JEAN ANASTASSIADIS

Définition des fonctions eulériennes par des équations fonctionnelles

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 156 (1964)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1964__156__1_0>

Jean ANASTASSIADIS
Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Thessaloniki

DÉFINITION DES FONCTIONS EULÉRIENNES PAR DES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
Directeur : H. VILLAT
FASCICULE CLVI

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & Cie, ÉDITEUR-IMPRIMEUR
55, Quai des Grands-Augustins
1964

A LA MÉMOIRE

DE MON FRÈRE INOUBLIABLE THALÉS

DÉFINITION

DES FONCTIONS EULÉRIENNES

PAR DES

ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

Par M. Jean ANASTASSIADIS.
Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Thessaloniki.

CHAPITRE I.

FONCTIONS CONVEXES, SEMI-MONOTONES ET SEMI-CONVEXES.

1. Fonctions convexes et concaves d'une variable.

1.1. Soit $f(x)$ une fonction réelle et finie d'une variable réelle, définie dans l'intervalle ouvert $\mathfrak{I} = (a, b)$. On dit que $f(x)$ est *convexe* (resp. *concave*) dans cet intervalle 1° si elle est bornée supérieurement (resp. inférieurement) dans un seul intervalle partiel $\mathfrak{I}_1 \subset \mathfrak{I}$ et 2° si, x_1, x_2 étant deux points de $\mathfrak{I}$, on a

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \tag{1.1}$$

[resp.

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geqq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}\Bigg]. \tag{1.2}$$

Il est évident que si $f(x)$ est convexe dans $\mathfrak{I}$, $-f(x)$ est concave dans cet intervalle.

1.2. On reconnaît qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ soit convexe dans $\mathfrak{I} = (a, b)$ est

$$(1.3) \qquad (1-\vartheta)f(x_1)+\vartheta f(x_2) \geqq f((1-\vartheta)x_1+\vartheta x_2),$$

pour chaque ϑ tel que

$$0 < \vartheta < 1,$$

où x_1, x_2 sont deux points quelconques de $\mathfrak{I}$.

Supposons que (1.3) soit remplie; si pour un seul couple de $x_1, x_2 \in \mathfrak{I}$ l'égalité a lieu dans (1.3) au moins pour un $\vartheta \in (0, 1)$, l'égalité existe pour *chaque* $\vartheta \in (0, 1)$, c'est-à-dire pour tout $x \in [x_1, x_2]$, on a

$$(1.4) \qquad f(x) = f(x_1) + (x - x_1)\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1};$$

$f(x)$ est donc une fonction linéaire.

En langage géométrique, cela veut dire que, si l'arc de la courbe $y = f(x)$ $(x \in \mathfrak{I})$ est convexe, l'arc de la courbe entre les deux points P_1, P_2 n'a jamais de points au-dessus du segment P_1P_2; la condition nécessaire et suffisante afin que l'arc P_1P_2 de la courbe ait avec le segment P_1P_2 un point intérieur commun (c'est-à-dire un point commun qui se trouve entre P_1, P_2) est que l'arc de la courbe P_1P_2 s'identifie avec le segment P_1P_2.

1.3. Il résulte aisément que la condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ soit convexe dans $\mathfrak{I}$ est que la fonction

$$(1.5) \qquad \varphi(y) = \frac{f(x+y)-f(x)}{y} \qquad (y \neq 0)$$

soit croissante dans $\mathfrak{I}$, quand les points x, $x+y$ sont dans $\mathfrak{I}$.

1.4. Une autre condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ soit convexe dans $\mathfrak{I}$ est la condition

$$(1.6) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ x_3 & f(x_3) & 1 \end{vmatrix} \geqq 0,$$

où x_1, x_2, x_3 $(x_1 < x_2 < x_3)$ sont trois points de $\mathfrak{I}$.

1.5. Il résulte de (1.1) en posant $x_1 = x - h$, $x_2 = x + h$,

$$(1.7) \qquad 2f(x) \leqq f(x-h)+f(x+h) \qquad (x-h,\ x+h \in \mathfrak{I}),$$

ou bien

$$(1.8) \qquad \Delta^2 f \equiv f(x+h)+f(x-h)-2f(x) \geqq 0 \qquad (x-h,\ x+h \in \mathfrak{I}).$$

D'autre part on reconnaît sans peine que la condition (1.7) ou la condition (1.8) est suffisante pour que $f(x)$ soit convexe dans $\mathcal{I}$.

1.6. On peut démontrer facilement que, si $f(x)$ est convexe dans $\mathcal{I}$, pour tout groupe $x_1, x_2, \ldots, x_k$ de $k \geqq 2$ points distincts de $\mathcal{I}$ et tout groupe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ de k nombres réels tels que $\lambda_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ et

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = 1,$$

on a

$$(1.9) \qquad f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k) \leqq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_k f(x_k).$$

Cette condition est évidemment suffisante.

1.7. On peut prouver maintenant la proposition suivante :

Si $f(x)$ est convexe dans $\mathcal{I} = (a, b)$, elle admet à chaque point $x_0 \in \mathcal{I}$ des dérivées à droite $f'_d(x_0)$ et à gauche $f'_g(x_0)$ finies et l'on a toujours

$$(1.10) \qquad f'_g(x_0) \leqq f'_d(x_0).$$

Si, en effet, $x \in \mathcal{I}$ et $x > x_0$, d'après 1.3 la fonction

$$(1.11) \qquad \sigma(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

est croissante. D'autre part si $\xi \in \mathcal{I}$, $\xi < x_0$, on a

$$(1.12) \qquad \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} \leqq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$$

donc $\sigma(x)$ est bornée inférieurement et admet une limite finie à droite; par conséquent, il existe $f'_d(x_0)$ et elle est finie. Il résulte de (1.12) que

$$\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} \leqq f'_d(x_0).$$

On démontre de même qu'il existe la dérivée à gauche $f'_g(x_0)$ et elle est finie. Enfin on reconnaît aisément qu'on a

$$f'_g(x_0) \leqq f'_d(x_0).$$

1.8. On sait que l'existence des dérivées finies à droite et à gauche au point x_0 a comme conséquence la *continuité de la fonction convexe $f(x)$ à ce point*; donc, de (1.3) résulte la continuité de $f(x)$ dans $\mathcal{I}$, tandis que seulement de (1.1) elle ne résulte pas.

1.9. On tire de (1.8), grâce à la continuité de $f(x)$, l'inégalité

$$(1.13)\quad \begin{cases} \Delta f(x;\, h_1,\, h_2) = \dfrac{f(x+h_2)-f(x)}{h_2} - \dfrac{f(x)-f(x-h_1)}{h_1} \geqq 0 \\ \qquad (h_1,\, h_2 > 0,\; x+h_2,\; x-h_1 \in \mathcal{J}). \end{cases}$$

On peut conclure sans peine de (1.13) l'inégalité

$$(1.14)\quad \frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3} \geqq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \qquad (x_4 > x_3,\; x_2 > x_1,\; x_3 \geqq x_1,\; x_4 \geqq x_2).$$

Enfin on peut démontrer aisément l'inégalité intégrale

$$(1.15)\qquad \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)] \geqq \frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(t)\, dt.$$

1.10. Puisqu'une fonction convexe $f(x)$ a des dérivées à droite et à gauche finies à chaque point de $\mathcal{J}$, il résulte de la proposition bien connue de Denjoy [15] ([1]), que $f(x)$ est dérivable dans $\mathcal{J}$, excepté aux points d'un ensemble dénombrable au plus ([2]).

De cette proposition résulte le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction finie $f(x)$ soit convexe dans $\mathcal{J}$ est que :

1° *$f(x)$ soit continue dans $\mathcal{J}$ et admette une dérivée en tout point de l'ensemble* $E = \mathcal{J} - A$, *où* A *est un ensemble dénombrable au plus et*

2° *$f'(x)$ soit croissante dans* E.

Réciproquement, *si $\varphi(x)$ est croissante dans $\mathcal{J} = (a, b)$, donc intégrable au sens de Riemann dans cet intervalle, la fonction*

$$(1.16)\qquad f(x) = \int_a^x \varphi(t)\, dt$$

est convexe dans $\mathcal{J}$.

On a, en effet,

$$\begin{aligned} f(x+h) &+ f(x-h) - 2f(x) \\ &= \int_a^{x+h} \varphi(t)\, dt + \int_a^{x-h} \varphi(t)\, dt - 2\int_a^x \varphi(t)\, dt) \\ &= \int_x^{x+h} \varphi(t)\, dt + \int_x^{x-h} \varphi(t)\, dt = \int_0^h [\varphi(x+t) - \varphi(x-t)]\, dt \geqq 0. \end{aligned}$$

([1]) Les numéros dans les crochets renvoient à la bibliographie, qui se trouve à la fin du volume.

([2]) Pour une démonstration directe de ce théorème, *voir* par exemple : P. Montel [30].

1.11. Soit $f(x)$ une fonction continue dans $\mathcal{J}$, qui admet une dérivée finie à droite en chaque point de $\mathcal{J}$ excepté aux points d'un ensemble A dénombrable au plus; on sait que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle fonction soit croissante dans $\mathcal{J}$ est que $f'_d(x) \geqq 0$ dans $\mathcal{J} - A$. Il résulte de cette propriété que *la condition nécessaire et suffisante, afin qu'une fonction $f(x)$ continue et deux fois dérivable dans $\mathcal{J}$ soit convexe dans $\mathcal{J}$, est que*

$$f''(x) \geqq 0 \tag{1.17}$$

pour tout point $x \in \mathcal{J}$.

1.12. *Si $f(x)$ est convexe dans $\mathcal{J}$, $cf(x)$ est convexe dans cet intervalle quand $c > 0$ et concave dans $\mathcal{J}$ quand $c < 0$.*

Il résulte aussi de la définition de la convexité d'une fonction que, *si $f_1(x)$, $f_2(x)$ sont deux fonctions convexes dans $\mathcal{J}$, $f_1(x) + f_2(x)$ est aussi convexe dans $\mathcal{J}$.*

Si $f(x)$ est concave et positive dans $\mathcal{J}$, $\frac{1}{f}$ est convexe dans cet intervalle.

