admettons que la série*

(5.1) $\sum_{\theta_n \in e} u_n$ *est absolument convergente, dès que e est contenu dans la frontière d'un ensemble de* $\mathfrak{M}$; ici les u_n qui interviennent sont précisément ceux qui correspondent aux points θ_n situés sur e; la série (5.1) sera absolument convergente pour tout ensemble $e \in (*)$ (4.1).

La totale (si elle existe) *de la série* $\sum_1^\infty u_n$ *sur un* q (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset$ R *sera désignée par*

$$(q)\sum \mathrm{T}\, u_n; \tag{5.2}$$

ce sera une fonction F(q) d'ensemble q satisfaisant à la définition suivante.

Définition 5.3. — Admettons l'hypothèse 4.7. On dira que *la série* $\sum_1^\infty u_n$ *est totalisable sur un* R *de* $\mathfrak{M}$, *s'il existe une fonction* F *complètement additive dans* $\tilde{\mathfrak{M}}$, *sur* R, *d'accord avec la définition* 4.6 [F est donc définie pour tous les q (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset$ R, en particulier pour les $e \in (*)$ (4.1)] *avec les propriétés suivantes :*

(I) $\mathrm{F}(e) = \sum_{\theta_n \in e} u_n$, si e [de (*)] $\subset$ R

[d'après (5.1), cette série est absolument convergente];

(II) Si p parfait-s est joint à R et un r (de $\mathfrak{M}$) $\subset$ R et $rp \neq 0$, on peut trouver un r' (de $\mathfrak{M}$), $\subset r$, tel que $r'p \neq 0$, de sorte que pour tout r_1 (de $\mathfrak{M}$) $\subset r'$, on ait

$$\int_{r_1} \mathrm{F}_p = \sum_{\theta_n \in r_1 p} u_n, \tag{5.3 a}$$

l'intégrale au premier membre étant au sens modifié de Burkill (définition 4.4), la série au second membre étant absolument convergente; pour tout ρ (de $\mathfrak{M}'$) $\subset r'$:

$$\mathrm{F}_p(\rho) = \mathrm{F}(\rho) \quad (\text{si } \bar{\rho}p \neq 0), \qquad = 0 \quad (\text{si } \bar{\rho}p = 0). \tag{5.3 b}$$

Dans la suite nous allons établir une suite transfinie de calculs, qui donnent *la totale* F(R), *sur* R, *à partir de la série* $\sum u_n$:

$$\mathrm{F}(\mathrm{R}) = (\mathrm{R})\sum \mathrm{T}\, u_n. \tag{5.3 c}$$

REMARQUE (5.3'). — Si la totale F existe sur R, elle existe sur $\overline{\mathrm{R}}$ et $\mathrm{F}(\overline{\mathrm{R}}) = \mathrm{F}(\mathrm{R})$, en tant que θ est inexistant sur $\overline{\mathrm{R}} - \mathrm{R}$. Si la totale F existe sur un r (de $\mathfrak{M}$), si

$$r' = r + e(r), \qquad \text{avec} \qquad e(r) \subset \bar{r} - r$$

(donc $r' \in \mathfrak{M}'$) et $r \subset$ R, alors la totale F existe sur r' et

$$\mathrm{F}(r') = \mathrm{F}(r) + \sum_{\theta_n \in e(r)} u_n; \tag{5.3' a}$$

en particulier la totale existe sur $\bar{r}$.

Notons de plus que la propriété (5.3, I) ne contredit pas à l'additivité complète dans $\tilde{\mathfrak{M}}$ de la totale.

THÉORÈME 5.4. — *La totale* F(5.3 *c*) *des séries, d'accord avec la définition* 5.3, *est unique.*

Si la totale n'est pas unique sur R (e. g. sur $\overline{\mathrm{R}}$), soient F' et F'' deux fonctions distinctes complètement additives dans $\tilde{\mathfrak{M}}$, sur R, chacune satisfaisant à (5.3, I) et à (5.3, II) (pour tout p parfait-s, joint à R). Posons $\mathrm{F} = \mathrm{F}' - \mathrm{F}''$. F sera complètement additive dans $\tilde{\mathfrak{M}}$ sur R. On aura

$$\mathrm{F}(e) = 0 \quad \text{pour tout } e \ [\text{de } (^*)] \subset \overline{\mathrm{R}}. \tag{1$_1$}$$

Désignons par $\mathfrak{N}$ la famille de tous les ρ tels que

$$(2_1) \qquad \rho \in \mathfrak{M}', \quad \rho \subset \overline{R}; \qquad F(\rho_1) = 0 \quad \text{pour tout } \rho_1 \text{ (de } \mathfrak{M}') \subset \rho.$$

Comme une conséquence de (1_1) il résulte que $\mathfrak{N}$ *satisfait à* (4.10 *a*). Pour établir (4.10, 2_0) envisageons un $R' \in \mathfrak{N}$; ainsi

$$R' \in \mathfrak{M}', \quad R' \subset \overline{R}; \qquad F(R_1) = 0 \quad \text{pour tout } R_1 \text{ de } \mathfrak{M}') \subset \overline{R}'.$$

Si $r' \in \mathfrak{M}$ et $r \subset R'$, on aura

$$r \subset \overline{R}; \qquad F(r_1) = 0 \quad \text{pour tout } r_1 \text{ (de } \mathfrak{M}') \subset \overline{r} \quad (\dot{\subset} \overline{R}');$$

donc (2_1) : $r \in \mathfrak{N}$; ce qui montre que $\mathfrak{N}$ *satisfait à* [4.10, 2_0)].

Abordons la démonstration de la propriété [4.10, (1_0)]. Ainsi on suppose qu'un r (de $\mathfrak{M}') \subset \overline{R}$ et r^n (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) a une décomposition

$$(3_1) \qquad r^n = \sum_{i=1}^{k} r'_{n,i} + e^n;$$

les $r'_{n,i}$ (n fixe) et e^n étant disjoints; $r'_{n,i} \in \mathfrak{N}$; e^n [de (*)] disjoints des $\overline{r}'_{n,i}$ (n fixe); en plus, $r^n \subset r^{n+1}$ et $r = \lim r^n$. On doit montrer que $r \in \mathfrak{N}$, e. g. que (2_1) :

$$(4_1) \qquad F(\rho) = 0 \quad \text{pour tout } \rho \text{ (de } \mathfrak{M}') \subset \overline{r};$$

à cause de (1_1) *il suffit d'établir* (4_1) *seulement pour les* ρ (de $\mathfrak{M}) \subset r$. Avec un tel ρ, il vient

$$(5_1) \qquad \rho r^n = \sum_{i=1}^{k} \rho r'_{n,i} + e^n \rho \in \tilde{\mathfrak{M}}, \qquad e^n \rho \in (*).$$

Or $r'_{n,i} = r^0_{n,i} + e_{n,i}$, où $r^0_{n,i} = (r'_{n,i})^0 \in \mathfrak{M}$ et $e_{n,i}$ est dans la frontière de $r^0_{n,i}$. Ainsi

$$(6_1) \qquad \rho r'_{n,i} = \rho r^0_{n,i} + \rho e_{n,i}, \qquad \rho e_{n,i} \in (*).$$

D'après [2.14 (3°)] l'intersection $\rho r^0_{n,i}$ de deux ensembles de $\mathfrak{M}$ a une décomposition-f dans $\mathfrak{M}$:

$$(7_1) \qquad \rho r^0_{n,i} = \sum_{j=1}^{\nu} q_{n,i,j} + e_{n,i}, \qquad (\nu = \nu_{n,i}),$$

les ensembles au second membre étant disjoints pour n fixe; $q_{n,i,j} \in \mathfrak{M}$; $e_{n,i}$ dans les frontières des $q_{n,i,j}$ (j variant).

En raison de (1_1), (5_1), (6_1), (7_1),

$$(8_1)\qquad F(\rho r^n) = \sum_{\iota} F(\rho r'_{n,\iota}) = \sum_{\iota} F(\rho r^0_{n,\iota}) = \sum_{\iota}\sum_{j} F(q_{n,\iota,j}).$$

On voit que (3_1) :

$$q_{n,\iota,j}\ (\text{de } \mathfrak{M}) \subset r^0_{n,\iota} \subset r'_{n,\iota}\ (\in \mathfrak{N}).$$

Par conséquent, d'après la propriété [4.10, (2_0)] déjà établie, $q_{n,\iota,j}$ est dans $\mathfrak{N}$; d'où (2_1) $F(q_{n,\iota,j}) = 0$ et (8_1) $F(\rho r^n) = 0$. Or

$$\rho\ (\text{de } \mathfrak{M}) \subset r, \quad r^n \uparrow r, \qquad \text{d'où} \quad \rho r^n (\text{de } \tilde{\mathfrak{M}}) \uparrow \rho r = \rho.$$

En raison de l'additivité complète dans $\tilde{\mathfrak{M}}$ de F on obtient

$$F(\rho) = \lim F(\rho r^n) = 0.$$

La propriété [4.10, (1_0)] *pour* $\mathfrak{N}$ *en découle*, comme une conséquence de la remarque en rapport avec (4_1).

Supposons qu'une famille $\mathfrak{N}_1 = \{\rho_1\}$, $\subset \mathfrak{N}\mathfrak{M}$, *ne couvre pas* R. Envisageons l'ensemble

$$(9_1)\qquad E = R - \sum \rho_1, \quad \rho_1 \text{ décrivant } \mathfrak{N}_1; \qquad E \neq 0$$

[selon (2_1), $\rho_1 \subset R$; $F(\rho) = 0$ pour tout ρ (de $\mathfrak{M}'$) $\subset \bar{\rho}_1$].

Les ρ_1 étant ouverts, E *est fermé dans* R. *Si* E *n'est pas parfait-s, dans* R, il s'ensuit qu'il existe dans R un point $x_0 (\in E)$ isolé-*s*. Pour un r_0 (de $\mathfrak{M}$), contenu dans R et contenant x_0, l'ensemble $r_0 E$ sera dans la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}$; $r_0 E$ [$\in (*)$] est dans $\tilde{\mathfrak{M}}$, aussi $r_0 - r_0 E \in \tilde{\mathfrak{M}}$; on a (9_1) :

$$(10_1)\qquad r_0 - r_0 E \subset R - E = \sum (\mathfrak{N}_1)\, \rho_1.$$

D'après le lemme 4.9, on peut trouver une suite finie ou dénombrable r_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$), ainsi que des $\tilde{\rho}_\nu$ et des $q_{\nu,\iota}$ ($i = 1, \ldots, k_\nu$), tels que

$$(11_1)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{les } \tilde{\rho}_\nu\ (\in \tilde{\mathfrak{M}}) \text{ sont disjointes}, \quad \tilde{\rho}_\nu \subset r_\nu\ (\in \mathfrak{N}_1), \\ r_0 - r_0 E = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \tilde{\rho}_\nu; \qquad \tilde{\rho}_\nu = \sum_{i=1}^{k_\nu} q_{\nu,\iota} + e_\nu, \end{array} \right.$$

les $q_{\nu,\iota}$ (de $\mathfrak{M}'$) et e_ν étant disjoints, $e_\nu \in (*)$; e_ν disjoint des frontières des $q_{\nu,\iota}$.

En tant que $q_{\nu,\iota}$ (de $\mathfrak{M}'$)$\subset r_\nu$ de ($\mathfrak{N}_1$, $\subset \mathfrak{N}$), il résulte [4.10, (2_0)] *que $q_{\nu,\iota}$ est dans $\mathfrak{N}$.* Posons

$$r^n = r_0 \mathrm{E} + \sum_{\nu=1}^{n} \tilde{\rho}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\iota=1}^{k_\nu} q_{\nu,\iota} + e^n, \qquad e^n = r_0 \mathrm{E} + \sum_{\nu=1}^{n} e_\nu \quad [\in (*)].$$

Cela entraîne que r' (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) possède une décomposition de la forme (4.2), avec les composants dans $\mathfrak{N}$; de plus, $r^n \uparrow r_0$ (de $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}'$); du caractère [4.10, ($1_0$)], déjà vérifié, il en découle que $r_0 \in \mathfrak{N}$; en effet, $r_0 \in \mathfrak{N}\mathfrak{M}$; r_0 contient le point x_0 de E ($\mathfrak{g}_1$), donc r_0 est non couvert par $\mathfrak{N}_1$. Ainsi :

(5.5) *Si* $\mathfrak{N}_1 = \{\rho_1\}$, $\subset \mathfrak{N}\mathfrak{M}$, *ne couvre pas* R *et si* E ($\mathfrak{g}_1$) *possède un point isolé-s, il existe un r_0 de $\mathfrak{N}\mathfrak{M}$ non couvert par $\mathfrak{N}_1$.*

Considérons *le cas où* E ($\mathfrak{g}_1$) *est parfait-s dans* R; $\mathrm{F} = \mathrm{F}' - \mathrm{F}''$, où F′ et F″ satisfont à (5.3, II). Soit un r (de $\mathfrak{M}$), $\subset$R, joint à E; il existe un r' (de $\mathfrak{M}$), $\subset r$, joint à E, tel que

$$\int_{\rho'} \mathrm{F}'_{\mathrm{E}} = \sum_{\theta_n \in \rho' \mathrm{E}} u_n$$

(la série au second membre étant absolument convergente) pour tout ρ' (de $\mathfrak{M}$)$\subset r'$. Puisque F″ satisfait à (5.3, II) r' contient *un r'' (de $\mathfrak{M}$), joint à* E, *de sorte que*

$$\int_{\rho''} \mathrm{F}''_{\mathrm{E}} = \sum_{\theta_n \in \rho'' \mathrm{E}} u_n$$

(la dernière série absolument convergente) pour tout ρ'' (de $\mathfrak{M}$)$\subset r''$. Ainsi

$$(12_1) \qquad \int_{\rho} \mathrm{F}_{\mathrm{E}} = 0 \quad \text{pour tout } \rho \text{ (de } \mathfrak{M}) \subset r'';$$

ici pour ρ_0 (de $\mathfrak{M}'$)$\subset r''$ on a

$$\mathrm{F}_{\mathrm{E}}(\rho_0) = \mathrm{F}(\rho_0) \quad (\text{si } \bar{\rho}_0 \mathrm{E} \neq 0), \qquad = 0 \quad (\text{si } \bar{\rho}_0 \mathrm{E} = 0).$$

Avec ρ (de $\mathfrak{M}$)$\subset r''$ (de $\mathfrak{M}$), on considère décompositions $\mathrm{S} = \{\rho_\iota\}$ dans $\mathfrak{M}'$ de ρ, au sens de (4.2 *a*) $\left[\rho = \sum_{\iota=1}^{k'} \rho_\iota,\ \rho_\iota \text{ (de } \mathfrak{M}') \text{ étant disjoints}\right]$; selon la définition 4.4, la relation (12_1) entraîne

$$\lim \mathrm{F}_{\mathrm{E}}(\mathrm{S}) = \lim \sum_{\iota=1}^{k'} \mathrm{F}_{\mathrm{E}}(\rho_\iota) = 0 \qquad \text{lorsque} \quad \mathrm{M}(\mathrm{S}) \to 0;$$

c'est-à-dire

$$(13_1)\quad \lim \sum{}' (\bar{\rho}_i E \neq 0)\, F(\rho_i) = 0 \qquad \text{pour} \quad \max \varphi(\rho_i) \qquad (i = 1, \ldots, k) \to 0.$$

Dans la décomposition S de ρ, soit ρ_k un des ρ_i qui n'interviennent pas dans la somme $\sum'$ (13_1); ainsi $\rho_k \in \mathfrak{M}'$ et $\bar{\rho}_k E = 0$. D'après (9_1), ρ_k est contenu dans $\sum(\mathfrak{N}_1)\,\hat{\rho}$. En raison du lemme 4.9 (avec ρ_k et $\mathfrak{N}_1$ au lieu de $\tilde{r}$ et de $\mathfrak{N}$) des r_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$, des $\tilde{\rho}_\nu$ et des $q_{\nu,i}$ (qui dépendent de k) existent, de sorte que :

$r_\nu \in \mathfrak{N}_1$, les $\tilde{\rho}_\nu$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) sont disjoints,

$$\tilde{\rho}_\nu \subset r_\nu, \qquad \rho_k = \sum_{\nu=1}^{\infty} \tilde{\rho}_\nu;$$

$\tilde{\rho}_\nu = \sum_{i=1}^{s_\nu} q_{\nu,i} + e_\nu$, les $q_{\nu,i}$ (de $\mathfrak{M}'$) et e_ν sont disjoints;

$e_\nu \in (*)$, e_ν est disjoint des frontières des $q_{\nu,i}$.

En tant que $q_{\nu,i} \subset \tilde{\rho}_\nu \subset r_\nu$ et $r_\nu \in \mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}$, d'après [4.10, (2_0)] $q_{\nu,i} \in \mathfrak{N}$; donc (2_1) : $F(q_{\nu,i}) = 0$; par là et en tenant compte de (1_1), il vient

$$(14_1)\quad F(\rho_k) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F(\tilde{\rho}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{s_\nu} F(q_{\nu,i}) = 0, \qquad \text{dès que} \quad \bar{\rho}_k E = 0.$$

Or $\rho = \sum_{i=1}^{k'} \rho_i$ (les ρ_i étant disjoints); ainsi, en raison de (14_1) et (13_1),

$$(15_1)\qquad F(\rho) = \sum_{i=1}^{k'} F(\rho_i) = \sum{}' (\bar{\rho}_i E \neq 0)\, F(\rho_i) = 0,$$

cela étant pour tout ρ (de $\mathfrak{M}$) $\subset r''$ (de $\mathfrak{M}$). Soit $\hat{\rho}$ un ensemble quelconque de $\mathfrak{M}'$, tel que $\hat{\rho} \subset \bar{r}''$; on a $\hat{\rho} = \rho + e(\rho)$, où $\rho \in \mathfrak{M}$ et $e(\rho) \subset \bar{\rho} - \rho$ et $e(\rho) \in (*)$; nécessairement $\rho \subset r''$; en raison de (1_1) et de (15_1),

$$F(\hat{\rho}) = F(\rho) + F(e(\rho)) = F(\rho) = 0$$

pour les $\hat{\rho}$ de la sorte indiquée.

Par conséquent [*voir* la définition (2_1) de $\mathfrak{N}$], $r'' \in \mathfrak{N}$, et en effet $r'' \in \mathfrak{N}\mathfrak{M}$. Pourtant r'' est joint à E (9_1); donc r'' est non couvert par $\mathfrak{N}_1$ $(\subset \mathfrak{N}\mathfrak{M})$. On conclut comme il suit :

(5.5 *a*) *Si* $\mathfrak{N}_1 = \{\rho_1\}$, $\subset \mathfrak{N}\mathfrak{M}$, *ne couvre pas* R *et* E (9_1) *est parfait-s dans* R, *il existe un* r'' *de* $\mathfrak{N}\mathfrak{M}$ *non couvert par* $\mathfrak{N}_1$.

En raison de (5.5), (5.5 *a*) on voit que *la famille* $\mathfrak{N}$ (2_1) *satisfait à* [4.10, (3_0)]. $\mathfrak{N}$ remplit donc toutes les conditions du lemme 4.10, d'où $R \in \mathfrak{N}$; tous les ensembles $R + e$, avec $e \subset \overline{R} - R$, sont dans $\mathfrak{N}$. Ainsi $F = 0$ et $F' = F''$ pour tous les ensembles ρ (de $\mathfrak{M}'$) $\subset \overline{R}$ La totale des séries, si elle existe, est unique, *ce qui vérifie le théorème* 5.4.

De ce qui précède on conclut comme il suit.

(5.6) *Si la série* $\sum_1^\infty u_n$ *est totalisable sur un* R_0 *de* $\mathfrak{M}$, *cette série sera totalisable sur tout* r (de $\mathfrak{M}'$) $\subset \overline{R}_0$ *et la totale* $(r) \sum \mathrm{T} u_n$ *sera complètement additive dans* $\tilde{\mathfrak{M}}$ (*définition* 4.6) *sur* $\overline{R}_0$.

Démontrons maintenant la proposition suivante :

(5.6 *a*) *Soit* $\{r_i\}$ $(i = 1, \ldots, n_1)$ *une décomposition dans* $\mathfrak{M}'$ *d'un* R_0 (de $\mathfrak{M}$) $\subset \overline{R}$, *e. g.* $R_0 = \sum_1^{r_1} r_i$, r_i $(\in \mathfrak{M}')$ *étant disjoints. Si la série* $\sum u_n$ *est totalisable sur tout* r_i, *cette série sera totalisable sur* R_0.

Désignons par F^i la totale sur r_i; ainsi

$$(1') \qquad F^i(q) = (q) \sum \mathrm{T} u_n \quad \text{pour tout } q \ (\text{de } \tilde{\mathfrak{M}}) \text{ dans } \bar{r}_i;$$

F^i est complètement additive dans $\tilde{\mathfrak{M}}$ sur $\bar{r}_i$;

$$(2') \quad F^i(e) = \sum_{\theta_n \in e} u_n \quad (\text{absolument convergente}) \text{ pour tout } e \ [\text{de } (^*)] \subset \bar{r}_i;$$

posons $r_i^0 = (r_i)^0$; si p parfait-*s* est joint à r_i^0 et un r'' (de $\mathfrak{M}$) est contenu dans r_i^0 et est joint à p, il existe une r' (de $\mathfrak{M}$) $\subset r''$, aussi joint à p, de sorte que

$$(3') \qquad \int_\rho F'_p = \sum_{\theta_n \in \rho' p} u_n \quad (\text{absolument convergente})$$

pour tout ρ' (de $\mathfrak{M}$) $\subset r'$. Considérons un r (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset \overline{R}_0$; on a

$$(4') \quad r = R_0 r + e(r), \qquad e(r) \ [\text{de } (^*)] \subset \overline{R}_0 - R_0, \qquad r = \sum r r_i + e(r);$$

introduisons

$$(5') \qquad F(r) = \sum_{i=1}^{n_1} F^i(r_i r) + \sum_{\theta_n \in e(r)} u_n \quad (\text{absolument convergente}).$$

Si e [de (*)] $\subset \overline{R}_0$, posons $e' = e - eR_0$; les ensembles $r_i e$ et e' ($\subset \overline{R}_0 - R_0$) sont dans (*); d'après (5'),

$$(6')\quad F(e) = \sum_{i=1}^{n_1} F^i(r_i e) + \sum_{\theta_n \in e'} u_n = \sum_{i=1}^{n_1}\Bigl[\sum_{\theta_n \in r_i r} u_n\Bigr] + \sum_{\theta_n \in e'} u_n = \sum_{\theta_n \in e} u_n;$$

en vertu de (2') la série au dernier membre est absolument convergente.

Envisageons des r^k (de $\widetilde{\mathfrak{M}}$) $\uparrow r$ (de $\widetilde{\mathfrak{M}}$), pour $k \to \infty$, $r \subset \overline{R}_0$; selon (5')

$$(7')\quad F(r^k) = \sum_{i=1}^{n_1} F^i(r_i r^k) + \sum_{\theta_n \in e^k} u_n, \qquad e^k = e(r^k) = r^k - R_0 r^k \subset e(r);$$

ici $e^k \uparrow e(r)$; on obtient

$$(8')\quad \lim_k \sum_{\theta_n \in e^k} u_n = \sum_{\theta_n \in e(r)} u_n,$$

en tant que les séries qui surviennent dans (8) sont absolument convergentes. Or $r_i r^k$ ($\in \widetilde{\mathfrak{M}}$) $\uparrow r_i r$ (de $\widetilde{\mathfrak{M}}$), $r_i r \subset r_i$, tandis que F^i est complètement additive dans $\widetilde{\mathfrak{M}}$ sur $\overline{r}_i$; donc

$$\lim_k F^i(r_i r^k) = F^i(r_i r).$$

Par conséquent [(7'), (8')]

$$\lim_k F(r^k) = \sum_{i=1}^{n_1} F^i(r_i r) + \sum_{\theta_n \in e(r)} u_n = F(r) \quad \text{[en raison de (5')].}$$

Ainsi F (5') *est complètement additive dans* $\widetilde{\mathfrak{M}}$ sur $\overline{R}_0$. Soit un p parfait-s joint à R_0; considérons un R_1 quelconque de $\mathfrak{M}$ contenu dans R_0 et joint à p. Nous allons démontrer qu'il existe un R' (de $\mathfrak{M}$) $\subset R_1$, joint à p, tel que

$$(9')\quad \int_{\rho'} F_p = \sum_{\theta_n \in \rho' p} u_n \quad \text{pour tout } \rho' \text{ (de } \mathfrak{M}) \subset R',$$

la série au second membre étant absolument convergente. Or

$$R_1 p\,(\neq 0) \subset R_0 = \sum_1^{n_1} r_i = \sum_1^{n_1} r_i^0 + \hat{e},$$

les ensembles au dernier membre étant disjoints, r_i^0 [$= (r_i)^0$] $\in \mathfrak{M}$, $\hat{e}$ contenu dans les frontières des r_i^0. $R_1 p$ est joint à un r_ν^0, car au cas contraire, $R_1 p \subset \hat{e}$ [$\in(*)$], ce qui est impossible, p étant parfait-s. $R_1 r^0$ ouvert est joint à p, donc $R_1 r^0_\nu$ contient des ensembles de $\mathfrak{M}$ joints à p. En raison de la constatation à la suite de (2′) il existe un R′ (de $\mathfrak{M}$) $\subset R_1 r^0_\nu$ tel que $R' p \neq 0$ et tel que (3′)

$$(10') \qquad \int_{\rho'} F^\nu_p = \sum_{\theta_n \in \rho' p} u_n \quad \text{pour tout } \rho' \text{ (de } \mathfrak{M}) \subset R'.$$

Si r (de $\mathfrak{M}'$) $\subset \rho'$ [$\subset R' \subset R_1 r^0_\nu \subset R_0$], r sera disjoint de $\cdot\overline{R}_0 - R_0$ et l'ensemble $e(r)$ (4′) sera vide; alors (5′)

$$F(r) = \sum_1^{n_1} F^i(r_i r);$$

$r \subset r^0_\nu \subset r_\nu$ et les r_i ($i = 1, \ldots, n_1$) sont disjoints, donc $r_i r = 0$ pour $i \neq \nu$ et

$$F(r) = F^\nu(r_\nu r) = F^\nu(r), \qquad F_p(r) = F^\nu_p(r) \quad [\text{pour tout } r \text{ (de } \mathfrak{M}') \subset \rho'].$$

En tenant compte de la définition 4.4 et de (10′), il résulte

$$\int_{\rho'} F_p = \sum_{\theta_n \in \rho' p} u_n \quad \text{(absolument convergente)}$$

pour tout ρ' (de $\mathfrak{M}$) $\subset R'$. Ici R' et ρ' satisfont aux conditions spécifiées dans (9′). Ainsi (9′) *est vérifiée.* Nous avons déjà établi que F (5′) est complètement additive dans $\mathfrak{M}'$ sur $\overline{R}_0$, ainsi que la propriété (6′). Par conséquent, la série $\sum u_n$ est totalisable sur $\overline{R}_0$ et la totale y vaut F; (5.6 *a*) *est démontrée.*

(5.6 *b*) *La classe des séries* $\sum u_n$ *totalisables est linéaire.*

Cela est entendu au sens que, si c_1 et c_2 sont des constantes et si les séries $\sum u_{1,n}$, $\sum u_{2,n}$ sont totalisables sur un r de $\mathfrak{M}'$, alors la série $\sum (c_1 u_{1,n} + c_2 u_{2,n})$ sera totalisable sur r et l'on aura

$$(r)\sum \mathrm{T}(c_1 u_{1,n} + c_2 u_{2,n}) = c_1 (r) \sum \mathrm{T} u_{1,n} + c_2 (r) \sum \mathrm{T} u_{2,n}.$$

La démonstration est assez immédiate.

(5.6 *c*) *Si* $u_n \geqq 0$ ($n = 1, 2, \ldots$) *et la série* $\sum u_n$ *est totalisable sur un* R_0 (de $\mathfrak{M}$) $\subset R$, *on aura* $(R_0)\sum \mathrm{T} u_n \geqq 0$.

Si (5.6 c) était établie, il s'ensuivrait que $(r')\sum \mathrm{T}u_n \geqq 0$ pour tout r' (de $\mathfrak{M}'$) $\subset \overline{\mathrm{R}}_0$, donc $\left[\text{d'après (4.2)}, \; \tilde{r} = \sum_{1}^{k} r'_i + e^0, \; r'_i \in \mathfrak{M}', \; e^0 \in (*)\right]$

$$(5.6\,c') \qquad \cdot(\tilde{r})\sum \mathrm{T}u_n = \sum_{i=1}^{k}(r'_i)\sum \mathrm{T}u_n + \sum(\theta_n \in e^0)\, u_n \geqq 0$$

pour tout $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset \overline{\mathrm{R}}_0$. Abordons la démonstration de (5.6 c). Soit $\mathfrak{N}'$ la sous-famille de $\mathfrak{M}'$, formée des ensembles ρ de $\mathfrak{M}'$, tels que

$$(1_0) \qquad \rho \subset \overline{\mathrm{R}}_0, \qquad \mathrm{F}(\rho') \geqq 0 \quad \text{tout pour } \rho' \text{ (de } \mathfrak{M}') \subset \bar{\rho},$$

F désignant la totale, supposée existante, de la série. Si $\rho \in \mathfrak{N}'$, on aura $\rho^0 = (\rho)^0$ dans $\mathfrak{N}'$; $\mathrm{F}(\rho^0) \geqq 0$; ainsi

$$\mathrm{F}(\rho^0 + e_0) = \mathrm{F}(\rho^0) + \sum_{\theta \in e_0} u_n \geqq 0 \quad . \quad \text{pour tout} \quad e_0 \subset \bar{\rho}^0 - \rho^0.$$

$\mathfrak{N}'$ satisfait à la condition (4.10 *a*), pour R_0, du lemme 4.10. Comme une conséquence immédiate de la définition de $\mathfrak{N}'$ on voit que $\mathfrak{N}'$ *remplit* [4.10, (2_0)], *pour* R_0.

Ayant la démonstration de [4.10, (1_0)] pour $\mathfrak{N}'$ et R_0 en vue, supposons qu'un r (de $\mathfrak{M}'$) $\subset \overline{\mathrm{R}}_0$ et que r^n (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) a une décomposition (4.2)

$$(2_0) \qquad r^n = \sum_{i=1}^{k} r'_{n,i} + e^n,$$

les $r'_{n,i}$ (n fixe) et e^n [de (*)] disjoints, avec $r'_{n,i} \in \mathfrak{N}'$, tandis que $r^n \uparrow r$; r sera dans $\mathfrak{N}'$ (1_0), si

$$(3_0) \qquad \mathrm{F}(\rho) \geqq 0 \quad \text{pour tout } \rho \text{ (de } \mathfrak{M}') \subset \bar{r}.$$

Il suffit d'établir (3_0) seulement pour les ρ (de $\mathfrak{M}$) $\subset r$ $\left[\text{car } \rho \text{ (de } \mathfrak{M}') = \rho^0 + e, \text{ où } \rho^0 \in \mathfrak{M}, \; e \subset \bar{\rho}^0 - \rho^0 \text{ et } \sum(\theta_n \in e)\, u_n \geqq 0\right]$. En procédant comme dans (5_1)-(8_1) et au-delà, mais avec $\mathfrak{N}'$ et R_0 au lieu de $\mathfrak{N}$ et de R, et avec $\mathrm{F}(q_{n,i,j}) \geqq 0$ au lieu de $\mathrm{F}(q_{n,i,j}) = 0$, on obtient

$$\mathrm{F}(\rho) = \lim_n \mathrm{F}(\rho r^n) \geqq 0, \quad \text{dès que } \rho \text{ (de } \mathfrak{M}) \subset r.$$

Par là (3_0) est établie, $r \in \mathfrak{N}'$; *la propriété* [4.10, (1_0)] *est vérifiée.*

Supposons qu'une famille $\mathfrak{N}'_1$, $\subset \mathfrak{N}'\mathfrak{M}$, ne couvre pas R_0. Puisque R_0 et les ensembles de $\mathfrak{N}'_1$ sont ouverts, $E = R_0 - \sum(\mathfrak{N}'_1)\rho_1$ $(\neq 0)$ est fermé dans R_0. En procédant comme dans (9_1)-(5.5), avec $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}'_1$ et R_0 au lieu de $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_1$ et R, on montre que

(4_0) Si $\mathfrak{N}'_1 = \{\rho_1\}$, $\subset \mathfrak{N}'\mathfrak{M}$, ne couvre pas R_0 et E n'est pas parfait-*s* dans R_0, il existe un r_0 de $\mathfrak{N}'\mathfrak{M}$ non couvert par $\mathfrak{N}'_1$.