On a, en effet,

$$2f(x) \geqq f(x+h) + f(x-h) \geqq 2\sqrt{f(x+h)f(x-h)} \qquad (x-h, x+h \in \mathcal{J});$$

donc

$$\frac{1}{f(x)} \leqq \frac{1}{\sqrt{f(x+h)f(x-h)}} = \frac{\sqrt{f(x+h)f(x-h)}}{f(x+h)f(x-h)} \leqq \frac{1}{2}\,\frac{f(x+h)+f(x-h)}{f(x+h)f(x-h)}.$$

On en tire

$$\frac{2}{f(x)} \leqq \frac{1}{f(x+h)} + \frac{1}{f(x-h)},$$

ce qui démontre la convexité dans $\mathcal{J}$ de $\frac{1}{f(x)}$.

On peut démontrer sans peine les propositions suivantes :

a. Soit $f(x)$ une fonction convexe et strictement monotone dans l'intervalle ouvert $\mathcal{J} = (a, b)$, et $f^{-1}(x)$ la fonction inverse de $f(x)$, qui est définie dans l'intervalle $f(\mathcal{J})$. Si $f(x)$ est décroissante (resp. croissante) dans $\mathcal{J}$, $f^{-1}(x)$ est convexe (resp. concave) dans $f(\mathcal{J})$.

b. Soit $\mathcal{J} = (a, b)$ où $a > 0$; si $f\left(\frac{1}{x}\right)$ est convexe dans $\mathcal{J}$, il en est de même de $xf(x)$ et réciproquement.

c. Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions positives convexes dans l'intervalle $\mathcal{J} = (a, b)$; s'il existe un nombre $c \in \mathcal{J}$ tel que dans chacun *des intervalles $(a, c]$ et $[c, b)$, $f(x)$ et $g(x)$ sont toutes les deux ou bien croissantes ou bien décroissantes, le produit $f(x)\,g(x)$ est convexe dans $\mathcal{J}$.*

d. Si $f(x)$ est une fonction convexe dans $\mathcal{J}$, $g(x)$ une fonction convexe (resp. concave) et croissante (resp. décroissante) dans un intervalle contenant $f(\mathcal{J})$, la fonction composée $g(f(x))$ est convexe (resp. concave) dans $\mathcal{J}$.

1.13. Soit

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x), \quad \ldots.$$

une suite de fonctions définies dans le même intervalle $\mathcal{J}$, convergente vers une fonction $f(x)$. *Si $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sont toutes convexes dans $\mathcal{J}$, $f(x)$ est aussi convexe dans $\mathcal{J}$.*

On tire, en effet, de l'inégalité

$$(1-\vartheta) f_n(x_1) + \vartheta f_n(x_2) \geqq f_n((1-\vartheta)\,x_1 + \vartheta x_2),$$

la relation

$$(1-\vartheta) f(x_1) + \vartheta f(x_2) \geqq f((1-\vartheta)\,x_1 + \vartheta x_2),$$

ce qui démontre la convexité de $f(x)$ dans $\mathcal{J}$.

Soit $\{f_a(x)\}$ une famille de fonctions définies et convexes dans le même intervalle, bornées dans leur ensemble, en nombre fini ou infini.

La fonction

$$f(x) = \sup f_a(x),$$

égale à la borne supérieure des valeurs des fonctions pour chaque valeur de x, est une fonction convexe.

Puisqu'une fonction convexe dans $\mathcal{J}$ est continue dans $\mathcal{J}$, il résulte de ce qui précède que, la limite d'une suite convergente de fonctions convexes dans $\mathcal{J}$ est une fonction continue dans cet intervalle; aussi, la borne supérieure d'une famille de fonctions convexes dans $\mathcal{J}$, bornées dans leur ensemble, est une fonction continue dans cet intervalle.

2. Fonctions logarithmiquement convexes.

2.1. Soit $f(x)$ une fonction réelle d'une variable réelle définie, finie et *positive* dans l'intervalle $\mathcal{J} = (a, b)$. On dit que $f(x)$ est *logarithmiquement convexe* dans $\mathcal{J}$, si la fonction $\log f(x)$ est convexe dans cet intervalle; si $\log f(x)$ est concave dans $\mathcal{J}$, on dit que $f(x)$ est *logarithmiquement concave* dans cet intervalle.

Il résulte aussitôt de la définition qu'*une fonction logarithmiquement convexe dans $\mathcal{J}$ est convexe dans $\mathcal{J}$*; on a, en effet, de la convexité logarithmique

$$(2.1)\qquad 2\log f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqq \log f(x_1) + \log f(x_2) \qquad (x_1,\ x_2 \in \mathcal{J})$$

ou bien

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqq \sqrt{f(x_1)f(x_2)} \leqq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

ce qui démontre la convexité de $f(x)$ dans $\mathcal{J}$.

Il résulte aussi de la définition qu'*une fonction concave dans $\mathcal{J}$ est logarithmiquement concave dans cet intervalle.* On tire, en effet, de

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geqq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \geqq \sqrt{f(x_1)f(x_2)} \qquad (x_1,\ x_2 \in \mathcal{J}),$$

l'inégalité

$$2\log f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geqq \log f(x_1) + \log f(x_2).$$

2.2. On doit à P. Montel [30] la proposition remarquable suivante:

La condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ soit logarithmiquement convexe dans $\mathcal{J}$ est que $e^{ax} f(x)$ soit convexe dans $\mathcal{J}$ quelle que soit la valeur de la constante a.

Il est presque évident que la condition est nécessaire, parce que si $\log f(x)$ est convexe dans $\mathcal{J}$, $\log f(x) + ax$ est aussi convexe dans cet intervalle, quelle que soit la valeur de la constante a; donc $\log[e^{ax} f(x)]$ et, par conséquent, d'après 2.1, $e^{ax} f(x)$ est convexe dans $\mathcal{J}$.

La condition est suffisante. On a, en effet, de la convexité de $e^{ax} f(x)$ dans $\mathcal{J}$,

$$2\, e^{ax} f(x) \leqq e^{a(x+h)} f(x+h) + e^{a(x-h)} f(x-h) \qquad (x+h,\ x-h \in \mathcal{J})$$

ou

$$(2.2)\qquad e^{2ah} f(x+h) - 2\, e^{ah} f(x) + f(x-h) \geqq 0$$

quelle que soit la valeur de la constante a.

Mais, puisque $f(x)$ est une fonction positive, quand Z est négatif ou nul, le trinome

$$(2.3)\qquad Z^2 f(x+h) - 2\, Z f(x) + f(x-h)$$

est positif. D'autre part, grâce à (2.2), quand Z est positif, le trinome est positif ou nul. Donc, le trinome (2.3) est positif ou nul pour *chaque* valeur de Z et, par conséquent,

$$f^2(x) - f(x+h)f(x-h) \leqq 0$$

ou bien

$$2\log f(x) \leqq \log f(x+h) + \log f(x-h),$$

ce qui démontre que $f(x)$ est logarithmiquement convexe dans $\mathcal{I}$ [3].

2.3. On doit aussi à P. Montel [30] la proposition suivante :

La condition nécessaire et suffisante, afin que $f(x)$ soit logarithmiquement convexe dans $\mathcal{I}$, est que $[f(x)]^m$ soit convexe dans $\mathcal{I}$, quel que soit le nombre m positif et voisin de zéro.

Si, en effet, $\log f(x)$ est une fonction convexe dans $\mathcal{I}$, $m \log f(x)$ est convexe dans cet intervalle quand $m > 0$; donc, $\log [f(x)]^m$ et, par conséquent, d'après 2.1, $[f(x)]^m$ est convexe dans $\mathcal{I}$.

Réciproquement, si $[f(x)]^m$ est convexe dans $\mathcal{I}$,

$$\frac{[f(x)]^m - 1}{m}$$

est aussi convexe dans cet intervalle, donc, sa limite, quand $m \to 0$, $\log f(x)$ est convexe dans $\mathcal{I}$.

2.4. *Une condition suffisante, pour que $f(x)$ soit logarithmiquement convexe dans $\mathcal{I}$, est que $\frac{1}{f(x)}$ soit concave dans cet intervalle.*

Si, en effet, $\frac{1}{f(x)}$ est concave dans $\mathcal{I}$, d'après 2.1, $\log \frac{1}{f(x)}$ y est concave; c'est-à-dire que $-\log f(x)$ est concave dans cet intervalle, $\log f(x)$ est donc convexe dans $\mathcal{I}$.

2.5. *Le produit d'un nombre fini de fonctions logarithmiquement convexes dans un intervalle est une fonction logarithmiquement convexe dans cet intervalle.*

Soient $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_k(x)$, k fonctions logarithmiquement convexes dans $\mathcal{I}$; on a

$$2\log f_i(x) \leqq \log f_i(x-h) + \log f_i(x+h) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k;\ x-h, x+h \in \mathcal{I});$$

---

[3] Cette démonstration ne suppose rien sur la dérivabilité de la fonction $f(x)$; mais on peut obtenir aussitôt cette condition en supposant que $f(x)$ est deux fois dérivable et en utilisant le théorème 1.11.

en ajoutant ces relations ($i = 1, 2, \ldots, k$), on trouve

$$2\sum_{i=1}^{k}\log f_i(x) = 2\log\prod_{i=1}^{k} f_i(x) \leq \sum_{i=1}^{k}[\log f_i(x-h) + \log f_i(x+h)]$$
$$= \log\prod_{i=1}^{k} f_i(x-h) + \log\prod_{i=1}^{k} f_i(x+h),$$

ce qui démontre la proposition.

2.6. On peut aussi démontrer que *la somme d'un nombre fini de fonctions logarithmiquement convexes dans $\mathfrak{J}$ est aussi une fonction logarithmiquement convexe dans cet intervalle.*

Soient, en effet, $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$, k fonctions logarithmiquement convexes dans $\mathfrak{J}$; d'après 2.2,

$$e^{ax}f_1(x), \quad e^{ax}f_2(x), \quad \ldots, \quad e^{ax}f_k(x)$$

sont convexes dans cet intervalle quelle que soit la valeur de la constante a; mais, d'après 1.12, leur somme

$$e^{ax}[f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x)]$$

y est une fonction convexe quelle que soit la valeur de la constante a; donc, d'après 2.2,

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x)$$

est logarithmiquement convexe dans $\mathfrak{J}$ (1).

2.7. Il est évident que, *si $f(x)$ est logarithmiquement convexe dans $\mathfrak{J}$ et si c est un nombre réel $\neq 0$, les fonctions $f(x+c)$ et $f(cx)$ sont logarithmiquement convexes dans les intervalles correspondants.*

2.8. Il résulte des propositions 1.13, grâce à la proposition 2.2, que, *la limite d'une suite convergente des fonctions logarithmiquement convexes dans $\mathfrak{J}$, est aussi une fonction logarithmiquement convexe dans cet intervalle, si cette fonction est positive*; de même, *la plus grande limite d'une famille de fonctions logarithmiquement convexes dans $\mathfrak{J}$, en nombre fini ou infini, est aussi une fonction logarithmiquement convexe dans cet intervalle.*

2.9. On doit à E. Artin [9] la remarque intéressante suivante : Soit $f(t, x)$ une fonction définie et positive quand $t \in [a, b]$ et $x \in [\xi, \eta]$;

---

(1) Dans cette démonstration nous n'avons rien supposé sur la dérivabilité de $f_i(x)$.

supposons que, pour chaque valeur de t, la fonction $f(t, x)$ soit logarithmiquement convexe en x dans $[\xi, \eta]$. On forme la fonction

$$(2.4)\quad \begin{cases} F_n(x) = h[f(a, x) + f(a+h, x) + \ldots + f(a+(n-1)h, x)] \\ \left(n = 1, 2, \ldots ; h = \dfrac{b-a}{n}\right). \end{cases}$$

$F_n(x)$, étant la somme d'un nombre fini de fonctions logarithmiquement convexes dans $[\xi, \eta]$, est une fonction logarithmiquement convexe dans cet intervalle, d'après 2.6; donc, grâce à 2.8,

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = \int_a^b f(t, x)\, dt$$

est une fonction logarithmiquement convexe dans $[\xi, \eta]$.

Si la limite b de l'intégrale augmente indéfiniment et s'il existe l'intégrale

$$(2.5)\qquad \int_a^\infty f(t, x)\, dt,$$

cette intégrale est aussi logarithmiquement convexe dans $[\xi, \eta]$. En effet, l'intégrale (2.5) est la limite d'intégrales dont la limite supérieure est finie; mais chacune d'elles est logarithmiquement convexe, comme nous venons de le voir; donc, d'après 2.8, la limite, c'est-à-dire l'intégrale (2.5), est une fonction de x logarithmiquement convexe dans $[\xi, \eta]$.

En particulier, si l'on considère l'intégrale

$$(2.6)\qquad \int_a^b \varphi(t)\, t^{x-1}\, dt \qquad (\varphi(t) > 0, \text{ quand } t \in [a, b]),$$

on parvient au théorème suivant :

Si $\varphi(t)$ est une fonction continue et positive dans $[a, b]$, *l'intégrale* (2.6) *est une fonction de x logarithmiquement convexe dans chaque intervalle où l'intégrale* (2.6) *existe; b peut être fini ou infini.*

3. Fonctions semi-monotones.

3.1. On dit [2] que l'ensemble linéaire D est de *différence* ω $(\omega > 0)$ si, quand $x \in D$, ou bien $x + \omega \in D$ ou bien $x - \omega \in D$. Ainsi l'intervalle fermé $\mathcal{J} = [a, b]$ est un ensemble de différence ω, pour chaque $\omega \leqq \dfrac{b-a}{2}$; de même, l'ensemble de deux nombres a, $a + \omega$ est un ensemble de différence ω.

3.2. Une fonction réelle $f(x)$, définie dans l'ensemble D de différence ω, est dite *semi-croissante* ω *dans* D [2], si

$$f(x+\omega) \geqq f(x) \qquad (x, x+\omega \in D). \tag{3.1}$$

On définit de même une fonction *semi-décroissante* ω *dans* D.

Pour une fonction $f(x)$ semi-croissante ω (resp. semi-décroissante ω) dans D, le quotient

$$\underset{\omega}{\Delta} f(x) = \frac{f(x+\omega)-f(x)}{\omega} \qquad (x, x+\omega \in D) \tag{3.2}$$

est $\geqq 0$ (resp. $\leqq 0$).

3.3. Il est évident, si l'ensemble D est l'intervalle $\mathcal{J}$, qu'une fonction croissante dans $\mathcal{J}$ est aussi semi-croissante ω dans $\mathcal{J}$, pour chaque $\omega \leqq \frac{b-a}{2}$; la réciproque n'a pas lieu en général. Une fonction semi-croissante ω a seulement « une tension générale croissante ». Mais, si la fonction $f(x)$ est semi-croissante ω pour *chaque* $\omega \leqq \delta$ (δ très petit, mais fixe), elle est croissante. On peut donc déduire les propriétés des fonctions croissantes de celles des fonctions semi-croissantes ω, en supposant $\omega \to 0$.

Mêmes remarques pour les fonctions semi-décroissantes ω.

3.4. On peut démontrer aisément les théorèmes suivants :

a. La somme d'un nombre fini de fonctions semi-croissantes ω *(resp. semi-décroissantes* ω*) dans* D *est une fonction semi-croissante* ω *(resp. semi-décroissante* ω*) dans cet ensemble.*

On tire, en effet, de

$$f_i(x+\omega) \geqq f_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k;\ x, x+\omega \in D)$$

l'inégalité

$$f_1(x+\omega) + \ldots + f_k(x+\omega) \geqq f_1(x) + \ldots + f_k(x).$$

b. Le produit d'un nombre fini de fonctions semi-croissantes ω *(resp. semi-décroissantes* ω*) et positives dans* D *est une fonction semi-croissante* ω *(resp. semi-décroissante* ω*) dans cet ensemble.*

La démonstration est immédiate.

c. Si les fonctions $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *sont semi-croissantes* ω *(resp. semi-décroissantes* ω*) dans* D *et si*

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x),$$

la fonction $f(x)$ *est aussi semi-croissante* ω *(resp. semi-décroissante* ω*) dans* D.

On a, en effet,

$$f_n(x+\omega)-f_n(x)\geqq 0$$

pour chaque $x\in D$ fixe ($x+\omega\in D$) et pour n naturel quelconque; donc

$$f(x+\omega)-f(x)\geqq 0.$$

Cette inégalité, étant valable pour $x\in D$ quelconque ($x+\omega\in D$), démontre le théorème.

3.5. Soit $f(x)$ une fonction quelconque définie dans l'ensemble D de différence ω; on appelle *semi-dérivée* ω *de* $f(x)$ *au point* x_0 le quotient

$$\underset{\omega}{\Delta} f(x_0)=\frac{f(x_0+\omega)-f(x_0)}{\omega}; \tag{3.3}$$

si $x_0\in D$, mais $x_0+\omega$ n'appartient pas à D, on dit que $f(x)$ n'a pas de semi-dérivée ω au point x_0.

Il résulte immédiatement de cette définition que *la condition nécessaire et suffisante pour que* $f(x)$ *soit semi-croissante* ω (*resp. semi-décroissante* ω) *dans* D, *est que la semi-dérivée* ω *soit* $\geqq 0$ (*resp.* $\leqq 0$) *dans* D (*c'est-à-dire à chaque point* $x\in D$ *pour qui* $x+\omega\in D$).

Pour que $f(x)$ soit *strictement* semi-croissante ω (resp. semi-décroissante ω) dans D, il faut et il suffit que $\underset{\omega}{\Delta} f(x)$ soit >0 (resp. <0) dans D.

3.6. La semi-dérivée ω de $f(x)$ d'ordre n se définit par la relation

$$\overset{n}{\underset{\omega}{\Delta}} f(x)=\underset{\omega}{\Delta}\left(\overset{n-1}{\underset{\omega}{\Delta}} f(x)\right). \tag{3.4}$$

Ainsi la semi-dérivée ω seconde est

$$\overset{2}{\underset{\omega}{\Delta}}=\frac{f(x+2\omega)-2f(x+\omega)+f(x)}{\omega^2} \qquad (x,\ x+\omega,\ x+2\omega\in D). \tag{3.5}$$

4. Fonctions semi-convexes.

4.1. On dit [2] qu'une fonction réelle $f(x)$, définie dans l'intervalle $\mathcal{J}=[a,b]$, est *semi-convexe* ω *dans* $\mathcal{J}$ ($\omega>0$ fixe), si

$$f(x+\omega)\leqq\frac{1}{2}[f(x)+f(x+2\omega)] \qquad (x,\ x+2\omega\in\mathcal{J}). \tag{4.1}$$

Il est évident qu'une fonction convexe dans $\mathcal{J}$ est aussi semi-convexe ω dans $\mathcal{J}$, pour chaque $\omega\leqq\frac{b-a}{2}$; la réciproque n'a pas lieu en général. Mais, si $f(x)$ est semi-convexe ω dans $\mathfrak{J}$, pour *chaque* $\omega \leqq \frac{b-a}{2}$, elle est convexe dans cet intervalle. On peut donc déduire les propriétés des fonctions convexes de celles des fonctions semi-convexes.

On dit qu'une fonction réelle $f(x)$, définie dans l'intervalle $\mathfrak{J} = [a, b]$, est *semi-concave* ω *dans* $\mathfrak{J}$ ($\omega > 0$ fixe), si

$$(4.2) \qquad f(x+\omega) \geqq \frac{1}{2}[f(x) + f(x+2\omega)] \qquad (x,\ x+2\omega \in \mathfrak{J}).$$

Puisque, $f(x)$ étant semi-concave ω dans $\mathfrak{J}$, $-f(x)$ est semi-convexe ω dans cet intervalle, à chaque propriété concernant les fonctions semi-convexes ω dans un intervalle correspond une propriété concernant les fonctions semi-concaves ω dans cet intervalle. Il suffit, donc, d'examiner les fonctions semi-convexes ω dans un intervalle.