Si E est parfait-*s* dans R_0, la série étant supposée totalisable sur R_0, d'après (5.3, II) pour F on conclut ainsi. Si un r (de $\mathfrak{M}$), $\subset R_0$, est joint à E, il existe un r'' (de $\mathfrak{M}$), $\subset r$ et joint à E, tel que

$$(5_0) \qquad \int_\rho F_E = \sum_{\theta_n \in \rho E} u_n \quad \text{(absolument convergente)} \geqq 0$$

pour tout ρ (de $\mathfrak{M}$) $\subset r''$. Avec $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}'_1$, R_0 et (5_0) au lieu de $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_1$, R et (12_1) nous procédons comme dans (12_1)-(5.5 *a*). Ainsi désignons par $S = \{\rho_i\}$ décompositions dans $\mathfrak{M}'$ de ρ [ρ (de $\mathfrak{M}$) $\subset r''$] :

$$\rho = \sum_{i=1}^{k'} \rho_i, \quad \rho_i \text{ (de } \mathfrak{M}') \text{ disjoints.}$$

D'après (5_0),

$$(6_0) \qquad \lim \sum{}' (\bar{\rho}_i E \neq 0)\, F(\rho_i) \geqq 0 \qquad \text{lorsque} \quad \max \varphi(\rho_i) \to 0,$$

ce qui remplace (13_1). Avec les remplacements indiqués, le texte de (13_1) jusqu'à (14_1) s'applique, où $q_{\nu,i} \in \mathfrak{N}'$ [définition de $\mathfrak{N}'$ selon (1_0)]; donc $F(q_{\nu,i}) \geqq 0$ et l'on obtient

$$F(\tilde{\rho}_\nu) = \sum_{i=1}^{s_\nu} F(q_{\nu,i}) + F(e_\nu) \geqq F(e_\nu) = \sum_{\theta_n \in e_\nu} u_n \geqq 0,$$

puisque $e_\nu \in (*)$ et $u_n \geqq 0$; de plus,

$$(7_0) \qquad F(\rho_k) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F(\tilde{\rho}_\nu) \geqq 0 \qquad \text{lorsque} \quad \bar{\rho}_k E = 0.$$

Par là

$$F(\rho) = \sum_{1}^{k'} F(\rho_i) \geqq \sum{}' (\bar{\rho}_i E \neq 0)\, F(\rho_i).$$

En laissant $M(S) \to 0$, en raison de (6_0) il vient $F(\rho) \geqq 0$ pour tout ρ (de $\mathfrak{M}$) $\subset r''$. Si $\rho^1 \in \mathfrak{M}'$ et $\rho^1 \subset \bar{r}''$, on aura

$$\rho^1 = \rho^{1,0} + e', \qquad \rho^{1,0} \in \mathfrak{M}, \qquad e' \in (*), \qquad e'\rho^{1,0} = 0$$

et

$$F(\rho^1) = F(\rho^{1,0}) + \sum (\theta_n \in e')\, u_n \geqq \sum (\theta_n \subset e')\, u_n \geqq 0.$$

Par conséquent (1_0) $r'' \in \mathfrak{N}'$; r'' (de $\mathfrak{M}$) $\in \mathfrak{N}'\mathfrak{M}$. Or r'' est joint à E, donc r'' est non couvert par $\mathfrak{N}'_1$ ($\subset \mathfrak{N}'\mathfrak{M}$). On a établi ceci :
(8_0) Si $\mathfrak{N}'_1$ ($\subset \mathfrak{N}'\mathfrak{M}$) ne couvre pas R_0 et E est parfait-*s* dans R_0, il existe un r'' de $\mathfrak{N}'\mathfrak{M}$ non couvert par $\mathfrak{N}'_1$.

En vertu de (4_0), (8_0) $\mathfrak{N}'$ (1_0) *satisfait à* [4.10, (3_0)]; $\mathfrak{N}'$ satisfait à toutes les conditions du lemme 4.10. Donc $R_0 \in \mathfrak{N}'$, *ce qui vérifie l'énoncé* (5.6 *c*). Une conséquence immédiate est la suivante.

(5.6 *d*) *Si* $u_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $(R_0)\sum T u_n = 0$ *pour tout* R_0 (*de* $\mathfrak{M}$) $\subset R$.

THÉORÈME 5.7. — *Si la série* $\sum u_n$ *est absolument convergente, la série sera totalisable et l'on aura* $(R)\sum T u_n = \sum u_n$.

Les θ_n étant dans un ensemble R de $\mathfrak{M}$, la fonction $F(r) = \sum (\theta_n \in r)\, u_n$ est complètement additive dans $\tilde{\mathfrak{M}}$ sur $\overline{R}$. F possède la propriété (5.3, I). Pour démontrer (5.3, II) nous allons établir que, si un r (de $\mathfrak{M}$) contenu dans R est joint à un ensemble p parfait-*s*, on a

$$(a_1) \qquad \int_{r_1} F_p = \sum_{\theta_n \in r_1 p} u_n \quad \text{pour tout } r_1 \text{ (de } \mathfrak{M}) \subset r,$$

ici $F_p(\rho)$ est définie pour tout ρ (de $\mathfrak{M}'$) $\subset r$ selon (5.3 *b*). D'après la définition 4.4, si l'intégrale existe,

$$(a_2) \qquad \hat{\nu} = \int_{r_1} F_p = \lim \nu', \qquad \nu' = \sum{}' (\bar{\rho}_j p \neq 0)\, F(\rho_j), \qquad M(S) \to 0,$$

où $S = \{\rho_j\}$ est une décomposition dans $\mathfrak{M}'$ de r_1, e. g.

$$(a_3) \qquad r_1 = \sum_{j=1}^{k} \rho_j, \quad \rho_j \text{ (de } \mathfrak{M}') \text{ disjoints}, \qquad M(S) = \max \underset{\sim}{\rho}(\rho_j).$$

En tenant compte de la définition de F, il vient

$$(a_4) \qquad \nu' = \sum (\theta_n \in h)\, u_n, \qquad \text{où } h = \sum{}' \rho_j.$$

Au cas $\bar{r}_1 p = 0$ on obtient $h = 0$, $\nu' = \hat{\nu} = 0$, de sorte que (a_1) a lieu pour cet ensemble r_1. *Considérons le cas* $\bar{r}_1 p \not\asymp 0$; on a $r_1 p = hp$; $r_1 p$ peut être vide ou non. *Soit* S_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *une suite dénombrablement infinie de decompositions dans* $\mathfrak{M}'$ *de* r_1, *avec* $M(S_\nu) \to 0$ (pour $\nu \to \infty$) :

$$(a_\iota) \qquad r_1 = \sum_{j=1}^{k_\nu} \rho_{\nu,j}, \quad \rho_{\nu,j} \text{ (de } \mathfrak{M}'\text{) disjoints pour } \nu \text{ fixe}, \qquad \varphi(\rho_{\nu,j}) \leqq M(S_\nu).$$

Désignons par $h_\nu = h(S_\nu)$ l'ensemble $h\,[= h(S)]\,(a_\iota)$ qui correspond à S_ν; ainsi

$$(a_\iota) \qquad h_\nu = \sum_j{}' (\bar{\rho}_{\nu,j} p \not\asymp 0)\, \rho_{\nu,j}, \qquad h_\nu \subset r_1.$$

Démontrons que, comme une conséquence de $M(S_\nu) \to 0$ et de $\bar{r}_1 p \not\asymp 0$, on a

$$(a_7) \qquad \overline{\lim_\nu}\, h_\nu = r_1 p, \qquad \text{e. g.} \quad h_\nu + h_{\nu+1} + \ldots \downarrow r_1 p \qquad \text{pour} \quad \nu \to \infty.$$

Or $h_\nu \supset h_\nu p = r_1 p$, donc $\overline{\lim_\nu} h_\nu \supset r_1 p$. Si (a_7) est en défaut, $\overline{\lim_\nu} h_\nu$ contient un point x étranger à $r_1 p$; puisque $h_\nu \subset r_1$, on aura $x \in r_1 - r_1 p$. Il existe une suite $\nu_i = \nu_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ d'entiers, $\nu_i \to \infty$, tels que $x \in h_{\nu_i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. D'après (a_ι),

$$x \in \rho_{\nu_i, j_i} \quad (\text{quelque } j_i), \qquad \text{avec} \quad \bar{\rho}_{\nu_i, j_i} p \not\asymp 0; \qquad \varphi(\rho_{\nu_i, j_i}) \leqq M(S_{\nu_i}).$$

Posons $r^i = (\rho_{\nu_i, j_i})^0$; alors il vient $r^i \subset r_1$ et

$$(1_0) \qquad r^i \in \mathfrak{M}, \qquad r^i \ni x, \qquad \bar{r}^i p \not\asymp 0, \qquad \varphi(r^i) \to 0 \quad (\text{pour } i \to \infty).$$

En vertu de l'hypothèse [2.14, (9^0)] la dernière relation dans (1_0) équivaut à ce que

$$(2_0) \qquad \rho(r^i)\,[= \sup(x_1, x_2 \text{ dans } r^i)\, \rho(x_1, x_2)] \to 0,$$

où $\rho(x_1, x_2)$ est définie selon (2.5); $\rho(r^i)$ est défini à partir d'un i_0 suffisamment grand; $\rho(r^i)$ est une sorte de pseudo-diamètre de r^i. Puisque $\bar{r}^i$ contient des points de p ainsi que le point x, il vient de (2_0) que x est un point d'accumulation de p; mais p est fermé (en effet, parfait-s), donc x $(\subset r_1)$ doit être sur p, e. g. sur $r_1 p$. Il y a une contradiction; (a_7) *est vérifiée.* [Cette démonstration reste valide même si $r_1 p$ est vide, tandis que $\bar{r}_1 p \not\asymp 0$.]

Si S est une décomposition quelconque dans $\mathfrak{M}'$ de r_1, comme dans (a_3), on définit selon (a_4) l'ensemble $h = h(\mathrm{S})$ et le nombre $\nu' = \nu'(\mathrm{S})$; on obtient

$$(a_8) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\left| \nu' - \sum (\theta_n \in r_1 p)\, u_n \right| = \left| \sum (\theta_n \in \mathrm{E}(\mathrm{S}))\, u_n \right| \\ &\qquad\qquad \leqq \sum (\theta_n \in \mathrm{E}(\mathrm{S}))\, |u_n| = \gamma(\mathrm{S}); \\ &\mathrm{E}(\mathrm{S}) = h(\mathrm{S}) - r_1 p. \end{aligned} \right.$$

On va établir que

$$(a_9) \qquad \lim \gamma(\mathrm{S}) = 0 \quad \text{pour} \quad \mathrm{M}(\mathrm{S}) \to 0,$$

la signification précise étant la suivante :

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, de sorte que

$$\gamma(\mathrm{S}) < \varepsilon \quad \text{pour toute décomposition S,} \quad \text{avec} \quad \mathrm{M}(\mathrm{S}) < \eta(\varepsilon).$$

Ainsi si (a_9) est en défaut, il existe un $\varepsilon' > 0$ pour lequel aucun $\eta(\varepsilon') > 0$ n'existe; pour *tout* $\eta > 0$ on aura

$$(1_1) \quad \gamma(\mathrm{S}) \geqq \varepsilon' \quad \text{pour une décomposition } \mathrm{S} = \mathrm{S}(\eta), \quad \text{avec} \quad \mathrm{M}(\mathrm{S}) < \eta.$$

Posons $\eta = \frac{1}{\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, $\mathrm{S}\left(\frac{1}{\nu}\right) = \mathrm{S}_\nu$. La suite S_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ de décomposition dans $\mathfrak{M}'$ de r_1 est de la sorte qui intervient dans (a_7) (on suppose toujours que $\bar{r}_1 p \neq 0$; on a (a_8) :

$$(2_1) \qquad \mathrm{E}(\mathrm{S}_\nu) = h(\mathrm{S}_\nu) - r_1 p, \qquad \overline{\lim_\nu}\, \mathrm{E}(\mathrm{S}_\nu) = 0.$$

Il convient d'introduire la fonction

$$(3_1) \qquad \mu(\mathrm{E}) = \sum (\theta_n \in \mathrm{E})\, |u_n|,$$

qui est une mesure finie et non négative. Alors $[(a_8), (1_1)]$:

$$\gamma(\mathrm{S}_\nu) = \mu(\mathrm{E}(\mathrm{S}_\nu)) \geqq \varepsilon' \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Donc, en tenant compte de (2_1), il résulte

$$\mu\big(\overline{\lim}\, \mathrm{E}(\mathrm{S}_\nu)\big) = \mu(0) \geqq \varepsilon' > 0,$$

ce qui est contradictoire; *l'énoncé* (a_9) *est vérifié.*

Par conséquent $[(a_8), (a_2)]$: la limite $\lim \nu' = \hat{\nu}$ [pour $\mathrm{M}(\mathrm{S}) \to 0$] existe et l'on a

$$\hat{\nu} = \sum (\theta_n \in r_1 p)\, u_n,$$

e. g. *la relation* (a_1) *est prouvée.* En résumé, la fonction

$$F(r) = \sum (\theta_n \in r)\, u_n$$

est complètement additive dans $\widetilde{\mathfrak{M}}$ sur $\overline{R}$ et elle jouit des propriétés (5.3, I), (5.3, II), *ce qui vérifie le théorème* 5.7.

6. Succession transfinie des calculs d'une totale des séries. — L'ensemble p étant au moins fermé, introduisons la fonction

$$(6.1) \qquad F^p(r) = F(r) \quad (\text{si } \bar{r}p = 0), \qquad = 0 \quad (\text{si } \bar{r}p \neq 0)$$

pour tout r de $\mathfrak{M}'$; d'après (5.3 *b*), on aura

$$(6.1\,a) \qquad F^p(r) = F(r) - F_p(r), \qquad r \in \mathfrak{M}'.$$

Soit R un ensemble de $\mathfrak{M}$; supposons qu'une série de u_n est totalisable sur R (définition 5.3), F étant la fonction correspondante; ainsi (5.1) a lieu, tandis que : F *est complètement additive dans* $\widetilde{\mathfrak{M}}$ sur R (définition 4.6); (I) $F(e) = \sum (\theta_n \in e)\, u_n$ (absolument convergente), si $e \in (*)$ (4.1); (5.3, II) *a lieu*. Soit p parfait-s et joint à R. D'après (5.3, II), *si r de $\mathfrak{M}$ est contenu dans* R *et est joint à p, il existe un* r' (de $\mathfrak{M}$) $\subset r$, *avec* $r'p \neq 0$, de sorte que

$$(1_0) \qquad \int_{r_1} F_p = \sum (\theta_n \in r_1 p)\, u_n \quad \text{pour tout } r_1 \text{ (de } \mathfrak{M}) \subset r',$$

la série au second membre étant absolument convergente. En particulier, F est additive dans $\mathfrak{M}'$, donc selon la proposition (4.5 *a*) : $\int_\rho F = F(\rho)$ pour ρ (de $\mathfrak{M}'$) $\subset r_1$; d'où (6.1 *a*)

$$(2_0) \qquad \int_{r_1} F_p = \int_{r_1} F - \int_{r_1} F^p = F(r_1) - \int_{r_1} F^p \quad \text{pour } r_1 \text{ (de } \mathfrak{M}) \subset r';$$

ici les intégrales de Burkill existent. En raison de (1_0) et de (2_0), il vient

$$(6.2) \qquad F(r_1) = \sum (\theta_n \in r_1 p)\, u_n + \int_{r_1} F^p$$

pour tout r_1 (de $\mathfrak{M}$) $\subset r'$ (de $\mathfrak{M}$), r' *étant un ensemble de* $\mathfrak{M}$ *dont il s'agit plus haut.*

En se rapprochant de la terminologie de Denjoy [*voir*, par exemple, (D; p. 361, 362)], nous appelons le nombre (s'il existe)

$$(6.3) \qquad \mathcal{V}(\mathrm{F}, p; r') = \mathrm{F}(r') - \int_{r'} \mathrm{F}^p$$

la variation de F *sur* p *pour* r' (de $\mathfrak{M}$); F étant de la sorte indiquée, d'après le théorème 4.5 on voit que l'existence de la variation pour un r' (de $\mathfrak{M}$) particulier entraîne l'existence de la variation pour *tout* r_1 (de $\mathfrak{M}) \subset r'$; on pourrait dire : *la variation de* F *sur* p *existe*, ou bien *est définie, dans* $r'p$. On note (6.1) que $\int_{r_1} \mathrm{F}^p (r_1 \subset r')$ ne fait intervenir les valeurs de $\mathrm{F}(\rho)$ que pour ρ (de $\mathfrak{M}'$), avec $\bar{\rho} p = 0$. On peut donc constater le fait suivant.