4.2. On peut démontrer sans peine les propositions suivantes :

a. La somme d'un nombre fini de fonctions semi-convexes ω *dans* $\mathfrak{J}$ *est aussi une fonction semi-convexe* ω *dans* $\mathfrak{J}$.

La démonstration est immédiate.

b. Soient $f_1(x)$ *et* $f_2(x)$ *deux fonctions semi-convexes* ω *et positives dans* $\mathfrak{J} = [a, b]$; *s'il existe un nombre* $c \in \mathfrak{J}$ *tel que, dans chacun des intervalles* $[a, c]$ *et* $[c, b]$, $f_1(x)$ *et* $f_2(x)$ *sont toutes les deux ou bien semi-croissantes* ω *ou bien semi-décroissantes* ω, *le produit* $f_1(x) f_2(x)$ *est semi-convexe dans* $\mathfrak{J}$.

Démontrons le théorème dans le cas où $c = b$; dans le cas où $a \leqq c < b$ il en résulte immédiatement.

On a

$$\left.\begin{aligned} f_1(x+\omega) &\leqq \frac{1}{2}[f_1(x) + f_1(x+2\omega)] \\ f_2(x+\omega) &\leqq \frac{1}{2}[f_2(x) + f_2(x+2\omega)] \end{aligned}\right\} \qquad (x,\ x+2\omega \in \mathfrak{J});$$

donc, $f_1(x)$ et $f_2(x)$ étant positives dans $\mathfrak{J}$,

$$(4.3) \quad \begin{aligned} f_1(x+\omega) f_2(x+\omega) \leqq \frac{1}{4}[&f_1(x) f_2(x) + f_1(x) f_2(x+2\omega) \\ &+ f_2(x) f_1(x+2\omega) + f_1(x+2\omega) f_2(x+2\omega)]. \end{aligned}$$

Les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$ étant toutes les deux semi-croissantes ω ou semi-décroissantes ω dans $\mathfrak{J}$, on a

$$[f_1(x+2\omega) - f_1(x)][f_2(x+2\omega) - f_2(x)] \geqq 0,$$

ou bien

$$\frac{1}{4}[f_1(x)f_2(x)+f_1(x)f_2(x+2\omega)+f_2(x)f_1(x+2\omega)+f_1(x+2\omega)f_2(x+2\omega)]$$
$$\leqq \frac{1}{2}[f_1(x)f_2(x)+f_1(x+2\omega)f_2(x+2\omega)];$$

on a, donc, grâce à (4.3)

$$f_1(x+\omega)f_2(x+\omega) \leqq \frac{1}{2}[f_1(x)f_2(x)+f_1(x+2\omega)f_2(x+2\omega)].$$

c. *Si les fonctions* $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *sont semi-convexes* ω *dans* $\mathcal{J}$ *et si*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

la fonction $f(x)$ *est aussi semi-convexe* ω *dans* $\mathcal{J}$.

On a, en effet, pour chaque $x \in \mathcal{J}$ $(x+2\omega \in \mathcal{J})$ et pour n naturel quelconque,

$$f_n(x+\omega) - \frac{1}{2}[f_n(x)+f_n(x+2\omega)] \leqq 0;$$

donc,

$$f(x+\omega) \leqq \frac{1}{2}[f(x)+f(x+2\omega)].$$

Puisque $x \in \mathcal{J}$ est quelconque $(x+2\omega \in \mathcal{J})$, le théorème est démontré.

d. *La condition nécessaire et suffisante pour que* $f(x)$ *soit semi-convexe* ω *dans* $\mathcal{J}$, *est que la semi-dérivée* ω *de* $f(x)$ *dans* $\mathcal{J}$ *soit semi-croissante* ω *dans* $\mathcal{J}$.

La condition est nécessaire. Soit, en effet, $f(x)$ une fonction semi-convexe ω dans $\mathcal{J}$; on a, pour x, $x+2\omega \in \mathcal{J}$,

$$f(x+\omega) \leqq \frac{1}{2}[f(x)+f(x+2\omega)]$$

ou

$$\frac{f(x+\omega)-f(x)}{\omega} \leqq \frac{f(x+2\omega)-f(x+\omega)}{\omega},$$

donc,

$$\underset{\omega}{\Delta} f(x) \leqq \underset{\omega}{\Delta} f(x+\omega). \tag{4.4}$$

La condition est suffisante, puisque, de (4.4), il résulte immédiatement la semi-convexité ω de $f(x)$ dans $\mathcal{J}$.

e. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(x)$ soit semi-convexe ω dans $\mathcal{J}$, est que la semi-dérivée ω seconde de $f(x)$ soit $\geqq 0$.

Le fait que cette condition soit suffisante résulte immédiatement de (3.5). La condition est aussi nécessaire parce que de

$$f(x+\omega) \leqq \frac{1}{2}[f(x)+f(x+2\omega)],$$

résulte

$$\frac{f(x+2\omega)-2f(x+\omega)+f(x)}{\omega^2} = \overset{2}{\underset{\omega}{\Delta}} f(x) \geqq 0.$$

4.3. On dit qu'une fonction réelle $f(x)$, définie dans l'intervalle $\mathcal{J}=[a, b]$, est *semi-bornée inférieurement* ω *dans* $\mathcal{J}$, s'il y a un sous-intervalle $\mathcal{J}_1=[x_0, x_0+\omega]\subset\mathcal{J}$, tel que, pour $x\in\mathcal{J}_1$ quelconque, on ait

$$f(x) \leqq f(x\pm\omega) \qquad (x\pm\omega\in\mathcal{J}); \tag{4.5}$$

on dirait alors que $f(x)$ prend son *semi-minimum* ω à $\mathcal{J}_1$. Si $\mathcal{J}_1=[a, a+\omega]$ ou $[b-\omega, b]$, l'inégalité (4.5) est remplacée par

$$f(x)\leqq f(x+\omega) \qquad \text{ou} \qquad f(x)\leqq f(x-\omega).$$

On définit, de même, une fonction *semi-bornée supérieurement* ω dans $\mathcal{J}$.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Une fonction $f(x)$ semi-convexe ω et semi-bornée inférieurement ω dans $\mathcal{J}$, ou bien est semi-monotone ω dans $\mathcal{J}$, ou bien elle se compose de deux branches de la façon suivante : si elle prend son semi-minimum ω à l'intervalle $[x_0, x_0+\omega]$, elle est semi-décroissante ω dans l'intervalle $[a, x_0+\omega]$ et semi-croissante ω dans l'intervalle $[x_0, b]$.

1° Si $f(x)$ prend son semi-minimum ω dans l'intervalle $\mathcal{J}'=[a, a+\omega]$, on a pour $x\in\mathcal{J}'$ quelconque $(x+\omega\in\mathcal{J})$

$$f(x)\leqq f(x+\omega) \qquad (x,\ x+2\omega\in\mathcal{J}). \tag{4.6}$$

Mais, $f(x)$ étant semi-convexe ω dans $\mathcal{J}$, on a

$$f(x+\omega)\leqq\frac{1}{2}[f(x)+f(x+2\omega)] \qquad (x,\ x+2\omega\in\mathcal{J}) \tag{4.7}$$

et, compte tenu de (4.6),

$$f(x)\leqq f(x+2\omega) \qquad (x\in\mathcal{J}')$$

et de (4.7)

$$f(x+\omega) \leqq \frac{1}{2}[f(x)+f(x+2\omega)] \leqq f(x+2\omega) \qquad (x \in \mathcal{J}');$$

on en tire, par récurrence,

$$f(x+n\omega) \leqq f(x+(n+1)\omega) \qquad [n \text{ naturel}, x \in \mathcal{J}', x+(n+1)\omega \in \mathcal{J}].$$

On en déduit, pour $x \in \mathcal{J}$ quelconque, $(x+\omega \in \mathcal{J})$

$$f(x) \leqq f(x+\omega),$$

ce qui démontre que $f(x)$ est semi-croissante ω dans $\mathcal{J}$.

2° Supposons maintenant que la fonction $f(x)$ prenne son semi-minimum ω dans l'intervalle $\mathcal{J}'' = [b-\omega, b]$. On a alors, pour chaque $x \in \mathcal{J}''$ $(x-\omega \in \mathcal{J})$,

$$(4.8) \qquad f(x) \leqq f(x-\omega) \qquad (x \in \mathcal{J}'').$$

Mais, $f(x)$ étant semi-convexe ω dans $\mathcal{J}$, on a

$$(4.9) \qquad f(x-\omega) \leqq \frac{1}{2}[f(x)+f(x-2\omega)] \qquad (x, x-2\omega \in \mathcal{J})$$

et, en tenant compte de (4.8),

$$f(x) \leqq f(x-2\omega) \qquad (x \in \mathcal{J}'').$$

On tire de (4.9)

$$f(x-\omega) \leqq f(x-2\omega) \qquad (x \in \mathcal{J}'')$$

et, par récurrence,

$$f(x-n\omega) \leqq f(x-(n+1)\omega) \qquad [n \text{ naturel}, x \in \mathcal{J}'', x-(n+1)\omega \in \mathcal{J}].$$

On en déduit, pour $x \in \mathcal{J}$ quelconque $(x+\omega \in \mathcal{J})$,

$$f(x) \geqq f(x+\omega),$$

ce qui démontre la semi-décroissance ω de $f(x)$ dans $\mathcal{J}$.

3° Si les cas 1° et 2° n'ont pas lieu, soit $\mathcal{J}_1 = [x_0, x_0+\omega]$ l'intervalle dans lequel $f(x)$ prend son semi-minimum ω : Alors $f(x)$ est semi-convexe ω dans $[a, x_0+\omega]$ et prend son semi-minimum ω dans $[x_0, x_0+\omega]$. $f(x)$ est donc (cas 2°) semi-décroissante ω dans $[a, x_0+\omega]$. De même (cas 1°), $f(x)$ est semi-croissante ω dans $[x_0, b]$ (5).

(5) P. Montel [31] a trouvé récemment quelques propriétés remarquables de ces fonctions, qu'il préfère d'appeler *périodiquement monotones* (resp. *périodiquement convexes ou concaves*). *Voir* aussi [7].

CHAPITRE II.

LA FONCTION $\Gamma(x)$.

5. Définitions formelles de la fonction $\Gamma(x)$.

5.1. Si ν et n sont deux nombres naturels, il existe évidemment la relation

$$(5.1)\qquad (\nu-1)! = \frac{n!}{(\nu)_{n+1}}\, n^{\nu}\left[\frac{n+1}{n}\,\frac{n+2}{n}\cdots\frac{n+\nu}{n}\right],$$

où nous avons posé, pour abréger,

$$(5.2)\qquad (a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1),\qquad (a)_0 = 1.$$

La relation (5.1) a lieu quel que soit le nombre naturel n; si donc on suppose ν fixe et n tendant vers l'infini, on a

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+1}{n}\,\frac{n+2}{n}\cdots\frac{n+\nu}{n}\right] = 1$$

et l'on parvient à la formule

$$(5.3)\qquad (\nu-1)! = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^{\nu}}{(\nu)_{n+1}}.$$

5.2. Nous allons démontrer que le second membre de (5.3) est une fonction de ν, définie pour chaque valeur de $\nu > 0$ (6).

Posons, en effet,

$$(5.4)\qquad \Gamma_n(x) = \frac{n!\,n^x}{(x)_{n+1}},$$

où x est une variable qui prend des valeurs positives.

On tire de (5.4)

$$(5.5)\qquad \Gamma_n(x) = \frac{n!\,n^x}{(x)_{n+1}} = e^{x\left(\log n - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n}\right)}\,\frac{1}{x}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{e^{\frac{x}{\nu}}}{1+\frac{x}{\nu}}.$$

Démontrons d'abord que la limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$

(6) Weierstrass [36] a démontré que le second membre de (5.3) est une fonction méromorphe dans tout le plan ayant pour pôles simples o, — 1, —

existe. Posons

$$C'_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n, \qquad C''_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log(n+1);$$

on en tire

$$C'_n - C''_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0, \tag{5.6}$$

donc

$$\lim_{n \to \infty} (C'_n - C''_n) = 0. \tag{5.7}$$

Mais on sait que

$$\frac{1}{n+1} < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \qquad (n > 1),$$

donc

$$C'_n - C'_{n+1} = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} > 0$$

$$-C''_n + C''_{n-1} = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} < 0.$$

On en tire

$$C'_1 > C'_2 > C'_3 > \ldots, \qquad C''_1 < C''_2 < C''_3 < \ldots,$$

donc, grâce à (5.7), il existe

$$\lim_{n \to \infty} C'_n = \lim_{n \to \infty} C''_n = C.$$

Ce nombre, qui s'appelle la constante d'Euler, *est positif* et l'on a [37]

$$C = \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right\} e^{-t}\, dt. \tag{5.8}$$

Nous allons maintenant démontrer que $\Gamma_n(x)$ tend uniformément, pour $n \to \infty$ et $x > 0$, vers une fonction, qui sera désignée par $\Gamma(x)$. Pour cela, il faut démontrer que le produit infini

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{1 + \frac{x}{n}}$$

converge uniformément, pour $x > 0$; il suffit alors de démontrer que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right\} \tag{5.9}$$

converge absolument et uniformément pour $x > 0$. Pour le démontrer, soit R un nombre positif et prenons le nombre naturel $n > 2R$; donc, pour chaque $n > N$ et $0 < x < R$, on a

$$\frac{x}{n} < \frac{1}{2}. \tag{5.10}$$

Mais on tire de

$$\log\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + \ldots$$

l'inégalité

$$\left| \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right| \leq \frac{x^2}{2n^2\left(1 - \frac{x}{n}\right)} < \frac{R^2}{n^2} \qquad (n > N).$$

De la convergence de la série

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{R^2}{n^2}$$

on conclut la convergence absolue et uniforme de la série (5.9). On a donc défini la fonction

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^x n!}{(x)_{n+1}} \tag{5.11}$$

pour les valeurs positives de x.

Il résulte d'une façon pareille, en faisant de modifications évidentes à la démonstration, que le produit (5.5) converge dans l'intervalle $(-k, -k+1)$, où k est un nombre naturel quelconque.

$\Gamma(x)$ est donc définie — et la formule (5.11) *est valable — pour toutes les valeurs réelles de x, sauf pour les valeurs* $0, -1, -2, \ldots$.

5.3. On tire de (5.5) que

$$\Gamma(x) = e^{-Cx} \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{1 + \frac{x}{n}}; \tag{5.12}$$

on appelle *formule de Weierstrass* cette formule.

De (5.12) on peut trouver aisément la formule suivante due à Euler :

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1} \right\}. \tag{5.13}$$

On a, en effet,

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x\left[\lim_{m\to\infty} e^{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}-\log m\right)x}\right]\left[\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right\}\right]$$

$$= x\lim_{m\to\infty}\left[e^{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}-\log m\right)x}\prod_{n=1}^{m}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right\}\right]$$

$$= x\lim_{m\to\infty}\left[m^{-x}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{x}{n}\right)\right] = x\lim_{m\to\infty}\left[\prod_{n=1}^{m-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-x}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{x}{n}\right)\right]$$

$$= x\lim_{m\to\infty}\left[\prod_{n=1}^{m}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-x}\right\}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{x}\right],$$

d'où l'on tire la formule (5.13).

5.4. On peut déduire de (5.11) une équation fonctionnelle fondamentale pour la fonction $\Gamma(x)$.

Posons à (5.4) $x+1$ à la place de x; on a

$$\Gamma_n(x+1) = \frac{n^{x+1}\,n!}{(x+1)_{n+1}};$$

d'autre part, on tire de (5.2)

$$(a+1)_n = \frac{1}{a}(a)_{n+1}, \tag{5.14}$$

donc,

$$\Gamma_n(x+1) = x\,\frac{n^{x+1}\,n!}{(x)_{n+2}} = x\,\Gamma_n(x)\,\frac{n}{x+n+1};$$

on en tire

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x). \tag{5.15}$$

5.5. En posant à (5.5) $x = 1$, on a

$$\Gamma_n(1) = \frac{n}{n+1},$$

d'où l'on tire

$$\Gamma(1) = 1. \tag{5.16}$$

De (5.15) et (5.16) on tire

$$\Gamma(x+n) = (x)_n\,\Gamma(x) \tag{5.17}$$

et, pour $x = 1$,

$$\Gamma(n+1) = n!. \tag{5.18}$$

De la formule (5.11) on déduit aussitôt que $\Gamma(x)$ *est positive pour* $x > 0$.

5.6. Nous allons démontrer que la fonction $\Gamma(x)$ a des dérivées d'ordre quelconque.

Puisque $\Gamma(x) > 0$, pour $x > 0$, $\log \Gamma(x)$ existe et l'on tire de (5.12)

$$\log \Gamma(x) = -Cx - \log x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n} - \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right). \tag{5.19}$$

Pour démontrer que $\log \Gamma(x)$ est une fonction dérivable pour $x > 0$, il suffit de démontrer la convergence uniforme pour $x > 0$ de la série formée par les dérivées de termes de (5.19) :

$$-C - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} \right) = -C - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(x+n)}. \tag{5.20}$$

Mais, puisque $x > 0$,

$$\frac{x}{n(x+n)} < \frac{x}{n^2};$$

donc, quand x se trouve dans l'intervalle $(0, k]$, où k est un nombre positif fixe mais quelconque, on a

$$\frac{x}{n(n+x)} < \frac{k}{n^2} \qquad (0 < x \leqq k).$$

Les termes, donc, de la série qui figure dans le second membre de (5.20) sont plus petits de termes correspondants de la série convergente

$$k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Nous avons donc démontré qu'on a

$$\frac{d}{dx} \log \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -C - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} \right) \tag{5.21}$$

quand $x \in (0, k]$. Mais, k étant positif quelconque, la formule (5.21) est valable pour tout $x > 0$.

Formons maintenant la série de dérivées de termes de la série qui figure au troisième membre de (5.21); on a

$$\frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}. \tag{5.22}$$

Puisque, pour $x > 0$, on a

$$\frac{1}{(x+n)^2} < \frac{1}{n^2},$$

la série (5.22) converge uniformément pour $x > 0$ et l'on a

$$\frac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}. \tag{5.23}$$

On peut tirer de cette formule, la formule générale

$$\frac{d^{\nu-1}}{dx^{\nu-1}}\left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu (\nu-1)!}{(x+n)^\nu} \qquad (\nu \geqq 2). \tag{5.24}$$

Citons en passant que la formule (5.23) montre que *la fonction* $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ *est croissante pour* $x > 0$, car la dérivée de cette fonction est positive pour $x > 0$.

5.7. De (5.23) on tire aussitôt que, pour $x > 0$, on a

$$\frac{d^2}{dx^2}(\log \Gamma(x)) > 0.$$

Donc, grâce à 1.11, $\log \Gamma(x)$ est convexe pour $x > 0$, c'est-à-dire $\Gamma(x)$ *est logarithmiquement convexe pour* $x > 0$.

5.8. On peut démontrer [4] que *la fonction*

$$\varphi(x) = \left(\frac{e}{x}\right)^x \Gamma(x) \tag{5.25}$$

est décroissante pour $x > 0$.