(6.4) Soit F la fonction qui, d'accord avec la définition 5.3, correspond à la série de u_n, supposée totalisable sur R. *Tout* r *de* $\mathfrak{M}$, *contenu dans* R *et joint à* p *parfait-s, contient un* r' (de $\mathfrak{M}$) *joint à* p, *tel que*

$$(6.4\,a) \qquad \mathcal{V}(\mathrm{F}, p; r_1) = \sum (\theta_n \in r_1 p)\, u_n \quad \text{(absolument convergente)}$$

pour tout r_1 (de $\mathfrak{M}) \subset r'$ [e. g. la variation de F sur p dans $r'p$ est définie et vaut une série convergente, comme on l'a indiqué]. *Si, en plus,* $r'p$ *est dépourvu des points* θ_n, *on aura*

$$(6.4\,b) \qquad \mathcal{V}(\mathrm{F}, p; r_1) = 0 \quad [\text{tout } r_1 \text{ (de } \mathfrak{M}) \subset r'],$$

e. g. *la variation de* F *sur* p *est définie et nulle dans* $r'p$.

La propriété (6.4 *b*) correspond à ce que dans (D; p. 351) s'appelle le caractère B. Introduisons

Définition 6.5. — Admettons l'hypothèse 4.7. On dira que *la série* $\sum u_n$ *est totalisable, au sens modifié, s'il existe une fonction* F *complètement additive dans* $\tilde{\mathfrak{M}}$, *sur* R, *satisfaisant à* (5.3, I), *telle que :* (II) si p parfait-s est joint à R et Rp *est dépourvu des points* θ_n, tout r (de $\mathfrak{M}$), contenu dans R et joint à p, contiendra un r' (de $\mathfrak{M}$), tel que $r'p \neq 0$ et $\mathcal{V}(\mathrm{F}, p; r_1) = 0$ [(6.4 *b*), (6.3)] pour tout r_1 (de $\mathfrak{M}) \subset r'$ $\left[\text{e. g. } \mathrm{F}(r_1) = \int_{r_1} \mathrm{F}^p \text{ (6.1), ou bien } \int_{r_1} \mathrm{F}_p = 0\right]$.

Si la série est totalisable au sens originel (définition 5.3), *elle le sera au sens modifié.* Dans la situation analogue dans (D) les deux définitions de totales des séries, qui correspondent à nos définitions, 5.3, 6.5, s'équivalent.

(6.6) *Si l'ensemble* $\theta = \{\theta_n\}$ *est clairsemé, les deux définitions de la totale de* $\sum u_n$ *sont équivalentes.*

Il suffit de démontrer que la seconde définition entraîne la première, e. g. que (6.5, II) implique (5.3, II). L'ensemble clairsemé θ sera non dense sur tout p parfait-s (ou bien simplement parfait). *Si un tel* p *est joint à* R *et si un* r (de $\mathfrak{M}$) *est contenu dans* R *et est joint à* p, *il existe un* $\hat{r}$ (de $\mathfrak{M}$), *tel que*

$$\hat{r} \subset r, \qquad \hat{r}p \neq 0, \qquad (\hat{r}p).\theta = 0,$$

d'après (6.5, II) (avec $\hat{r}$ pour R) $\hat{r}$ contiendra un r' $(\subset \hat{r} \subset r \subset \mathrm{R})$ de $\mathfrak{M}$, tel que $r'p \neq 0$, tandis que

$$\mathcal{V}(\mathrm{F}, p\,;\, r_1) = 0 \quad \left[\text{e g} \int_{r_1} \mathrm{F}_p = 0\right] \quad \text{pour tout } r_1 \text{ (de } \mathfrak{M}) \subset r'.$$

Ainsi (5.3 *a*) aura lieu, *ce qui vérifie* (6.6).

Au cas où $\theta = \{\theta_n\}$ n'est pas clairsemé, si l'on n'avait pas établi l'équivalence des deux définitions, on devrait au moins démontrer l'unicité de la fonction F, si elle existe, dont il s'agit dans la définition 6.5. Pour le présent nous laissons cette question de côté.

Revenons à la totale des séries selon la définition 5.3. La suite transfinie des calculs pour réaliser la totale $\sum \mathrm{T} u_n$ sera pareille à la suite des calculs (section 3) pour la totale (D). R est contenu dans un ensemble p' parfait-s. D'après (6.1),

$$\mathrm{F}^{p'}(\rho) = 0 \quad \text{pour tout } \rho \text{ (de } \mathfrak{M}') \subset \mathrm{R} \quad (\text{ou bien } \rho \subset \overline{\mathrm{R}}).$$

Si un r (de $\mathfrak{M}$) $\subset$ R, le caractère (6.2) entraîne l'existence d'un r' (de $\mathfrak{M}$), $\subset r$, tel que

$$(6.7) \qquad \mathrm{F}(r_1) = \sum (\theta_n \in r_1)\, u_n \qquad \text{(absolument convergente)}$$

pour tout r_1 (de $\mathfrak{M}$) $\subset r'$. Cela constitue le commencement du calcul de la totale des séries. Supposons que :

(6.8) p *est parfait-*s, $\mathrm{R}p \neq 0$, *et la totale* F(ρ) *est connue pour tout* ρ *(de* $\mathfrak{M}$), $\subset$ R, *tel que* $\bar{\rho}p = 0$ [ainsi, d'après la remarque 5.3′, F(ρ) *sera connue pour tout* ρ *(de* $\mathfrak{M}'$), $\subset \overline{\mathrm{R}}$, *tel que* $\bar{\rho}p = 0$].

La condition (6.8) entraîne la connaissance de $\mathrm{F}^p(\rho)$ (6.1) pour tout ρ (de $\mathfrak{M}'$) $\subset \overline{\mathrm{R}}$, tandis que le caractère (6.2) voudra dire :

(6.8 *a*) *Tout* r (de $\mathfrak{M}$), $\subset$ R, $rp \neq 0$, *contient un* r' (de $\mathfrak{M}$), $\subset r$, $r'p \neq 0$, *de sorte que* (6.2) *a lieu pour tout* r_1 (de $\mathfrak{M}$) $\subset r'$.

C'est-à-dire, (6.8) implique (6.8 *a*) et $F(r_1)$ (pour les r_1 indiqués) sera calculée moyennant (6.2), où la série est absolument convergente et l'intégrale de Burkill existe. Soit $\mathfrak{N} = \{\rho_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ la famille des ensembles de G′ (2.5), pour lesquels

$$(6.8\,b) \quad \rho_i \text{ (de } \mathfrak{M}) \subset R, \qquad \rho_i p \neq 0, \qquad F(\rho) = \sum (\theta_n \in \rho p)\, u_n + \int_\rho F^p$$

[tout ρ (de $\mathfrak{M}$) $\subset \rho_i$]; posons

$$(6.8\,c) \qquad p_1 = Rp - \sum \rho_i p.$$

En raisonnant comme à la suite de (3.4) et puisque (6.8) entraîne (6.8 *a*), il vient que p_1 (6.8 *c*) *est fermé dans* R *et est non dense sur* R*p*.

(6.9) *L'hypothèse* 4.7 *étant admise, envisageons la situation décrite dans* (6.8). *Alors* $F(r_0)$ *sera connue pour tout* r_0 *de* $\mathfrak{M}$, *tel que* $r_0 \subset R$ *et* $r_0 p = 0$.

En effet, d'après l'hypothèse [2.14, (6°)], pour $n = 1, 2, \ldots$, il se trouve un r_n de $\mathfrak{M}$ tel que $\bar{r}_n \subset r_0$, $\varphi(r_0 - r_n) < \frac{1}{n}$; $\bar{r}_n p = 0$, d'où $F(r_n)$ est connue. F est complètement additive dans $\tilde{\mathfrak{M}}$, donc d'après (4.8), F est intérieurement continue; il s'ensuit que $F(r_0) = \lim_n F(r_n)$ est connue.

Encore en admettant (6.8), notons que tout point x sur $R - Rp$ est contenu dans un ρ de G′ (2.5), tel que $\rho \subset R - Rp$, tandis que $F(\rho)$ est connue d'après (6.9); en outre, si $x \in Rp - p_1 = \sum \rho_i p$, il existe un ρ_i (dè $\mathfrak{N}$) contenant x, $F(\rho_i)$ étant connue selon (6.8 *b*). Soit $\mathfrak{N}' = \{\rho^k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ la famille des ensembles de G′ contenus dans $R - Rp$. Il s'ensuit que :

(6.8 *d*) $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}'$ couvre $R - p_1$, les $F(\rho^k)$ étant connues d'après (6.8), (6.9) et

$$F(\rho_i) = \sum (\theta_n \in \rho_i p)\, u_n + \int_{\rho_i} F^p.$$

On peut maintenant démontrer :

(6.10) *Admettons* (6.8) *et envisageons l'ensemble* p_1 (6.8 *c*), *qui est fermé dans* R *et est non dense sur* R*p*. *Alors la totale* F *est calculable pour tout* $\tilde{r}$ *de* $\tilde{\mathfrak{M}}$, *tel que* $\tilde{r} \subset R - p_1$.

D'après le lemme 4.9, avec $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}'$ (6.8 *d*) pour $\mathfrak{N}$, un $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) étant dans $R - p_1$, on conclut que des r_ν (de $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}'$) ($\nu = 1, 2, \ldots$), des $\tilde{\rho}_\nu$ et des $q_{\nu,i}$ ($i = 1, \ldots, k_\nu$) existent, tels que :

$$\text{les } \tilde{\rho}_\nu \text{ (de } \tilde{\mathfrak{M}}) \text{ sont disjoints, } \tilde{\rho}_\nu \subset r_\nu, \quad \tilde{r} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \tilde{\rho}_\nu;$$

$$\tilde{\rho}_\nu = \sum_{i=1}^{k_\nu} q_{\nu,i} + e_\nu; \text{ les } q_{\nu,i} \text{ (de } \mathfrak{M}') \text{ et } e_\nu \text{ étant disjoints; } e_\nu \in (*).$$

En tant que $q_{\nu,i} \subset r_\nu$, e. g. ou bien $q_{\nu,i}$ est dans un ρ^k ou bien $q_{\nu,i}$ est dans un ρ_j, les totales $F(q_{\nu,i})$ seront connues et l'on aura (4.9′)

$$(6.10\,a) \qquad F(\tilde{r}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F(\tilde{\rho}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{k_\nu} F(q_{\nu,i}) + F(e_\nu) \right];$$

les $F(e_\nu)$ sont aussi connues, car e_ν étant dans (*), on a

$$(6.10\,a') \qquad F(e_\nu) = \sum (\theta_n \in e_\nu)\, u_n \quad \text{(absolument convergente)};$$

si $q_{\nu,i} \subset \rho^k$, $F(q_{\nu,i})$ *sera connue en raison de* (6.8), (6.9). Si $q_{\nu,i} \subset \rho_j$, posons

$$q^0_{\nu,i} = (q_{\nu,i})^0, \qquad e_{\nu,i} = q_{\nu,i} - q^0_{\nu,i}; \qquad \text{alors } q^0_{\nu,i} \in \mathfrak{M},\ e_{\nu,i} \in (*);$$

en raison de (6.8 *b*),

$$(6.10\,b) \qquad F(q_{\nu,i}) = F(e_{\nu,i}) + F(q^0_{\nu,i}) = \sum (\theta_n \in e_{\nu,i} + q^0_{\nu,i} p)\, u_n + \int_{q^0_{\nu,i}} Fp,$$

la série au troisième membre étant absolument convergente et l'intégrale de Burkill étant définie (et déjà connue). *On a vérifié l'énoncé* (6.10).

Si la situation décrite dans (6.10) a été réalisée et si p_1 (6.8 c) n'est pas parfait-*s* dans R, nous procédons comme il suit. Si r de $\tilde{\mathfrak{M}}$ est dans $R - p_1$, $F(r)$ est connue; en plus, même si $r \subset R - p_1$ et $\bar{r} p_1 \neq 0$, $F(r)$ sera connue : $F(\bar{r}) = F(r) + F(e)$, $e = \bar{r} - r \in (*)$ (4.1) et

$$F(e) = \sum (\theta_n \in e)\, u_n \qquad \text{(absolument convergente)}.$$

Soit $\mathfrak{N} = \{\rho_i\}$ ($i = 1, 2, \ldots$) la famille des ensembles de G′, pour lesquels

$$(6.11) \quad \rho_i \subset R, \qquad \rho_i p_1 \neq 0, \qquad \rho_i p \subset q_i = \bar{r}_i - r_i \quad (r_i \text{ etant un ensemble de } \mathfrak{M}).$$

$\mathfrak{N}$ couvre *l'ensemble* e_1 *des points isolés-s dans* p_1*;*

$$\rho_\iota - \rho_\iota p_1 \in \tilde{\mathfrak{M}} \qquad \text{et} \qquad \rho_\iota - \rho_\iota p_1 \subset \mathrm{R} - p_1,$$

donc $F(\rho_\iota - \rho_\iota p_1)$ est connue. Ainsi

$$(6.11\,a) \qquad F(\rho_\iota) = F(\rho_\iota - \rho_\iota p_1) + F(\rho_\iota p_1) = F(\rho_\iota - \rho_\iota p_1) + \sum (\theta_n \in \rho_\iota p_1)\, u_n,$$

la dernière série étant absolument convergente; par conséquent, on peut considérer que la totale a déjà été calculée dans tout ρ_ι de $\mathfrak{N}$. Soient

$$(6.11\,b) \qquad p_2 = p_1 - e^1 \quad \text{un } \tilde{r} \text{ de } \tilde{\mathfrak{M}} \text{ contenu dans } \mathrm{R} - p_2,$$

$e^1 = \sum \rho_\iota p_1$ et p_2 *est fermé dans* R; $\mathrm{R} - p_1$ est couvert par la famille $\mathfrak{N}' = \{\rho^k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ des ensembles de G' dans $\mathrm{R} - p_1$; $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}'$ couvre $\mathrm{R} - p_2$. La totale est connue dans chacun des ensembles de $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}'$. Moyennant le lemme 4.9 et en procédant comme à la suite de (6.10), on trouve des r_ν (de $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}'$) $(\nu = 1, 2, \ldots)$, des $q_{\nu,\iota}$ $(i = 1, \ldots, k_\nu)$ et des e_ν [de (*)], tels que :

$$\text{les } q_{\nu,\iota} \text{ (de } \mathfrak{M}') \text{ et } e^\nu \text{ sont disjoints; les } \tilde{\rho}_\nu = \sum_{\iota=1}^{k_\nu} q_{\nu,\iota} + e^\nu \text{ sont disjoints;}$$

$$\tilde{\rho}_\nu \subset r_\nu, \qquad \tilde{r} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \tilde{\rho}_\nu.$$

Alors il vient

$$(6.11\,c) \quad F(\tilde{r}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\sum_{\iota=1}^{k_\nu} F(q_{\nu\iota}) + F(e^\nu) \right], \qquad F(e_\nu) = \sum (\theta_n \in e^\nu)\, u_n,$$

de sorte que $F(\tilde{r})$ est calculée. On conclut ainsi :

(6.12) p_2 *étant l'ensemble* p_1 (6.8 *c*) *dépourvu des points isolés-s dans* p_1, *supposons que la totale* F *a été calculée pour tout* $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset \mathrm{R} - p_1$. *Comme une conséquence,* F *sera connue, d'accord avec* (6.11 *b*)-(6.11 *c*) *pour tout* $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset \mathrm{R} - p_2$.