On a, en effet,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \left(\frac{e}{x}\right)^x [\Gamma'(x) - \Gamma(x)\log x] \\ &= \left(\frac{e}{x}\right)^x \Gamma(x)\left[\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \log x\right]. \end{aligned} \tag{5.26}$$

On peut écrire (5.21) sous la forme

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -C - \frac{1}{x} + \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{x+m}\right) \tag{5.27}$$

et, puisque

$$\frac{1}{x+m} = \int_0^\infty e^{-t(x+m)}\, dt \qquad (m = 1, 2, \ldots;\ x > 0),$$

on a, compte tenu de (5.8),

$$(5.28)\quad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -C - \int_0^\infty e^{-xt}\,dt + \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \sum_{m=1}^{n} (e^{-mt} - e^{-(m+x)t})\,dt$$

$$= -C + \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-xt} - e^{-(n+1)t} + e^{-(x+n+1)t}}{1-e^{-t}}\,dt$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}\right) dt - \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{1-e^{-xt}}{1-e^{-t}}\, e^{-(n+1)t}\,dt.$$

Mais, si $0 < t \leqq 1$,

$$\frac{1-e^{-xt}}{1-e^{-t}}$$

est une fonction bornée de t qui tend vers 1, quand $t \to 0$; si $t \geqq 1$,

$$\frac{1-e^{-xt}}{1-e^{-t}} < \frac{1}{1-e^{-1}}.$$

Donc, on peut trouver un nombre K, qui ne dépend pas de t, tel que, pour chaque $0 < t < \infty$,

$$\frac{1-e^{-tx}}{1-e^{-t}} < K$$

et l'on a

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-xt}}{1-e^{-t}}\, e^{-(n+1)t}\,dt < K\int_0^\infty e^{-(n+1)t}\,dt = \frac{K}{n+1}.$$

Donc,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{1-e^{-xt}}{1-e^{-t}}\, e^{-(n+1)t}\,dt = 0$$

et l'on tire de (5.28)

$$(5.29)\qquad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}\right) dt.$$

D'autre part

$$(5.30)\qquad \log x = \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t}\,dt;$$

on trouve alors de (5.29) et (5.30)

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \log x + \frac{1}{2x} = -\int_0^\infty e^{-xt}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-xt}\,dt.$$

Mais on reconnaît aisément que, pour chaque $t > 0$,

$$\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} > 0,$$

donc,

$$(5.31)\quad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \log x + \frac{1}{2x} = -\int_0^\infty e^{-xt}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right) dt < 0 \qquad (x > 0).$$

On a, à plus forte raison,

$$(5.32)\qquad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \log x < 0 \qquad (x > 0).$$

Puisque, grâce à 5.5, $\Gamma(x)$ est positive, pour $x > 0$, on tire des (5.26) et (5.32)

$$\varphi'(x) < 0 \qquad (x > 0),$$

c'est-à-dire $\varphi(x)$ est décroissante pour $x > 0$.

6. La fonction $\mu(x)$.

6.1. La fonction $\mu(x)$ introduite d'abord par Plana [34], et après lui par Binet [11], est définie par la relation

$$(6.1)\qquad \mu(x) = \log \Gamma(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x + x - \frac{1}{2}\log(2\pi).$$

On voit aussitôt que $\mu(x)$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$(6.2)\qquad \mu(x) - \mu(x+1) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1.$$

D'autre part, *la fonction $\mu(x)$ est décroissante pour $x > 0$*, car on a

$$\mu'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \log x - \left(x - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{x} + 1$$
$$= \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \log x + \frac{1}{2x}$$

et, grâce à (5.31),

$$\mu'(x) < 0,$$

pour $x > 0$; $\mu(x)$ est donc décroissante pour $x > 0$.

6.2. Posons [9] pour abréger

$$g(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1; \tag{6.3}$$

l'équation (6.2) devient

$$\mu(x+1) = \mu(x) - g(x). \tag{6.4}$$

Démontrons d'abord que la série

$$g(x) + g(x+1) + \ldots + g(x+n) + \ldots \tag{6.5}$$

est convergente pour $x > 0$.

On a, en effet,

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y} = \frac{y}{1} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \ldots, \qquad |y| < 1 \tag{6.6}$$

et, en posant

$$y = \frac{1}{2x+1}, \tag{6.7}$$

on tire

$$g(x) = \frac{1}{3(2x+1)^2} + \frac{1}{5(2x+1)^4} + \ldots \tag{6.8}$$

qui, grâce à (6.6), est valable pour $x > 0$. D'autre part, de (6.8) on tire

$$\begin{aligned} 0 < g(x) &< \frac{1}{3(2x+1)^2} + \frac{1}{3(2x+1)^4} + \frac{1}{3(2x+1)^6} + \ldots \\ &= \frac{1}{3(2x+1)^2}\, \frac{1}{1 - \dfrac{1}{(2x+1)^2}} = \frac{1}{12x(x+1)} = \frac{1}{12x} - \frac{1}{12(x+1)}. \end{aligned}$$

Les membres de la série (6.5) étant tous positifs, pour $x > 0$, il suffit pour la démonstration de sa convergence pour $x > 0$, la démonstration de la convergence pour $x > 0$ de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{12(x+n)} - \frac{1}{12(x+n+1)}\right];$$

mais cette série est convergente et a pour somme $\frac{1}{12x}$.

6.3. Nous avons démontré dans 6.1 que $\mu(x)$ est décroissante pour $x > 0$; donc $\mu(x) + k$, où k est une constante, est aussi décroissante pour $x > 0$.

Nous allons trouver une fonction $\nu(x)$ qui vérifie les conditions suivantes :

I. Elle est décroissante pour $x > 0$;

II. $\nu(x+1) = \nu(x) - g(x)$;

III. $\nu(1) = g(1) + g(2) + \ldots + g(n) + \ldots$ [7].

On tire de l'équation

$$\nu(x+1) = \nu(x) - g(x), \tag{6.9}$$

comme on le reconnaît aisément,

$$\nu(x+n) = \nu(x) - g(x) - g(x+1) - \ldots - g(x+n-1). \tag{6.10}$$

Mais $\nu(x)$ étant supposée décroissante pour $x > 0$, on tire de

$$n < n + x \leqq n + 1 \qquad (n \text{ naturel}, x \in (0, 1])$$

la double inégalité

$$\begin{aligned}\nu(n) = \nu(1) - g(1) - \ldots - g(n-1) &\geqq \nu(x) - g(x) - g(x+1) - \ldots - g(x+n-1) \\ &\geqq \nu(1) - g(1) - \ldots - g(n) = \nu(n+1).\end{aligned}$$

La différence entre le premier et le troisième membre de cette relation est

$$\nu(n) - \nu(n+1) = g(n);$$

mais

$$g(n) = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} - 1$$

tend vers zéro quand $n \to \infty$. Donc, grâce à la condition III,

$$\nu(x) = g(x) + g(x+1) + \ldots + g(x+n) + \ldots, \tag{6.11}$$

cette série étant convergente pour $x > 0$, d'après 6.2.

Nous avons démontré (6.11) quand $x \in (0, 1]$. Pour les autres valeurs de $x > 0$ il résulte (6.11) aussitôt de l'équation (6.9).

6.4. On reconnaît aussitôt que si l'on demande une autre fonction $\nu_1(x)$ décroissante pour $x > 0$, qui vérifie l'équation fonctionnelle (6.9) et dont

$$\nu_1(1) = k,$$

on trouve

$$\nu_1(x) = k - \nu(1) + \nu(x). \tag{6.12}$$

---

[7] Cette série est convergente d'après 6.2.

Ainsi la fonction $\mu(x)$ vérifie ces conditions et l'on a, grâce à (6.2),

$$\mu(1) = 1 - \frac{1}{2}\log(2\pi) = k;$$

on trouve donc

$$\mu(x) = 1 - \frac{1}{2}\log(2\pi) - \nu(1) + \nu(x), \tag{6.13}$$

où $\nu(x)$ est la fonction (6.11).

6.5. Nous avons démontré dans 6.2 que

$$g(x) + g(x+1) + \ldots + g(x+n) + \ldots < \frac{1}{12x} \qquad (x > 0), \tag{6.14}$$

donc, grâce à (6.11),

$$0 < \nu(x) < \frac{1}{12x}. \tag{6.15}$$

On peut donc écrire

$$\nu(x) = \frac{\vartheta(x)}{12x} \qquad [0 < \vartheta(x) < 1]. \tag{6.16}$$

On peut donner à $\nu(x)$ une autre forme; remplaçons les valeurs de $g(x+n)$, tirées de (6.8), à (6.11); on trouve

$$\nu(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2x+2n+1)^{2p}}. \tag{6.17}$$

7. Définition fonctionnelle de $\Gamma(x)$. La proposition de Bohr-Mollerup.

7.1. Les définitions données à la fonction $\Gamma(x)$ sont purement formelles. La fonction $\Gamma(x)$ est définie par une relation, comme, par exemple, (5.11). On peut définir $\Gamma(x)$ comme une intégrale, comme nous allons le voir dans le paragraphe 10. Weierstrass a donné une définition de $\Gamma(x)$ basée à la recherche d'une fonction entière quand on donne ses racines. D'autre part Hölder [22] a démontré que $\Gamma(x)$ ne vérifie aucune équation différentielle algébrique (8).

On a demandé depuis longtemps de trouver une définition plus fonctionnelle pour cette remarquable fonction. Mais l'équation fonctionnelle

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{7.1}$$

(8) Une autre démonstration de ce fait a été donnée par A. Ostrowski [33].

ne suffit pas à définir la fonction $\Gamma(x)$, car si $p(x)$ est une fonction périodique quelconque admettant la période 1, la fonction $t(x) = \Gamma(x)\, p(x)$ vérifie évidemment l'équation (7.1).

Si l'on part donc de l'équation fonctionnelle fondamentale (7.1), on doit trouver une propriété complémentaire, telle que cette propriété avec (7.1) puisse définir $\Gamma(x)$. Cette propriété est la convexité logarithmique de $\Gamma(x)$, propriété qui a été établie à 5.7.

7.2. On peut, en effet, démontrer la proposition suivante de Bohr-Mollerup [12] ([9]) :

La fonction $\Gamma(x)$ *est la seule fonction qui est définie et positive pour* $x > 0$ *et qui vérifie les conditions suivantes :*

I. $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$;

II. *elle est logarithmiquement convexe pour* $x > 0$;

III. $\Gamma(1) = 1$.

Soit $f(x)$ une fonction quelconque qui vérifie les conditions de la proposition; si n est un nombre naturel $\geqq 2$ et $0 < x \leqq 1$, on tire des conditions I et III :

$$\left\{\begin{aligned} f(x+n) &= (x)_n f(x), \\ f(n) &= (n-1)!\,. \end{aligned}\right. \tag{7.2}$$

La fonction $f(x)$, d'après la condition II, est supposée logarithmiquement convexe pour $x > 0$; donc, d'après 2.2, $e^{ax} f(x)$ est convexe pour $x > 0$ quelle que soit la valeur de la constante a. En considérant donc les quatre nombres

$$n-1 < n < n+x \leqq n+1 \qquad (n \text{ naturel} \geqq 2,\ 0 < x \leqq 1),$$

on a, d'après 1.3,

$$\begin{aligned} \frac{e^{a(n-1)} f(n-1) - e^{an} f(n)}{-1} &\leqq \frac{e^{a(n+x)} f(n+x) - e^{an} f(n)}{x} \\ &\leqq \frac{e^{a(n+1)} f(n+1) - e^{an} f(n)}{1} \end{aligned}$$

ou bien, compte tenu des (7.2),

$$\frac{x(n-1)! + (n-1)! - xe^{-a}(n-2)!}{e^{ax}(x)_n} \leqq f(x) \leqq \frac{xe^{a} n! - x(n-1)! + (n-1)!}{e^{ax}(x)_n}.$$

([9]) *Voir* aussi le très remarquable travail de ARTIN [9], dont beaucoup de résultats se trouvent dans ce livre.

Cette inégalité, étant valable quel que soit n, reste valable si l'on remplace n par $n+1$ dans le premier membre; on trouve alors

$$\frac{xn!+n!-xe^{-a}(n-1)!}{e^{ax}(x)_{n+1}} \leq f(x) \leq \frac{xe^{a}n!-x(n-1)!+(n-1)!}{e^{ax}(x)_{n}}.$$

Cette inégalité est valable quelle que soit la valeur de la constante a, donc elle est valable pour $a=-\log n$; on a alors

$$\frac{n!\,n^{x}}{(x)_{n+1}} \leq f(x) \leq \frac{n!\,n^{x}}{(x)_{n+1}}\,\frac{x+n}{n},$$

d'où l'on tire

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^{x}}{(x)_{n+1}}=\Gamma(x) \qquad (x\in(0,\,1]). \tag{7.3}$$

Nous avons vérifié que $f(x)=\Gamma(x)$ quand $x\in(0,\ 1]$. Pour les autres valeurs de x, (7.3) résulte de l'équation fonctionnelle (7.1) qui est vérifiée par $f(x)$ et $\Gamma(x)$.

7.3. Il résulte de la démonstration qu'il n'est pas nécessaire de supposer que $f(x)$ soit logarithmiquement convexe dans tout le domaine $x>0$; il suffit qu'elle soit logarithmiquement convexe dans le domaine $x>\mathcal{M}$, où $\mathcal{M}$ est une constante positive, qui peut être aussi grande qu'on veut. On parvient donc au théorème suivant :

La fonction $\Gamma(x)$ est la seule fonction définie et positive pour $x>0$ qui vérifie les conditions suivantes :

I. $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$;

II. *elle est logarithmiquement convexe pour $x>\mathcal{M}$, où $\mathcal{M}$ est une constante positive, qui peut être aussi grande qu'on veut*;

III. $\Gamma(1)=1$.

8. Autre définition fonctionnelle de $\Gamma(x)$.

8.1. Au paragraphe 5.8 nous avons démontré que la fonction

$$\varphi(x)=\left(\frac{e}{x}\right)^{x}\Gamma(x) \tag{8.1}$$

est décroissante pour $x>0$.

Nous allons démontrer maintenant le théorème suivant [4] :

Une fonction $f(x)$ définie et positive pour $x>0$, se confond avec $\Gamma(x)$, si $f(x)$ vérifie les conditions suivantes :

I. $f(x+1)=xf(x)$;

II. $\left(\frac{e}{x}\right)^x f(x)$ *est décroissante* ([10]) *pour* $x > \mathfrak{M}$, *où* $\mathfrak{M}$ *est une constante positive aussi grande qu'on veut* ([11]);

III. $f(1) = 1$.

On tire des conditions I et III les relations (7.2); si n est un nombre naturel $> \mathfrak{M}$ et $0 < x \leqq 1$, on tire de

$$n < n + x \leqq n + 1,$$

grâce à la condition II :

$$\left(\frac{e}{n}\right)^n f(n) \geqq \left(\frac{e}{n+x}\right)^{n+x} f(n+x) \geqq \left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1} f(n+1),$$

ou, compte tenu des (7.2),

$$\left(\frac{e}{n}\right)^n (n-1)! \geqq \left(\frac{e}{n+x}\right)^{n+x} (x)_n f(x) \geqq \left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1} n!,$$

ou bien

$$\frac{(n-1)!\,(n+x)^{n+x}}{e^x\, n^n\, (x)_n} \geqq f(x) \geqq \frac{en!\,(n+x)^{n+x}}{e^x\,(n+1)^{n+1}\,(x)_n}.$$

Cette inégalité étant valable quel que soit le nombre naturel n $(> \mathfrak{M})$, reste valable si l'on remplace, dans le premier membre, $n - 1$ par n; on a alors

$$f_n(x) \geqq f(x) \geqq f_n(x)\, e \left(\frac{n+x}{n+x+1}\right)^{n+x+1},$$

où nous avons posé

$$f_n(x) = \frac{n!\,(n+x+1)^{n+x+1}}{e^x\,(n+1)^{n+1}\,(x)_{n+1}}.$$

Mais

$$\left(\frac{n+x}{n+x+1}\right)^{n+x+1}$$

est toujours plus petit que $\frac{1}{e}$ et tend vers $\frac{1}{e}$ quand $n \to \infty$; on a donc

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x). \tag{8.2}$$

([10]) Pour la fonction $f(x)$ rien n'est supposé.

([11]) *Dans la suite nous désignerons par* $\mathfrak{M}$ *une telle constante, c'est à-dire une constante positive, qui peut être aussi grande qu'on veut.*

D'autre part, on a

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n!\,n^x}{(x)_{n+1}}\,\frac{1}{e^x}\,\frac{(n+x+1)^{n+x+1}}{n^x(n+1)^{n+1}}\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^x}{(x)_{n+1}}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+x+1}{n}\right)^x\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+x+1}{n+1}\right)^{n+1}\frac{1}{e^x}$$
$$= \Gamma(x)\,.\,1\,.\,e^x\frac{1}{e^x} = \Gamma(x).$$

Nous avons démontré que,

$$f(x) = \Gamma(x) \tag{8.3}$$

quand $x \in (0, 1]$. Pour les autres valeurs de $x > 0$, (8.3) résulte de l'équation fonctionnelle

$$f(x+1) = x f(x)$$

qui est vérifiée par $f(x)$ et $\Gamma(x)$.

9. Les valeurs de $\Gamma(x)$ pour les grandes valeurs de x.

9.1. Nous allons utiliser les résultats précédents pour estimer $\Gamma(x)$ pour les grandes valeurs de x.

Considérons la fonction

$$\varphi(x) = a\left(\frac{x}{e}\right)^x \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\nu(x)}, \tag{9.1}$$

où $\nu(x)$ est la fonction rencontrée dans 6.3 et a une constante. On a

$$\varphi(x+1) = a\left(\frac{x+1}{e}\right)^{x+1}\frac{1}{\sqrt{x+1}}e^{\nu(x+1)}$$

et, grâce à (6.9),

$$\varphi(x+1) = a\left(\frac{x+1}{e}\right)^{x+1}\frac{1}{\sqrt{x+1}}e^{\nu(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+1} \tag{9.2}$$
$$= xa\left(\frac{x}{e}\right)^x\frac{1}{\sqrt{x}}e^{\nu(x)} = x\,\varphi(x).$$

En prenant

$$a = e^{1-\nu(1)}, \tag{9.3}$$

on a

$$\varphi(1) = 1. \tag{9.4}$$

D'autre part

$$\left(\frac{e}{x}\right)^x\varphi(x) = e^{1-\nu(1)}\,e^{\nu(x)}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

est une fonction décroissante, pour $x > 0$, car, d'une part, $\nu(x)$ est une fonction décroissante, pour $x > 0$, donc, $e^{\nu(x)}$ est aussi une telle fonction et, d'autre part, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est une fonction décroissante, pour $x > 0$.

Donc, la fonction $\varphi(x)$, définie par (9.1), est une fonction définie et positive pour $x > 0$, qui vérifie les conditions suivantes :

I. $\varphi(x+1) = x\,\varphi(x)$;

II. $\left(\frac{e}{x}\right)^x \varphi(x)$ est une fonction décroissante pour $x > 0$;

III. $\varphi(1) = 1$.

D'après, donc, le théorème 8.1 :

$$\varphi(x) = \Gamma(x) \tag{9.5}$$

et l'on a

$$\Gamma(x) = a\left(\frac{x}{e}\right)^x e^{\nu(x)} \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad (a = e^{1-\nu(1)}). \tag{9.6}$$

En utilisant la formule (6.16), on a

$$\Gamma(x) = a\left(\frac{x}{e}\right)^x \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\frac{\vartheta(x)}{12x}} \qquad [0 < \vartheta(x) < 1], \tag{9.7}$$

et, en posant $x = n$, on trouve

$$\Gamma(n) = (n-1)! = a\,\frac{n^{n-\frac{1}{2}}}{e^n}\, e^{\frac{\vartheta(n)}{12n}}$$

et, en multipliant par n,

$$n! = a n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{\vartheta(n)}{12n}} \qquad [0 < \vartheta(n) < 1]. \tag{9.8}$$

Au paragraphe 10.3 [formule (10.16)] nous calculerons la constante a.