En continuant ainsi transfiniment, si cela est nécessaire, nous allons résoudre le problème de totalisation dans $\mathrm{R} - p^*$, où p^* est *le noyau parfait-s dans* R *de* p_1. *Soit* β *un transfini des classes* I, II *et supposons que la totale a été calculée pour tout* $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset \mathrm{R} - p_\alpha$, *pour tout* $\alpha < \beta$. Si β est de *première espèce*, $p_\beta = p_{\beta-1} - e^{\beta-1}$, où $e^{\beta-1}$ est l'ensemble des points isolés-s dans $p_{\beta-1}$; *alors,* F étant connue pour tout $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset \mathrm{R} - p_{\beta-1}$, *on résout le problème dans* $\mathrm{R} - p_\beta$ *d'accord avec le texte qui de* (6.11) *mène à* (6.12) [avec $p_{\beta-1}$, $e^{\beta-1}$ et p_β au lieu de p_1, e^1 et p_2, $\mathfrak{N} = \{\rho_i\}$ désignant les ρ de G', tels que $\rho \subset \mathrm{R}$, $\rho p_{\beta-1} \neq 0$ et que $\rho p_{\beta-1}$ est contenu dans la frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}$, tandis que $\mathfrak{N}' = \{\rho^k\}$ consiste des ρ de G', contenus dans $\mathrm{R} - p_{\beta-1}$]. Si β est de *seconde espèce*, on pose $p_\beta = \prod (\alpha < \beta)\, p_\alpha$ et l'on introduit la famille $\mathfrak{N} = \{\rho_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ des ensembles de G', tels que

(6.13) $$\rho_i \subset \mathrm{R} - p_\alpha \quad \text{pour un } \alpha < \beta.$$

Il s'ensuit que

(6.13 *a*) si x est un point de $\mathrm{R} - p_\beta$, un ρ_i de $\mathfrak{N}$ contiendra x.

Cela s'établit par le raisonnement qui survient à la suite de (3.12 *a*). Ainsi, *avec* β *de seconde espèce,* $\mathfrak{N}$ (6.13) *couvre* $\mathrm{R} - p_\beta$ *et, la totale* F *étant connue dans chaque* ρ_i, *on résout le problème dans* $\mathrm{R} - p_\beta$ *au sens que, pour* $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset \mathrm{R} - p_\beta$, $\mathrm{F}(\tilde{r})$ *se calcule par une formule comme* (6.11 *c*) [qui provient par les procédés survenant à la suite de (6.11 *b*), mais avec $\mathfrak{N}$ (6.13) au lieu de $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}'$ (6.11); tout $q_{\nu, i}$ est dans un ensemble de $\mathfrak{N}$; $e^\nu \in (*)$].

Les p_α (α transfini des classes I, II) sont fermés dans R; $p_\alpha \supset p_{\alpha+1}$. Par conséquent, pour un α_0 (des classes I, II) la suite se stabilise et

(6.14) $$p^* = p_{\alpha_0} \quad \textit{est parfait-s dans } \mathrm{R},$$

tandis que F *est connue pour tout* $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset \mathrm{R} - p^*$ $(p^* \subset p_1 \subset p)$, cela étant dans la supposition (6.8).

(6.15) *Soit* p, $\subset \mathrm{R}$, *parfait-s dans* R*; l'ensemble* p_1 (6.8 *c*), $\subset p$, *sera fermé dans* R *et non dense sur* p. *L'ensemble* $p^* = p_{\alpha_0}$ (6.14), $\subset p_1$, *est le noyau parfait-s dans* R *de* p_1. *Désignons par* (*) *l'opération qui de* p, *ou bien de* p_1, *mène à* p^* (6.14) :

(6.15 *a*) $$(p)^* = p^*;$$

(6.15 *b*) $$(p_1)^* = p^*.$$

Les développements (6.8)-(6.14) présentent un moyen effectif pour *calculer la totale dans* $\mathrm{R} - p^*$, *lorsque la totale est connue dans* $\mathrm{R} - p$, *ou bien dans* $\mathrm{R} - p_1$.

Comme on a mentionné en rapport avec (6.7), un ensemble p' parfait-*s* contient R; ainsi $\mathrm{R} = \mathrm{P}_0$ *est un ensemble parfait-s dans* R.

En procédant selon (6.8)-(6.8 *c*), avec P_0 pour p, la famille $\mathfrak{N} = \{\rho_i\}$ sera formée des ρ_i de G' pour lesquels

$$(6.16)\quad \rho_i \subset R, \qquad F(\rho) = \sum (\theta_n \in \rho)\, u_n \qquad \text{(absolument convergente)}$$

[tout ρ (de $\mathfrak{M}$) $\subset \rho_i$]; l'ensemble $P_{0,1} = R - \sum \rho_i$ sera fermé dans R et non dense sur $P_0 (= R)$. D'après (6.10), où $p = P_0$ et $p_1 = P_{0,1}$, *la totale obtenue pour tout* $\tilde{r}$ *de* $\mathfrak{M}$ *contenu dans* $R - P_{0,1}$; le calcul est réalisé moyennant (6.16), sans faire intervenir l'intégrale de Burkill. *Tel est le commencement du calcul de la totale.* Le noyau parfait-*s* dans R de $P_{0,1}$ est un ensemble P_1 tel que

$$P_1 = (P_0)^* = (R)^* \quad (6.15\,a), \qquad P_1 = (P_{0,1})^* \quad (6.15\,b).$$

Corrélativement, d'après l'énoncé (6.15), la totale est calculée dans $R - P_1$. On obtient une suite d'ensembles

$$(6.17)\quad R = P_0 > P_{0,1} \geqq P_1 > P_{1,1} \geqq P_2 > P_{2,1} > \ldots > P_{\alpha,1} \geqq P_{\alpha+1} > \ldots,$$

comme dans (3.20), (3.20 *a*);

$P_{\beta+1} = (P_\beta)^*$ (6.15 *a*), si β est de première espèce;

$P_{\beta,1} = \prod (\alpha < \beta)\, P_{\alpha,1} = \prod (\alpha < \beta)\, P_\alpha$, si β est de seconde espèce;

$P_{\alpha+1} = (P_{\alpha,1})^*$ (6.15 *b*);

pour $\beta > 0$ de première espèce $P_{\beta,1} = P_\beta - \sum \rho_i P_\beta$, où $\{\rho_i\}$ est la famille des ensembles de G', tels que

$$(6.17\,a)\quad \rho_i \subset R, \qquad \rho_i P_\beta \neq 0, \qquad F(\rho) = \sum (\theta_n \in \rho P_\beta)\, u_r + \int_\rho F^{P_\beta}$$

pour tout ρ (de $\mathfrak{M}$) $\subset \rho_i$. Les $P_{\alpha,1}$ ($\alpha \geqq 0$) sont fermés dans R et forment une suite strictement décroissante. *On a* $P_{\alpha',1} = 0$ *pour un* α' *de première espèce.* Si β est de première espèce et F est connue dans $R - P_{\beta-1,1}$, d'accord avec (6.15) F est calculée dans $R - P_\beta$, où P_β est le noyau parfait-*s* dans R de $P_{\beta-1,1}$ et $P_\beta = (P_{\beta-1,1})^*$ (6.15 *b*). Puis on obtient F dans $R - P_{\beta,1}$, $P_{\beta,1}$ étant un certain ensemble fermé dans R et non dense dans P_β; cela se fait selon la constatation (6.10), où $p = P_\beta$ et $p_1 = P_{\beta,1}$.

Si β est de *seconde espèce* et F est connue dans $R - P_{\alpha,1}$ pour tout $\alpha < \beta$, introduisons la famille $\mathfrak{N} = \{\rho_i\}$ ($i = 1, 2, \ldots$) des ensembles de G', chacun contenu dans $R - P_{\alpha,1}$ pour un $\alpha < \beta$. Or $P_{\beta,1}$ est l'intersection des $P_{\alpha,1}$ ($\alpha < \beta$); les $P_{\alpha,1}$ sont fermés dans R.

Par le raisonnement qui intervient à la suite de (3.12 *a*) [et qui a été employé dans (6.13), (6.13 *a*)] on déduit que $\mathfrak{N}$ *couvre* $R - P_{\beta,1}$; F *étant* connue dans chacun des ρ_i, F est obtenue pour tout $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset R - P_{\beta,1}$ moyennant la famille (6.11 *c*), d'accord avec les développements (6.11 *b*)-(6.11 *c*) [où $\mathfrak{N}$ (au sens présent) remplace $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}'$ (6.11) et $P_{\beta,1}$ remplace p_2; $q_{\nu,i}$ sera dans un ensemble de $\mathfrak{N}$]. Ce calcul est fondé sur le lemme 4.9 et sur la propriété de l'additivité complète dans $\tilde{\mathfrak{M}}$ de la totale.

De la façon indiquée on calcule la totale successivement dans les ensembles $R - P_{\alpha,1}$. *La suite des calculs est terminée et la totale est obtenue dans* R, *dès que* $\alpha = \alpha'$ (transfini des classes I, II) *minimal est tel que* $P_{\alpha',1} = 0$.

7. Transformation de la totale (D) en une totale des séries. — Soient R un ensemble de $\mathfrak{M}$ et $f(x)$ une fonction totalisable (D) sur R :

$$(7.1)\qquad (D)\int_r f(x)\,d\varphi(x) = \psi(r)\quad \text{(pour tous les } r \text{ de } \tilde{\mathfrak{M}} \text{ contenus dans R).}$$

Les sections 2 et 3 s'appliquent; en particulier, la définition (2.18), (2.18 *a*) a lieu pour f et ψ. *Nous admettons l'hypothèse* 4.7. Ainsi *la continuité intérieure de* $\psi(r)$ *sera une conséquence de l'additivité complète dans* $\tilde{\mathfrak{M}}$ *de* ψ. De plus, *dans la section présente et dans la suivante nous admettons la compacticité des fermetures d'ensembles de* $\mathfrak{M}$; *cette propriété n'intervient qu'à partir de* (7.15).

Envisageons le commencement de la totalisation (D) de f, comme on l'a indiqué à la suite de (3.17 *a*). $\mathfrak{N}_{0,1} = \{\rho_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ étant la famille des ensembles de G′ pour lesquels

$$(1_1)\qquad \rho_i \subset R,\qquad \psi(\rho) = (L)\int_\rho f\,d\varphi\quad (\text{pour tout } \rho,\ \in \mathfrak{M},\ \subset \rho_i),$$

on introduit l'ensemble

$$(2_1)\qquad P_{0,1} = R - \sum \rho_i,\quad \text{fermé dans R et non dense sur R.}$$

On a $\sum \rho_i = R - P_{0,1}$. Introduisons

DÉFINITION 7.2. — *Si un ensemble* E *est contenu dans la réunion finie ou dénombrable de frontières d'ensembles de* $\mathfrak{M}$, *on dira que* E *est* (**); E $\in$ (**).

En posant

$$(3_1)\qquad \begin{cases} \rho'_1 = \rho_1, \quad \rho'_2 = \rho_2 - \rho_2\rho_1, \quad \dots, \\ \rho'_n = \rho_n - \rho_n(\rho_1 + \dots + \rho_{n-1}), \quad \dots, \end{cases}$$

il vient que les $\rho'_n \in \tilde{\mathfrak{M}}$, les ρ'_n sont disjoints et

$$(4_1)\qquad \mathrm{R} - \mathrm{P}_{0,1} = \sum \rho'_n.$$

Tout ρ'_n possède des décompositions

$$(5_1)\qquad \rho'_n = \sum_{i=1}^{k_n} q_{n,i} + e_n; \qquad \text{les } q_{n,i} \text{ (de } \mathfrak{M}\text{) disjoints;} \qquad e_n \in (^*).$$

Il en résulte que

$$(6_1)\qquad \mathrm{R} - \mathrm{P}_{0,1} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_n} q_{n,i} + \mathrm{E}_{0,1} = \sum_{j=1}^{\infty} q_{0,j} + \mathrm{E}_{0,1}, \qquad \mathrm{E}_{0,1} \in (^{**}),$$

$\{q_{0,j}\}$ étant un arrangement en une suite simple de $\{q_{n,i}\}$; *les* $q_{0,j} \in \mathfrak{M}$ *et* $\mathrm{E}_{0,1}$ *sont disjoints; tout* $q_{0,j}$ *est dans un* ρ_k *de la famille* $\mathfrak{N}_{0,1}$ (1_1).

(7.3) *Désignons par* $\mathcal{F}_0$ *la famille* $\{q_{0,j}\}$.

On peut décomposer $\mathrm{E}_{0,1}$ en une suite d'ensembles $\mathrm{E}(j)$ $(j = 1, 2, \dots)$ disjoints, chacun dans (*), donc dans $\tilde{\mathfrak{M}}$; par là

$$(7_1)\quad \mathrm{R} - \mathrm{P}_{0,1} = \sum_{j=1}^{\infty} (q_{0,j} + \mathrm{E}(j)) = \lim_n q^n, \qquad q^n = \sum_{j=1}^{n} (q_{0,j} + \mathrm{E}(j)) \in \tilde{\mathfrak{M}}.$$

Si $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset \mathrm{R} - \mathrm{P}_{0,1}$, on aura $\tilde{r}q^n \in \tilde{\mathfrak{M}}$ et $\tilde{r}q^n \uparrow \tilde{r}$. Alors, d'après l'additivité complète dans $\tilde{\mathfrak{M}}$ de ψ et puisque $\tilde{r}\,\mathrm{E}(j) \in (^*)$,

$$\begin{aligned}\psi(r) = \lim_n \psi(\tilde{r}q^n) &= \lim_n \sum_{j=1}^{n} \psi(\tilde{r}q_{0,j} + \tilde{r}\,\mathrm{E}(j)) \\ &= \lim_n \sum_{j=1}^{n} \psi(\tilde{r}q_{0,j}) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi(\tilde{r}q_{0,j}).\end{aligned}$$

Parce que $\tilde{r}q_{0,j}$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) est dans un ρ_k (1_1), $\psi(\tilde{r}q_{0,j})$ est l'intégrale-L de f sur $\tilde{r}q_{0,j}$, e. g. *pour* $\tilde{r} \subset \mathrm{R} - \mathrm{P}_{0,1}$

$$(7.4)\qquad \psi(\tilde{r}) = \sum_{j=1}^{\infty} u_{0,j}(\tilde{r}), \qquad \text{où} \quad u_{0,j}(\tilde{r}) = (\mathrm{L}) \int_{\tilde{r}q_{0,j}} f\, d\varphi.$$

Notons que $u_{0,j}(\tilde{r})$ est définie pour *tout* $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset$ R. La série (7.4) est absolument convergente, en tant que l'ordre de termes n'importe pas, cet ordre dépendant du dénombrement de la suite $\{q_{0,j}\}$.

Notons le fait général suivant :

(7.5) *Soit* F_1 *fermé. Pour* α (> 1) *des classes* I, II *on définit* F_α *comme il suit. Si* α *est de la première espèce,* $F_\alpha = F_{\alpha-1} - e_{\alpha-1}$, *où* $e_{\alpha-1}$ *est l'ensemble des points de* $F_{\alpha-1}$ *isolés-s dans* $F_{\alpha-1}$; *si* α *est de la seconde espèce,* $F_\alpha = \prod (\gamma < \alpha) F_\gamma$. *Soit* α' *l'indice minimal tel que* $F_{\alpha'}$ *est parfait-s, ou bien est vide. Alors* $F_1 - F_{\alpha'} \in (^{**})$ (*définition* 7.2).

Cela peut être démontré moyennant des méthodes du genre survenant dans [T; section 4; en particulier (4.2), théorème 4.3], avec les points isolés au sens ordinaire remplacés par des sous-ensembles des frontières d'ensembles de $\mathfrak{M}$.

Envisageons la suite transfinie (3.18) de $P_{0,\alpha}$, ces ensembles étant définis à partir de $P_{0,1}$ d'accord avec le texte à la suite de (3.18). Pour un α_0 (des classes I, II) minimal $P_1 = P_{0,\alpha_0}$ ($\subset$ R) est parfait-*s* dans R (ou bien vide). Or ces ensembles $P_{0,\alpha}$ $(\alpha \geqq 1)$ possèdent les propriétés des F_α dans l'énoncé (7.5); ainsi

$$P_1 = P_{0,1} - E_1, \quad E_1 \in (^{**}); \qquad R - P_1 = (R - P_{0,1}) + E_1.$$

Selon (6_1),

$$R - P_1 = \sum_{j=1}^{\infty} q_{0,j} + E^1, \qquad E^1 = E_{0,1} + E_1 \in (^{**}). \tag{7.6}$$

Reprenons le raisonnement, qui de (7_1) mène à (7.4), mais avec P_1 et E^1 au lieu de $P_{0,1}$ et de $E_{0,1}$, et pour $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) dans $R - P_1$, plutôt que pour $\tilde{r}$ dans $R - P_{0,1}$. On obtient

$$\psi(\tilde{r}) = \sum u_{0,j}(\tilde{r}) \quad \text{pour tout } \tilde{r} \text{ (de } \tilde{\mathfrak{M}}) \subset R - P_1. \tag{7.6 a}$$

Désignons par $\mathfrak{N}_{1,1} = \{\rho_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ la famille des ensembles de G′ tels que

$$(8_1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \rho_i \subset R, \qquad \rho_i P_1 \neq 0, \qquad \psi(\rho) = (L)\displaystyle\int_{\rho P_1} f\, d\varphi + \int_\rho^{*} \psi^{P_1} \\ \qquad\qquad\qquad [\text{pour tout } \rho \text{ (de } \mathfrak{M}) \subset \rho_i]; \end{array} \right.$$

il est entendu que l'intégrale de Lebesgue et l'intégrale de Burkill au dernier membre existent. Comme on a déjà indiqué dans la section 3, l'ensemble

$$(9_1) \qquad P_{1,1} \overset{*}{=} P_1 - P_1 \sum \rho_i \quad \text{est fermé dans R et est non dense sur } P_1.$$

En tenant compte de la dernière relation et de (7.6), on déduit

$$(10_1)\qquad R - P_{1,1} = (R - P_1) + (P_1 - P_{1,1}) = \left[\sum_{j=1}^{\infty} q_{0,j} + E^1\right] + P_1 \sum \rho_i;$$

les ensembles $P_1 \rho_i$ sont disjoints des $q_{0,j}$ et de E^1 [$\in$ (**)].

Pour les ρ_i de $\mathfrak{M}_{1,1}$ (8_1) posons

$$\rho'_1 = \rho_1, \qquad \rho'_n = \rho_n - \rho_n(\rho_1 + \ldots + \rho_{n-1}) \qquad (n > 1).$$

Chaque ρ'_n (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) a une décomposition dans $\mathfrak{M}$

$$(11_1)\qquad \rho'_i = \sum_{\nu=1}^{k_i} \rho_{i,\nu} + e_i, \quad \text{les } \rho_{i,\nu} \text{ (de } \mathfrak{M}\text{) disjoints}, \quad e_i \in (^*).$$

Arrangeons les $\rho_{i,\nu}$ en une suite simple $p_{1,i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Il vient

$$(12_1)\qquad P_1 \sum_1^{\infty} \rho_i = \sum_1^{\infty} P_1 p_{1,i} + \sum e'_i, \qquad e'_i = P_1 e_i \in (^*).$$

Les $P_1 p_{1,i}$ sont disjoints entre eux et ils sont disjoints des $q_{0,j}$ (car $q_{0,j} \subset R - P_1$). De plus, $p_{1,i}$ (de $\mathfrak{M}$) étant dans un ρ_k (de $\mathfrak{M}_{1,1}$), d'après (8_1) l'expression

$$(L)\int_{\rho P_1} f\,d\varphi + \int_\rho \psi$$

existe pour tout ρ (de $\mathfrak{M}$) $\subset p_{1,i}$; en particulier, les intégrales-L

$$(7.7)\qquad \nu_{1,i}(\tilde{r}) = (L)\int_{\tilde{r} P_1 p_{1,i}} f\,d\varphi$$

existent pour tout $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset R$. D'après (10_1), (12_1)

$$(13_1)\quad R - P_{1,1} = \sum_{j=1}^{\infty} q_{0,j} + \sum_{i=1}^{\infty} P_1 p_{1,i} + E_{1,1}, \qquad E_{1,1} = E^1 + \sum e'_i \in (^{**}),$$

les ensembles au second membre étant disjoints. Moyennant l'énoncé (7.5), P_2 désignant le noyau parfait-s de $P_{1,1}$, il vient $P_2 = P_{1,1} - E_2$, avec E_2 dans (**). Par conséquent, (13_1)

$$(7.7\,a)\quad \begin{cases} R - P_2 = (R - P_{1,1}) + E_2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} q_{0,j} + \sum_{i=1}^{\infty} P_1 p_{1,i} + E^2, \\ E^2 = E_{1,1} + E_2 \in (^{**}). \end{cases}$$

(7.8) *Désignons par* $\mathcal{F}_1$ *la famille* $\{q_{0,j}\} + \{P_1 . p_{1,i}\}$. On note que $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1$. Les $P_{\alpha,1}$, $P_{\alpha+1}$ (α des classes I, II) étant les ensembles spécifiés dans (3.20), on déduit progressivement (d'abord pour $n < \omega$) que

$$(7.9)\quad \begin{cases} R - P_n = \sum_{j=1}^{\infty} q_{0,j} + \sum_{j=1}^{\infty} P_1 p_{1,j} + \ldots + \sum_{j=1}^{\infty} P_{n-1} p_{n-1,j} + E^n, \\ E^n \in (^{**}). \end{cases}$$

Ici les $p_{n-1,j}$ sont obtenus en rapport avec la famille $\mathfrak{M}_{n-1,1} = \{\rho_i\}$ des ρ_i de G', tels que

$$(14_1)\quad \begin{cases} \rho_i \subset R, \qquad \rho_i P_{n-1} \neq 0, \qquad \psi(\rho) = (L)\int_{\rho P_{n-1}} f\,d\varphi + \int_{\rho} \psi P_{n-1} \\ [\text{tout } \rho \text{ (de } \mathfrak{M}) \subset \rho_i]. \end{cases}$$

On pose

$$\rho'_1 = \rho_1, \qquad \rho'_k = \rho_k - \rho_k(\rho_1 + \ldots + \rho_{k-1}) \qquad (k > 1)$$

et l'on décompose tout ρ'_i dans $\mathfrak{M}$, obtenant une formule comme (11_1), les $\rho_{i,\nu}$ ($\nu = 1, \ldots, k_i$) étant des composants dans $\mathfrak{M}$ de ρ'_i; les $p_{n-1,j}$ (n fixe), $j = 1, 2, \ldots,$ constituent un arrangement en une série simple de la famille $\{\rho_{i,\nu}\}$ ($\nu = 1, \ldots, k_i$; $i = 1, 2, \ldots$). Les ensembles

$$(15_i)\qquad q_{0,j},\quad P_1 p_{1,j},\quad \ldots,\quad P_{n-1} p_{n-1,j} \qquad (j = 1, 2, \ldots)'$$

sont disjoints; *de plus les intégrales*-L *de* f *sur ces ensembles existent.* Nous posons [pour tout $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset$ R]

$$(7.9\,a)\qquad v_{k,i}(\tilde{r}) = (L)\int_{\tilde{r} P_k p_{k,i}} f\,d\varphi \qquad (1 \leq k < \omega).$$

En posant $P_0 = R$, $p_{0,i} = q_{0,i}$, on peut définir $v_{0,i}(\tilde{r})$ selon (7.9 *a*), obtenant $v_{0,i}(\tilde{r}) = u_{0,i}(\tilde{r})$ (7.4).

(7.10) *On désigne par* $\mathcal{F}_{n-1}$ *la famille*

$$\{q_{0,j}\} + \{P_1 p_{1,j}\} + \ldots + \{P_{n-1} p_{n-1,j}\}.$$

Les ensembles de $\mathcal{F}_{n-1}$ sont disjoints; $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n-1}$. On peut exprimer (7.9) ainsi :

$$(7.10\,a)\qquad R - P_n = S(\mathcal{F}_{n-1}) + (^{**});$$

ici et dans la suite S(...) *dénote la réunion des ensembles de la famille* (...) *qui survient.* On a aussi

$$(7.10\,b)\qquad R - P_{n-1,1} = S(\mathcal{F}_{n-1}) + (^{**})$$

P_n est le noyau parfait-s de $P_{n-1,1}$ et $P_{n-1,1} - P_n = (**)$]. Nous [écrivons

$$(7.11)\qquad \mathcal{F}_\omega = \sum_{n<\omega} \mathcal{F}_n = \{q_{0,j}\} + \{P_n p_{n,j}\} \qquad (1 \leqq n < \omega;\ j = 1, 2, \ldots).$$

Or

$$P_{\omega,1} = \prod (n < \omega)\, P_{n,1} = \prod (n < \omega)\, P_n,$$

donc

$$R - P_{\omega,1} = \sum_{n<\omega} (R - P_{n,1}) = \sum_{n<\omega} R - P_n$$

Il en résulte que

$$(7.11\,a)\qquad R - P_{\omega,1} = S(\mathcal{F}_\omega) + E_{\omega,1}, \qquad E_{\omega,1} = (**).$$

$P_{\omega+1}$ étant le noyau parfait-s de $P_{\omega,1}$, d'après (7.5) $P_{\omega,1} - P_{\omega+1} = (**)$ et

$$(7.11\,b)\qquad R - P_{\omega+1} = S(\mathcal{F}_\omega) + E^\omega, \qquad E^\omega = (**).$$

Si pour un α *des classes* I, II $\mathcal{F}_\alpha$ *est connue, tandis que l'ensemble* $R - S(\mathcal{F}_\alpha)$ *n'est ni vide ni un* (**), *indiquons comment on forme la famille* $\mathcal{F}_{\alpha+1}$. On a

$$(7.12)\quad \begin{cases} R - P_{\alpha,1} = S(\mathcal{F}_\alpha) + E_{\alpha,1}, \qquad R - P_{\alpha+1} = S(\mathcal{F}_\alpha) + E^{\alpha+1}, \\ \qquad\qquad E_{\alpha,1} \text{ et } E^{\alpha+1} \text{ dans } (**), \end{cases}$$

$P_{\alpha+1}$ étant le noyau parfait-s de $P_{\alpha,1}$. Envisageons *la famille* $\mathfrak{N}_{\alpha+1,1} = \{\rho_i\}$ *des ensembles de* G', *tels que*

$$(16_1)\quad \begin{cases} \rho_i \subset R, \qquad \rho_i P_{\alpha+1} \neq 0, \qquad \psi(\rho) = (L)\displaystyle\int_{\rho P_{\alpha+1}} f\,d\varphi + \int_\rho \psi P^{\alpha+1} \\ \qquad\qquad]\text{tout } \rho \text{ (de } \mathfrak{M}) \subset \rho_i]. \end{cases}$$

Moyennant les procédés survenant à la suite de (14_1) [pour obtenir une suite simple $p_{n-1,j}$ (n fixe)] on trouve une suite de $p_{\alpha+1,j}$ $(j = 1, 2, \ldots)$, tels que

$$(17_1)\quad \begin{cases} \text{Les } p_{\alpha+1,j}\ (\alpha \text{ fixe) sont disjoints; } p_{\alpha+1,j} \in \mathfrak{M}; \\ \textit{tout } p_{\alpha+1,j} \textit{ est dans un } \rho_k\ (\textit{de } \mathfrak{N}_{\alpha+1,1});\ \displaystyle\sum \rho_k - \sum_j p_{\alpha+1,j} = (**). \end{cases}$$

Enfin on pose

$$(7.12\,a)\qquad \mathcal{F}_{\alpha+1} = \mathcal{F}_\alpha + \{P_{\alpha+1} p_{\alpha+1,j}\}.$$

D'après la seconde relation (7.12), les ensembles de $\mathcal{F}_\alpha$ sont dans $R - P_{\alpha+1}$, donc *les ensembles de* $\mathcal{F}_{\alpha+1}$ *sont disjoints, comme ceux de* $\mathcal{F}_\alpha$. On vérifie que *les relations* (7.12) *sont remplies avec* α *remplacé* par $\alpha+1$. *Si* β *est de la première espèce et* $\mathcal{F}_{\beta-1}$ *est connu,* $\mathcal{F}_\beta = \mathcal{F}_{\beta-1} + \{P_\beta p_{\beta,j}\}$; *si* β *est de la seconde espèce et les* $\mathcal{F}_\alpha$ $(\alpha < \beta)$ *sont connues, on a* $\mathcal{F}_\beta = \sum_{\alpha<\beta} \mathcal{F}_\alpha$. *Dans tous les cas* (7.12) *a lieu.* Pour β quelconque des classes I, II on obtient

$$\mathcal{F}_\beta = \{q_{0,j}\} + \sum (1 \leqq \alpha \leqq \beta) \{P_\alpha p_{\alpha,j}\}, \tag{7.12 b}$$

où pour α de seconde espèce on considère $P_\alpha p_{\alpha,j}$ comme vide [pour un tel α les P_α, $p_{\alpha,j}$ n'étaient pas définis].

En revenant à la suite transfinie (3.20), on note que pour un certain α' minimal (des classes I, II) $\varphi(P_{\alpha',1}) = 0$ (nécessairement α' est de la première espèce). On a $P_{\alpha'-1,1} \geqq P_{\alpha'} > P_{\alpha',1}$ mince.

D'après (7.12) (pour $\alpha = \alpha'$)

$$\left\{ \begin{array}{l} R = S(\mathcal{F}_{\alpha'}) + E', \\ E' = P_{\alpha',1} + E_{\alpha',1} \quad \text{disjoint de } S(\mathcal{F}_{\alpha'}),\ \varphi(E') = 0. \end{array} \right. \tag{7.13}$$

Les ensembles de $\mathcal{F}_{\alpha'}$ sont

$$q_{0,j},\ P_{\alpha,j} \qquad (1 \leqq \alpha \leqq \alpha';\ j = 1, 2, \ldots), \tag{7.13 b}$$

où $P_\alpha p_{\alpha,j}$ est considéré comme inexistant dès que α est de seconde espèce. Les intégrales-L de f existent sur chacun des ensembles de $\mathcal{F}_{\alpha'}$. Si $\tilde{r}$ (de $\mathfrak{M}$) $\subset R$, on pose

$$\left\{ \begin{array}{ll} v_{\alpha,j}(\tilde{r}) = (L)\displaystyle\int_{\tilde{r} P_\alpha p_{\alpha,j}} f\, d\varphi & (1 \leqq \alpha \leqq \alpha';\ \alpha \text{ de première espèce}); \\ v_{0,j}(\tilde{r}) = (L)\displaystyle\int_{\tilde{r} q_{0,j}} f\, d\varphi = u_{0,j}(\tilde{r}) & (P_0 = R,\ p_{0,j} = q_{0,j}). \end{array} \right. \tag{7.13 c}$$

Dans la suite on considère seulement les $p_{\alpha,j}$, *tels que* $\varphi(P_\alpha p_{\alpha,j}) > 0$.

Sous les conditions intervenant dans le texte en rapport avec (2.7), (2.7 *a*), la *pseudo-distance* $\rho(x_1, x_2)$ de deux points x_1, x_2 est définie; l'inégalité triangulaire peut être en défaut pour la pseudo-distance. Si A est un ensemble, son *pseudo-diamètre* $\rho(A)$ est défini comme

$$\rho(A) = \sup \rho(x, y) \qquad (\text{pour } x, y \text{ sur } A), \tag{7.14}$$

pourvu que $\rho(x, y)$ soit définie pour x, y sur A. *On peut étendre la définition de la pseudo-distance de sorte qu'elle existe pour tout couple de points.* Il est possible de diriger les développements donnés plus haut dans la section actuelle en remplaçant R par $\overline{\mathrm{R}}$ [un ensemble fermé (parfait-s) relativement à R devient fermé (parfait-s) au sens absolu], de sorte que les propriétés suivantes aient lieu.

(7.15) *Dans chaque ensemble* $\mathrm{P}_\alpha p_{\alpha,j}$ (épais) *de* $\mathcal{F}_{\alpha'}$ *choisissons un point* $\theta_{\alpha,j}$ [$0 \leqq \alpha \leqq \alpha'$; $j = 1, 2, \ldots$; α de première espèce] et considérons que $\theta_{\alpha,j}$ est associé avec $\mathrm{P}_\alpha p_{\alpha,j}$ (épais). Arrangeons ces ensembles et les $\theta_{\alpha,j}$ en deux suites simples :

ω_n *pour les ensembles* (épais) *de* $\mathcal{F}_{\alpha'}$, θ_n *pour les points* $\theta_{\alpha,j}$ $(1 \leqq n < \omega)$, θ_n étant le point associé avec ω_n.

(7.15 *a*) Les fermetures des $p_{\alpha,j}$ sont dans R et les $p_{\alpha,j}$ jouissent des propriétés : (1°) $\overline{p}_{\alpha,j}\mathrm{P}_{\alpha,1} = 0$; (2°) $\rho(p_{\alpha,j})$ est arbitrairement petit avec $\varphi(p_{\alpha,j})$ [une conséquence de (2.14, 9°)]; (3°) *pour* α *fixe,* $\varphi(p_{\alpha,j})$ *tend vers zéro, lorsque* $\theta_{\alpha,j}$ *tend vers* $\mathrm{P}_{\alpha,1}$ [e. g. lorsque $\rho(\theta_{\alpha,j}, \mathrm{P}_{\alpha,1}) \to 0$; si x est un point et A un ensemble, $\rho(x, \mathrm{A}) = \inf \rho(x, y)$, le point y variant sur A]; de plus,

$$(7.15\,a') \qquad \mathrm{I}_{\alpha,j} = (\mathrm{L})\int_{\mathrm{P}_\alpha p_{\alpha,j}} |f|\,d\varphi < \varphi(\mathrm{P}_\alpha - \mathrm{P}_{\alpha+1});$$

$$(18_1) \qquad \mathrm{I}_{\alpha,j} \to 0 \qquad [\alpha \text{ fixe et } \rho(\theta_{\alpha,j}, \mathrm{P}_{\alpha,1}) \to 0];$$

(7.15 *b*) Pour α fixe, l'ensemble des points d'accumulation des $\overline{p}_{\alpha,j}$ (avec $\mathrm{P}_\alpha p_{\alpha,j}$ épais) est dans $\mathrm{P}_{\alpha,1}$.

(7.15 *c*) Les $p_{\alpha,j}$ (avec $\mathrm{P}_\alpha p_{\alpha,j}$ épais) sont choisis de mesure suffisamment petite de sorte qu'il existe une constante c (nécessairement $c > \varphi(\mathrm{R})$) pour laquelle

$$\sum_\alpha \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(p_{\alpha,j}) < c \qquad (0 \leqq \alpha \leqq \alpha');$$

conséquence : les ensembles de toute collection infinie des $p_{\alpha,j}$ (*avec* $p_{\alpha,j}\mathrm{P}_\alpha$ épais) *ont les mesures et les pseudo-diamètres tendant vers zéro;*

(7.15 *d*) *Les nombres* $\mathrm{I}_{\alpha,j}$ (7.15 *a'*) *possèdent zéro comme le seul point d'accumulation* [ainsi $\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_{\alpha,j}$, n correspondant à (α, j), $\to 0$ pour $n \to \infty$, et le même sera vrai pour les $v_n(r) = v_{\alpha,j}(r)$ (7.13 c)].

D'après (7.13) et (7.12 *b*) (avec $\beta = \alpha'$) il vient que

$$(7.16) \qquad \theta_n = \theta_{\alpha,j} \in \mathrm{R} - \mathrm{E}'.$$

Pour réaliser (7.15 *c*) on assujettit les ρ_j de $\mathfrak{N}_{\alpha,1}$ (α de première espèce) aux conditions (16_1), avec α pour $\alpha+1$, et à la condition que les mesures des ρ_i soient suffisamment petites de sorte que

$$(19_1) \qquad \varphi\Big(\sum_i \rho_i\Big) < (1+\varepsilon)\,\varphi(P_\alpha - P_{\alpha,1})$$

$$\Big[\text{noter que } P_\alpha - P_{\alpha,1} = P_\alpha \sum \rho_i \subset \sum \rho_i\Big];$$

on a $\varphi(P_\alpha) > 0$ pour $\alpha \leqq \alpha'$, donc tous les $P_\alpha - P_{\alpha,1}$ ($\alpha \leqq \alpha'$) sont épais (α est de la première espèce); en outre [(17_1) pour α au lieu de $\alpha+1$]

$$\sum_j \varphi(p_{\alpha,j}) = \varphi\Big(\sum_i \rho_i\Big),$$

$$\sum_\alpha \varphi(P_\alpha - P_{\alpha,1}) = \sum \varphi(P_\alpha - P_{\alpha+1}) = \varphi(R) \qquad (\alpha \text{ de première espece}).$$

Notre objet est de vérifier [dans l'hypothèse de compacticité des fermetures des ensembles de $\mathfrak{M}$] les constatations suivantes :

(7.I) *Pour tout* $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset$ R *la série de*

$$v_n(\tilde{r}) = (\mathrm{L})\int_{\tilde{r}\,\omega_n} f\,d\varphi \qquad (1 \leqq n < \omega)$$

est totalisable sur R.

(7.II) *La totale* $F(R, \tilde{r}) = (R)\sum T v_n(r)$ *des séries sur* $\overline{R}$ *vaut*

$$\psi(\tilde{r}) = (\mathrm{D})\int_{\tilde{r}} f\,d\varphi \qquad [\text{la totale (D) de } f \text{ sur } \tilde{r}].$$

Tout $p_{\alpha,j}$ *est dans un* ρ_k *de* $\mathfrak{N}_{\alpha,1}$ [*cf.* (17_1) et (16_1), avec α pour $\alpha+1$; $\rho_k P_\alpha \neq 0$; puisque $P_{\alpha,1} = P_\alpha - P_\alpha \sum \rho_i$, on a $\rho_k P_{\alpha,1} = 0$. D'après [(7.15 *a*), (1°)]

$$(1') \qquad p_{\alpha,j} \subset R - RP_{\alpha,1}.$$

Si x est un point sur $\overline{R}$ et un α est donné, x peut être contenu dans un au plus des $p_{\alpha,j}$ [car les $p_{\alpha,j}$ sont disjoints, si α est fixe]; dans ce cas, x sera dans $\overline{R} - P_{\alpha,1}$ et x sera étranger à tout $P_{\beta,1}$ et P_β pour $\beta \geqq \alpha$ (il ne s'agit pas de P_β pour β de seconde espèce).

(7.17) *Pour un* α *fixe de première espèce, soit* E *fermé et* $E \subset P_{\alpha-1,1} - P_{\alpha,1}$. *Alors les* $\bar{p}_{\beta,j}$ *joints à* E (et avec $P_\beta p_{\beta,j}$ épais) *sont en nombre fini* $[0 \leqq \alpha \leqq \alpha' + 1;\ P_{-1,1} = \overline{R};\ P_{\alpha',1}$ mince ou vide, $P_{\alpha'+1,1} = 0]$.

C'est analogue à un énoncé dans (D; p. 371). Pour démontrer notons d'abord que, si un $\bar{p}_{\beta,j}$ est joint à E, on aura $\beta \geqq \alpha$. En effet, pour $\beta < \alpha$ tout $\bar{p}_{\beta,j}$, étant disjoint de $P_{\beta,1}$ (1′), sera disjoint de $P_{\alpha-1,1}$ et de E; car $P_{\beta,1} \geqq P_{\alpha-1,1}$.

(2′) *Les* $\bar{p}_{\alpha,j}$ *joints à* E (avec $p_{\alpha,j} P_\alpha$ épais) *sont en nombre fini.*

Si (2′) n'était pas vrai, une infinité de p_{α,j_k} $(k = 1, 2, \ldots)$ seraient joints à E (α fixe); d'après (7.15 *c*), $\rho(\bar{p}_{\alpha,j_k}) \to 0$. En raison de compacticité la famille d'ensembles $\bar{p}_{\alpha,j_k}$ possède un point d'accumulation x sur E fermé. E étant dans $P_{\alpha-1,1} - P_{\alpha,1}$, x sera étranger à $P_{\alpha,1}$, ce qui est contraire à (7.15 *b*); (2′) est vérifié.

Il reste à considérer les $p_{\beta,j}$ tels que

$$(3) \qquad \beta > \alpha, \quad \bar{p}_{\beta,j} \text{ joint à E}; \quad \varphi(P_\beta p_{\beta,j}) > 0.$$

Supposons, si c'est possible, que les $p_{\beta,j}$ satisfaisant à (3′) sont en nombre infini. Alors des $\beta_k > \alpha$ et des j_k $(k = 1, 2, \ldots)$ existent [les β_k n'étant pas tous nécessairement distincts entre eux], de sorte que

$$(4') \qquad p_{\beta_k,j_k} \text{ est joint à E}, \quad \varphi(P_{\beta_k} p_{\beta_k,j_k}) > 0.$$

Or $P_{\alpha,1} \geqq P_{\alpha+1} \geqq P_\beta > P_{\beta,1}$. On note que :

(1_0) $\bar{p}_{\beta_k,j_k}$ est disjoint de $P_{\beta_k,1}$ (1′);

(2_0) $\bar{p}_{\beta_k,j_k}$ (et, en effet, p_{β_k,j_k}) contient un point $y_k \in P_{\beta_k} \leqq P_{\alpha+1}$;

(3_0) $\bar{p}_{\beta_k,j_k}$ contient un point z_k de E. D'après la compacticité, pour une suite croissante d'entiers k_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ les limites

$$\lim_\nu y_{k_\nu} = y, \qquad \lim_\nu z_{k_\nu} = z$$

existent et $y \in P_{\alpha+1}$, $z \in$ E. Or

$$\rho(p_{\beta,j}) \geqq \rho(y_{k_\nu}, z_{k_\nu}), \qquad \text{où} \quad \beta = \beta_{k_\nu}, \qquad j = j_{k_\nu}.$$

En tenant compte de (7.15 *c*) et en prenant $\lim\limits_k$, il vient

$$0 = \lim_k \rho(q_{\beta,j}) \geqq \overline{\lim_k}\, \rho(y_{k_\nu}, z_{k_\nu}) = \lim_k \rho(y_{k_\nu}, z_{k_\nu}) = \rho(y, z).$$

Donc $y = z$, c'est-à-dire $P_{\alpha+1}$ est joint à E; mais E est disjoint de $P_{\alpha,1}$ et, par conséquent, de $P_{\alpha+1}$ (contenu dans $P_{\alpha,1}$). Il y a contradiction; on a vérifié que *les* $p_{\beta,j}$ *satisfaisant à* (3′) *sont en nombre fini.* En somme, *l'énoncé* (7.17) *est établi.*

On observe que

$$\overline{\mathrm{R}} = \sum (-1 \leqq \alpha \leqq \alpha')\,(\mathrm{P}_{\alpha,1} - \mathrm{P}_{\alpha+1,1}), \tag{7.18}$$

les ensembles au second membre étant disjoints. En effet, soit x un point quelconque sur $\overline{\mathrm{R}}$. Posons $\nu_\alpha = \mathrm{P}_{\alpha,1} - \mathrm{P}_{\alpha+1,1}$ $(-1 \leqq \alpha \leqq \alpha')$. Il y a un μ minimal tel que $x \in \overline{\mathrm{R}} - \mathrm{P}_{\mu,1}$; alors $x \in \mathrm{P}_{\gamma,1}$ pour tout $\gamma < \mu$. Si μ est de première espèce,

$$x \in \mathrm{P}_{\mu-1,1} \qquad \text{et} \qquad x \in \mathrm{P}_{\mu-1,1} - \mathrm{P}_{\mu,1} = \nu_{\mu-1}.$$

Si μ est de seconde espèce, on aura x dans les $\mathrm{P}_{\gamma,1}$ pour $\gamma < \mu$, donc $x \in \mathrm{P}_{\mu,1}$, ce qui est impossible car x est dans $\overline{\mathrm{R}} - \mathrm{P}_{\mu,1}$. Ainsi

$$\overline{\mathrm{R}} = \sum (0 \leqq \mu \leqq \alpha' + 1)\,\nu_{\mu-1}, \quad \text{avec } \mu \text{ de première espèce};$$

la conclusion (7.18) *s'ensuit.*

(7.19) *Si x est un point sur $\overline{\mathrm{R}}$, les $p_{\beta,j}$ contenant x* (et avec $\mathrm{P}_\beta p_{\beta,j}$ épais) *sont en nombre fini. Ainsi les*

$$\theta_n [= \theta_{\beta,j} \in \mathrm{P}_\beta p_{\beta,j} = \omega_n], \qquad 1 \leqq n < \omega,$$

ont une disposition clairsemée.

C'est une conséquence immédiate de (7.17), (7.18).

(7.20) *Désormais nous supposons que les θ_n $(= \theta_{\alpha,j})$ peuvent être choisis de sorte que toute frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}$ contient un nombre fini au plus de θ_n.*

On peut réaliser la propriété indiquée au moins dans les deux cas suivants :

(7.20 *a*) *Les r de $\mathfrak{M}$ sont en infinité dénombrable.*

(7.20 *b*) *L'espace est euclidien $\mathfrak{U}_k$ à k dimensions et les r de $\mathfrak{M}$ sont intervalles (ouverts) à k dimensions.*

En effet, on observe que les $\omega_n = \omega_{\alpha,j} = \mathrm{P}_\alpha p_{\alpha,j}$ sont intersections d'un ensemble parfait-s et d'un ensemble ouvert. Par conséquent, au cas (7.20 *a*), les frontières d'ensembles de $\mathfrak{M}$ étant en infinité dénombrable, on peut choisir les θ_n $(\in \omega_n)$ de sorte qu'aucun d'entre eux n'est sur une frontière d'un ensemble de $\mathfrak{M}$. Au cas (7.20 *b*), pour $k = 1$, la frontière d'un intervalle consiste de deux points. Dans le cas (7.20 *b*), pour $k > 1$, nous procédons de la manière suivante. R est un intervalle $a_i < x_i < b_i$ $(i = 1, \ldots, k)$;

$$\theta_n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_k^n) \in \mathrm{R}.$$

Les $P_0 p_{0,j} = p_{0,j}$ $(= q_{0,j})$ sont épais; les $\theta_{0,j}$ $[\in q_{0,j}]$ sont choisis dans un certain ordre, soit $\theta_{0,1}, \theta_{0,2}, \ldots$;

$$\theta_{0,1} = (x_1^{0,1}, x_2^{0,1}, \ldots, x_k^{0,1}); \qquad \theta_{0,2} = (x_1^{0,2}, \ldots, x_k^{0,2})$$

est choisi de sorte que $x_\nu^{0,2} \neq x_\nu^{0,1}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$. Ayant spécifié

$$\theta_{0,1}, \theta_{0,2}, \ldots, \theta_{0,q},$$

nous prenons $\theta_{0,q+1} = (x_1^{0,q+1}, \ldots, x_k^{0,q+1})$ de sorte que

$$x_\nu^{0,q+1} \neq x_\nu^{0,p} \qquad [p = 1, 2, \ldots, q; \nu = 1, 2, \ldots, k].$$

Ainsi on définit les $\theta_{0,j}$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Soient α de première espèce et un $s < \omega$; supposons que les $\theta_{\beta,j}$ ont été choisis pour tout β (de première espèce) $< \alpha$ et pour tout $0 \leqq j < \omega$ (tels que $\varphi(P_\beta p_{\beta,j}) > 0$), ainsi que les $\theta_{\alpha,j}$ pour tout $1 \leqq j \leqq s$, pour lesquels $\varphi(P_\alpha p_{\alpha,j}) > 0$. Alors $\theta_{\alpha,s+1} = (x_1^{\alpha,s+1}, \ldots, x_k^{\alpha,s+1})$ [si $\varphi(P_\alpha p_{\alpha,s+1}) > 0$] est déterminé de sorte que $x_\nu^{\alpha,s+1}$ est distinct des $x_\nu^{\beta,j}$ $(\beta < \alpha, 1 \leqq j < \omega)$ et des $x_\nu^{\alpha,j}$ $(1 \leqq j \leqq s)$, cela étant pour $\nu = 1, 2, \ldots, k$ et seulement pour les valeurs des indices pour lesquels les ensembles indiqués plus haut sont épais. Si les $\theta_{\beta,j}$ ont été définis pour tout $\beta \leqq \alpha$ et pour tout $j < \omega$ [pour les valeurs telles que $\varphi(P_\beta p_{\beta,j}) > 0$], nous déterminons le premier des $\theta_{\alpha+1,j}$, soit $\theta_{\alpha+1,1}$ (si $P_{\alpha+1} p_{\alpha+1,1}$ est épais), de sorte que, pour $\nu = 1, \ldots, k$, $x_\nu^{\alpha+1,1}$ est distinct des $x_\nu^{\beta,j}$ pour tous les β et j que nous venons de mentionner. Éventuellement on choisit tous les θ_n $(1 \leqq n < \omega)$. D'après le choix progressif des $x_\nu^{\alpha,j}$ $(\nu = 1, \ldots, k)$ pour tous les α et j, pour lesquels $\varphi(P_\alpha p_{\alpha,j}) > 0$, il vient que tout plan $D_\nu = \{x_\nu = \mathrm{Cte}\}$ est ou bien dépourvu des θ_n ou bien contient précisément *un* θ_n. Par conséquent, dans *la frontière d'un ensemble de* $\mathfrak{M}$ (e. g. d'un intervalle à k dimensions) *se trouvent au plus* $2k$ *points* θ_n, *ce qui vérifie la constatation relativement au cas* (7.20 *b*)

(7.21) *Si* $p(\subset \overline{R})$ *est parfait-s, il y a un* α $(-1 \leqq \alpha \leqq \alpha')$ *tel qu'une portion* $\overline{\omega} = \overline{\omega} p$ *est contenue dans* $P_{\alpha,1} - P_{\alpha+1,1}$.

La démonstration se fait comme dans une situation analogue dans (D; p. 380). D'après (7.18), on a $p = \sum p(P_{\alpha,1} - P_{\alpha+1,1})$. Le théorème de Baire s'applique dans la théorie actuelle, donc pour un α l'ensemble $\nu_\alpha = P_{\alpha,1} - P_{\alpha+1,1}$ est dense sur p; ν_α est partout dense sur une portion $\overline{\omega}'$ de p, le même étant vrai pour $P_{\alpha,1}$ $(\supset \nu_\alpha)$; d'où $P_{\alpha,1}$ fermé contient $\overline{\omega}'$. Or $P_{\alpha+1,1}$ *est non dense sur* $\overline{\omega}'$. Sinon $P_{\alpha+1,1}$

est dense sur $\overline{\omega}'$ et $P_{\alpha+1,1}$ fermé contient une portion $\overline{\omega}''$ de $\overline{\omega}'$ (de p), ainsi

$$P_{\alpha,1} \supset P_{\alpha+1,1} \supset \overline{\omega}'' \qquad \text{et} \qquad \nu_\alpha \overline{\omega}'' = 0,$$

ce qui est contraire au fait que ν_α est partout dense sur $\overline{\omega}''$ (l'étant sur $\overline{\omega}' \supset \overline{\omega}''$). Ayant établi que $P_{\alpha+1,1}$ est non dense sur $\overline{\omega}'$, on conclut que $\overline{\omega}'$ contient une portion $\overline{\omega}$ de $\overline{\omega}'$ (de p) disjointe de $P_{\alpha+1,1}$; (7.21) *est vérifié.* Cet énoncé est indépendant de l'hypothèse (7.20).

8. **Transformation en une totale des séries** (*suite*). — L'ensemble $R - RP_{\alpha,1}$ ($0 \leqq \alpha \leqq \alpha'$) est ouvert. Pour α fixe, soit $\mathfrak{N}_\alpha = \{\rho_j^\alpha\}$ ($j = 1, 2, \ldots$) la famille des ensembles de G' contenus dans $R - P_{\alpha,1}$; cette famille est dénombrable comme G' l'est. On a

$$(1_1) \qquad \begin{cases} R - RP_{\alpha,1} = \sum_j \rho_j^\alpha = \sum_j q_j^\alpha, \qquad q_1^\alpha = \rho_1^\alpha, \\ q_n^\alpha = \rho_n^\alpha - \rho_n^\alpha(\rho_1^\alpha + \ldots + \rho_{n-1}^\alpha) \qquad (n > 1), \end{cases}$$

où les q_j^α sont dans $\tilde{\mathfrak{M}}$ et ils sont disjoints pour α invariant;

$$(2_1) \qquad q_j^\alpha = \sum_{i=1}^{\nu} p_{j,i}^\alpha + e_j^\alpha, \qquad \nu = \nu_j^\alpha;$$

$p_{j,i}^\alpha$ (de $\mathfrak{M}$) disjoints pour α invariant; $e_j^\alpha \in (*)$. Arrangeons les $p_{j,i}^\alpha$ en une suite simple $\{p_i^\alpha\}$ ($i = 1, 2, \ldots$). On obtient

$$(3_1) \qquad R - RP_{\alpha,1} = \sum_{i=1}^{\infty} p_i^\alpha + e_{\alpha,1}, \qquad e_{\alpha,1} \in (**),$$

les ρ_i^α (de $\mathfrak{M}$) et $e_{\alpha,1}$ étant disjoints (α fixe). D'après (7.6$_1$), on peut choisir $p_i^0 = q_{0,i}$.

Notation 8.1. — f étant supposée totalisable (D) sur R (de $\mathfrak{M}$), posons

$$\psi(\tilde{r}) = (D)\int_{\tilde{r}} f\, d\varphi; \qquad F(q;\, h) = (q)\sum T\, v_n(h)$$

pour h, $\subset R$, mesurable et pour q (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset R$, dès que la totale de séries existe.

Définition 8.2. — *Pour q (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset R$ posons*

$$(8.2\,a) \qquad \begin{aligned} &f_q(x) = 0 \quad \text{sur tout } \omega_{n'}, \text{ dont le } \theta_{n'} \in R - q, \\ &f_q(x) \quad \text{sur } R - \Omega(q), \qquad \Omega(q) = \sum_{n'} \omega_{n'}. \end{aligned}$$

Si $f_q(x)$ est totalisable (D) *sur un* $\tilde{r}_0$ (*de* $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset$ R, *pour un q* (*de* $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset$ R, *posons*

$$(8.2\,b)\quad \psi(q;\tilde{r}) = (\mathrm{D})\int_{\tilde{r}} f_q(x)\,d\varphi(x)\quad \text{pour tout } \tilde{r}\ (\text{de } \tilde{\mathfrak{M}}) \subset \tilde{r}_0.$$

(8.3) *Dans les conditions de la section* 7, *la condition* (7.20) *étant admise, si pour un* $\tilde{r}_0$ (*de* $\tilde{\mathfrak{M}}$), $\subset$ R, *la totale*-(D) $\psi(q;\tilde{r}_0)$ (8.2 *b*) *existe pour tout q* (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset$ R, *il s'ensuit que* $\psi(q;\tilde{r}_0)$ *est la totale-série sur q de* $v_n(\tilde{r}_0)$, *e. g. que*

$$(8.3\,a)\quad \psi(q;\tilde{r}_0) = (q)\sum \mathrm{T}\,v_n(\tilde{r}_0) = \mathrm{F}(q;\tilde{r}_0)\quad \textit{pour tout } q\ (\text{de } \tilde{\mathfrak{M}}) \subset \mathrm{R}.$$

En effet, on peut établir cet énoncé en remarquant que les θ_n ont une disposition *clairsemée* [*voir* (7.19)] de sorte qu'une série est totalisable, si les conditions de la définition 6.5 sont remplies (*voir* 6.6). Tout revient ainsi à la vérification du fait que la totale (D) de $f_q(x)$ (8.2 *a*) sur $\tilde{r}_0$ (fixe), considérée comme fonction d'ensemble q (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset$ R, possède relativement aux $v_n(\tilde{r}_0)$, associés avec les θ_n, les caractères spécifiés dans la définition 6.5.

Si $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset \mathrm{R} - \mathrm{RP}_{0,1}$, on déduit (7.4)

$$(4_1)\qquad \psi(\tilde{r}) = \sum v_{0,j}(\tilde{r}),$$

la série étant absolument convergente. Par suite, $\psi(q;\tilde{r})$ existe pour ce $\tilde{r}$ et pour tout q (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset$ R et l'on a

$$(5_1)\qquad \psi(q;\tilde{r}) = \sum v_{0,j'}(\tilde{r})\qquad \text{(série absolument convergente)},$$

où la somme est étendue sur les indices tels que $\theta_{0,j'} \in q$. Les θ_n situés dans $\mathrm{P}_{0,1}$ sont précisément les $\theta_{\alpha,j}$, avec $\alpha > 0$; pour un tel θ_n un $j = j_n$ et un $\alpha = \alpha_n$ (> 0) correspondent de sorte que

$$\theta_n = \theta_{\alpha,j} \in \mathrm{P}_\alpha p_{\alpha,j} \subset \mathrm{P}_1 p_{\alpha,j} \subset \mathrm{P}_{0,1} p_{\alpha,j};$$

le $v_n(\tilde{r})$ qui correspond à ce θ_n est l'intégrale-L de f sur $\tilde{r}\mathrm{P}_\alpha p_{\alpha,j}$ ($\alpha > 0$); mais $\tilde{r} \subset \mathrm{R} - \mathrm{RP}_{0,1}$ et $\mathrm{P}_\alpha \subset \mathrm{P}_{0,1}$, d'où $\tilde{r}\mathrm{P}_\alpha$ est vide et $v_n(\tilde{r}) = 0$. Les θ_n qui correspondent aux $v_{0,j}(\tilde{r})$ dans (4_1) sont les $\theta_{0,j}$ et sont précisément les θ_n situés dans $\mathrm{R} - \mathrm{RP}_{0,1}$ ($\subset \mathrm{R} - \mathrm{RP}_1$). La série de $v_n(\tilde{r})$ (avec $\tilde{r} \subset \mathrm{R} - \mathrm{RP}_{0,1}$) consiste des $v_{0,j}(\tilde{r})$, tous les autres termes étant nuls; donc, selon le théorème 5.7, cette série absolument convergente est totalisable sur R et

$$\mathrm{F}(\mathrm{R};\tilde{r}) = \sum v_{0,j}(\tilde{r}).$$

Les θ_n qui correspondent aux $v_{0,j'}(\tilde{r})$ dans (5_1) sont les $\theta_{0,j'}$ et ils sont les θ_n situés dans $q.[R - RP_{0,1}]$; d'après le théorème 5.7,

$$F(q;\tilde{r}) = \sum v_{0,j'}(\tilde{r}).$$

Ainsi

$$(8.4)\quad \psi(q;\tilde{r}) = F(q;\tilde{r}) \qquad \text{pour}\quad \tilde{r}\,(\text{de }\mathfrak{M}) \subset R - RP_{0,1} \quad \text{et}\quad q\,(\text{de }\mathfrak{M}) \subset R;$$

en particulier $[\psi(R;\tilde{r}) =]\ \psi(\tilde{r}) = F(R;\tilde{\ })$ pour les $\tilde{r}$ spécifiés.

Pour $\tilde{r}$ (de $\mathfrak{M}$) $\subset R - RP_1$ il vient (7.6 *a*) :

$$(6_1)\qquad \psi(\tilde{r}) = \sum v_{0,i}(\tilde{r}).$$

Il n'y a pas de θ_n dans $P_{0,1} - P_1$. Les θ_n qui correspondent aux $v_{0,j}(\tilde{r})$ dans (6_1) sont les $\theta_{0,j}$ et ils sont les θ_n dans $R - RP_1$ (en effet, dans $R - RP_{0,1}$). La série de $v_n(\tilde{r})$ (où $\tilde{r} \subset R - RP_1$) est formée des $v_{0,j}(\tilde{r})$, les autres termes étant nuls; d'après le théorème 5.7, cette série est totalisable sur R avec $F(R;\tilde{r}) = \sum v_{0,j}(\tilde{r})$. En vertu de (6_1) $\psi(q;\tilde{r})$ existe pour $\tilde{r} \subset R - RP_1$ et pour tout q (de $\mathfrak{M}$) $\subset R$ et

$$(7_1)\qquad \psi(q;\tilde{r}) = \sum v_{0,j'}(\tilde{r}) \qquad \text{(série absolument convergente)},$$

la somme étant sur les indices tels que $\theta_{0,j'} \in q$. Les θ_n correspondant aux $v_{0,j'}(\tilde{r})$ dans (7_1) sont les $\theta_{0,j'}$; ils sont les θ_n situés dans $q.(R - RP_1)$ [dans $q.(R - RP_{0,1})$]; d'après le théorème 5.7, il vient

$$F(q;\tilde{r}) = \sum v_{0,j'}(\tilde{r}).$$

Enfin

$$(8.4\,a)\quad \psi(q;\tilde{r}) = F(q;\tilde{r}) \qquad \text{pour}\quad \tilde{r}\,(\text{de }\mathfrak{M}) \subset \bar{R} - P_1 \quad \text{et}\quad q\,(\text{de }\mathfrak{M}) \subset R,$$

d'où

$$\psi(\tilde{r}) = F(R;\tilde{r}) \qquad \text{pour}\quad \tilde{r} \subset R - RP_1.$$

A partir de (8.4) *et de* (8.4 *a*) *et en utilisant les résultats jusqu'ici obtenus, on peut réaliser une transformation de la totale* (D) *en une totale-série, en suivant la méthode progressive indiquée par Denjoy* (D; p. 374) *dans l'espace euclidien* $\mathfrak{U}_1$.

On suppose que pour un α $(< \alpha')$ on a établi que la série de $v_n(\tilde{r})$ est totalisable sur R pour tout $\tilde{r}$ (de $\mathfrak{M}$) $\subset R - RP_{\alpha,1}$, que $\psi(q;\tilde{r})$ existe pour $\tilde{r}$ dans $R - RP_{\alpha,1}$ et pour tout q (de $\mathfrak{M}$) $\subset R$ tandis que

$$(8.5)\qquad \psi(q;\tilde{r}) = F(q;\tilde{r}) \qquad [\text{donc } \psi(\tilde{r}) = F(R;\tilde{r})];$$

il s'ensuit que, pour tout q (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset$ R,

$$(8.5\,a)\qquad \psi(q;\tilde{r}) = \mathrm{F}(q;\tilde{r}), \qquad [\psi(\mathrm{R},\tilde{r}) =]\,\psi(\tilde{r}) = \mathrm{F}(\mathrm{R};\tilde{r})$$

pour tout $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset \mathrm{R} - \mathrm{RP}_{\alpha+1}$ [les θ_n dans $\mathrm{F}(q;\tilde{r})$ ($\tilde{r} \subset \mathrm{R} - \mathrm{RP}_{\alpha+1}$) sont ceux situés dans $q.(\mathrm{R} - \mathrm{RP}_{\alpha+1})$]; ensuite on obtient ces relations pour tout q (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset$ R et pour tout $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) dans $\mathrm{R} - \mathrm{RP}_{\alpha+1,1}$. Puis, avec un β de la seconde espèce, on suppose qu'on a obtenu

$$(8.6)\qquad \begin{cases} \psi(q,\tilde{r}) = \mathrm{F}(q,\tilde{r}) \quad \text{pour tout } \tilde{r} \text{ (de } \tilde{\mathfrak{M}}) \subset \mathrm{R} - \mathrm{RP}_{\alpha,1}, \\ \qquad\qquad \text{tout } q \text{ (de } \tilde{\mathfrak{M}}) \subset \mathrm{R}, \quad \text{pour tout } \alpha < \beta; \end{cases}$$

comme une conséquence, il vient que

$$(8.6\,a)\qquad \psi(q;\tilde{r}) = \mathrm{F}(q;\tilde{r}) \qquad [\text{donc } \psi(\tilde{r}) = \mathrm{F}(\mathrm{R};\tilde{r})]$$

pour tout q (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset$ R et tout $\tilde{r}$ (de $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset \mathrm{R} - \mathrm{RP}_{\beta,1}$.

Ainsi, en procédant progressivement d'accord avec une suite transfinie d'opérations, indiquées plus haut, *on conclut que, au moins dans les conditions de la section* 7, *la série de* $v_n(\tilde{r}) = (\mathrm{L})\int_{\tilde{r}\,\omega_n} f\,d\varphi$ *est totalisable sur* R, *pour tout* $\tilde{r}$ (*de* $\tilde{\mathfrak{M}}$) *dans* $\mathrm{R} - \mathrm{RP}_{\alpha',1}$, *e. g. dans* R, *et que*

$$(8.7)\qquad \psi(\tilde{r}) \left[= (\mathrm{D})\int_{\tilde{r}} f\,d\varphi \right] = \mathrm{F}(\mathrm{R},\tilde{r}) \left[= (\mathrm{R})\sum \mathrm{T}\,v_n(\tilde{r}) \right]$$

pour tout $\tilde{r}$ (*de* $\tilde{\mathfrak{M}}$) $\subset$ R.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] W. J. TRJITZINSKY, *Totalisations dans les espaces abstraits* [*Mém. Sc. Math.*, fasc. 155, 1963, p. 1-131; désigné dans la suite par (T)].

[2] P. ROMANOVSKI, *Intégrale de Denjoy dans les espaces abstraits* [*Mat. Sbornik*, t. 9, 1941, p. 67-120, désigné par (R_1); aussi *Mat. Sbornik*, t. 9, 1941, p. 281-307, désigné par (R_2)].

[3] A. DENJOY, *Leçons sur le calcul des coefficients d'un série trigonométrique*, Parties I, ..., IV, Paris, 1941-1949, p. 1-714, désigné dans le texte par (D).

[4] W. J. TRJITZINSKY, *Théorie métrique dans les espaces où il y a une mesure* (*Mém. Sc. Math.*, fasc. 143, 1960, p. 1-119; désigné par (T*).

TABLE DES MATIÈRES.