10. Propriétés de la fonction $\Gamma(x)$.

10.1. Considérons la fonction

$$\varphi(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt \qquad (x > 0); \tag{10.1}$$

il faut démontrer d'abord l'existence de cette intégrale, pour $x > 0$. Considérons les deux intégrales

$$\int_\varepsilon^1 e^{-t} t^{x-1}\,dt, \qquad \int_1^l e^{-t} t^{x-1}\,dt, \tag{10.2}$$

où ε est un nombre positif < 1 et l un nombre positif très grand. On a, pour $t > 0$,

$$e^{-t}t^{x-1} < t^{x-1},$$

donc,

$$\int_{\varepsilon}^{1} e^{-t}t^{x-1}\,dt < \int_{\varepsilon}^{1} t^{x-1}\,dt = \frac{1}{x} - \frac{\varepsilon^x}{x} < \frac{1}{x}.$$

Nous avons, par conséquent, quel que soit ε positif et < 1, une borne supérieure pour la première intégrale des (10.2). D'autre part cette intégrale croît quand ε décroît et, par conséquent, il existe l'intégrale

$$\int_{0}^{1} e^{-t}t^{x-1}\,dt \qquad (x > 0).$$

En ce qui concerne la seconde intégrale, puisque

$$e^{-t} < \frac{n!}{t^n} \qquad (t > 0),$$

on a

$$e^{-t}t^{x-1} < \frac{n!}{t^{n-x+1}}.$$

Si, donc, on prend le nombre naturel $n > x + 1$, on a

$$\int_{1}^{l} e^{-t}t^{x-1}\,dt < \frac{n!}{n-x};$$

$\dfrac{n!}{n-x}$ est donc, pour x fixe, une borne supérieure pour la seconde intégrale des (10.2). Mais, puisque quand l croît, cette intégrale croît aussi, il existe l'intégrale

$$\int_{1}^{\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt \qquad (x > 0).$$

Il existe, par conséquent, l'intégrale (10.1), pour $x > 0$.

10.2. Considérons l'intégrale

$$\int_{\varepsilon}^{l} e^{-t}t^{x}\,dt$$

et intégrons par parties; on a

$$\int_{\varepsilon}^{l} e^{-t}t^{x}\,dt = e^{-\varepsilon}\varepsilon^{x} - e^{-l}l^{x} + x\int_{\varepsilon}^{l} e^{-t}t^{x-1}\,dt.$$

Mais, on reconnaît aisément que, si $\varepsilon \to 0$ et $l \to \infty$, on a

$$e^{-\varepsilon}\varepsilon^{x} - e^{-l}l^{x} \to 0;$$

on parvient, donc, à la formule

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{x}\,dt = x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt$$

ou bien, compte tenu de (10.1),

$$\varphi(x+1) = x\,\varphi(x). \tag{10.3}$$

D'autre part on peut sans peine démontrer que, la fonction

$$\sigma(x) = \left(\frac{e}{x}\right)^{x}\varphi(x) \tag{10.4}$$

est décroissante pour $x > \mathfrak{M}$. On a, en effet,

$$\begin{aligned}
\sigma'(x) &= \left(\frac{e}{x}\right)^{x}[\varphi'(x) - \varphi(x)\log x] \\
&= \left(\frac{e}{x}\right)^{x}\left[\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\log t\,dt - \log x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt\right] \\
&= \left(\frac{e}{x}\right)^{x}\left[\int_0^e e^{-t}t^{x-1}\log t\,dt - \log x\int_0^e e^{-t}t^{x-1}\,dt\right] \\
&\quad + \left(\frac{e}{x}\right)^{x}\left[\int_e^\infty e^{-t}t^{x-1}\log t\,dt - \log x\int_e^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt\right] \qquad (x > 0).
\end{aligned}$$

Mais

$$\int_0^e e^{-t}t^{x-1}\log t\,dt \leqq \int_0^e e^{-t}t^{x-1}\,dt,$$

parce que $0 < t \leqq e$, et

$$\int_e^\infty e^{-t}t^{x-1}\log t\,dt > \int_e^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt,$$

parce que $e < t < \infty$. Donc,

$$\sigma'(x) < \left(\frac{e}{x}\right)^{x}[1 - \log x]\int_0^e e^{-t}t^{x-1}\,dt + \left(\frac{e}{x}\right)^{x}[1 - \log x]\int_e^\infty e^{-t}t^{x-1}\log t\,dt.$$

En prenant, par exemple, $x > 3$, on a

$$\sigma'(x) < 0, \tag{10.5}$$

parce que les intégrales sont positives.

Enfin, on reconnaît aussitôt que

$$\varphi(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1. \tag{10.6}$$

Donc, la fonction $\varphi(x)$ est définie et positive pour $x > 0$ et satisfait les conditions suivantes :

I. $\varphi(x+1) = x\,\varphi(x)$;

II. $\left(\dfrac{e}{x}\right)^x \varphi(x)$ est décroissante quand $x > \mathfrak{M}$;

III. $\varphi(1) = 1$.

D'après le théorème 8.1, on a

$$\varphi(x) = \Gamma(x).$$

On parvient, donc, à la formule

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt. \tag{10.7}$$

10.3. Considérons la fonction

$$\varphi(x) = \frac{1}{a_p} p^x \,\Gamma\left(\frac{x}{p}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right), \tag{10.8}$$

où p est un nombre naturel et a_p une constante. Cette fonction est logarithmiquement convexe, car $x \log p$ est une fonction linéaire et chacune des autres fonctions est une fonction logarithmiquement convexe, d'après 5.7, 2.5 et 2.7. D'autre part

$$\begin{aligned}\varphi(x+1) &= \frac{1}{a_p} p^{x+1}\,\Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{x+2}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+p}{p}\right)\\ &= \frac{1}{a_p}\,\frac{x}{p}\,p^{x+1}\,\Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{x+2}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x}{p}\right) = x\,\varphi(x);\end{aligned}$$

enfin, on tire de (10.8), pour $x = 1$,

$$\varphi(1) = \frac{1}{a_p}\,p\,\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{p}{p}\right).$$

Si l'on prend

$$a_p = p\,\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{p}{p}\right), \tag{10.9}$$

on a

$$\varphi(1) = 1. \tag{10.10}$$

Donc, d'après la proposition de Bohr-Mollerup (§ 7.2), on a

$$\varphi(x) = \Gamma(x),$$

c'est-à-dire

$$\Gamma(x) = \frac{1}{p\,\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{p}{p}\right)}\, p^x\, \Gamma\left(\frac{x}{p}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right). \tag{10.11}$$

On peut calculer a_p; on tire de (10.9), grâce à (5.11)

$$a_p = p\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^{\frac{1}{p}}}{\left(\frac{1}{p}\right)_{n+1}}\;\frac{n!\,n^{\frac{2}{p}}}{\left(\frac{2}{p}\right)_{n+1}}\cdots\frac{n!\,n^{\frac{p}{p}}}{\left(\frac{p}{p}\right)_{n+1}} \tag{10.12}$$

$$= p\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^p\, n^{\frac{p+1}{2}}\, p^{np+p}}{(np+p)!}.$$

Mais, on a évidemment

$$(np+p)! = (np)!\,(np)^p\left[\left(1+\frac{1}{np}\right)\left(1+\frac{2}{np}\right)\cdots\left(1+\frac{p}{np}\right)\right].$$

Puisque l'expression entre le crochet tend vers 1, quand $n\to\infty$, on a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(np+p)!}{(np)!\,(np)^p} = 1$$

et l'on tire de (10.12)

$$a_p = p\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^p\, p^{np}}{(np)!\, n^{\frac{p-1}{2}}}. \tag{10.13}$$

Si maintenant on y remplace $n!$ et $(np)!$ par les formules (9.8), on a

$$a_p = \sqrt{p}\, a^{p-1}\lim_{n\to\infty} e^{p\frac{\vartheta(n)}{12n}-\frac{\vartheta_1(np)}{12np}},$$

ou bien

$$a_p = \sqrt{p}\, a^{p-1}. \tag{10.14}$$

En égalant maintenant (10.9) et (10.14) et en prenant $p = 2$, on a

$$a_2 = 2\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1) = \sqrt{2}\,a,$$

donc

$$a = \sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1). \tag{10.15}$$

Nous allons voir au paragraphe 10.6 [formule (10.33)] que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$; on a, donc,

$$a = \sqrt{2\pi} \tag{10.16}$$

et de (10.14)

$$a_p = \sqrt{p}\,(2\pi)^{\frac{p-1}{2}} \tag{10.17}$$

On parvient, donc, à *la formule de multiplication de Gauss* [19] :

$$\Gamma\left(\frac{x}{p}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}}{p^{x-\frac{1}{2}}}\Gamma(x). \tag{10.18}$$

En particulier pour $p = 2$ on a *la formule de Legendre* [28] :

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\Gamma(x). \tag{10.19}$$

10.4. La formule (9.8) devient, grâce à (10.16),

$$n! = \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{\vartheta(n)}{12n}} \qquad [0 < \vartheta(n) < 1]. \tag{10.20}$$

D'autre part, d'après (9.3), on a

$$\nu(1) = 1 - \log a$$

et, en tenant compte de (10.16),

$$\nu(1) = 1 - \frac{1}{2}\log(2\pi). \tag{10.21}$$

En posant cette valeur à (6.13), on trouve

$$\mu(x) = \nu(x). \tag{10.22}$$

On a donc, grâce à (6.1), (6.11) et (6.17),

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \log\Gamma(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x + x - \frac{1}{2}\log(2\pi) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} g(x+n) = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{2p+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2x+2n+1)^{2p}}. \end{aligned} \tag{10.23}$$

10.5. Nous allons démontrer maintenant la proposition suivante :

Une fonction périodique $\varphi(x)$ *admettant la période* 1, *positive pour* $0 \leq x \leq 1$, *qui possède une dérivée seconde continue dans cet intervalle et qui vérifie l'équation fonctionnelle*

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = c\,\varphi(x) \qquad (c = \text{Cte}) \tag{10.24}$$

est une constante.

Appelons

$$g(x) = \frac{d^2}{dx^2}(\log\varphi(x)); \tag{10.25}$$

$g(x)$ admet 1 comme période et vérifie l'équation fonctionnelle

$$\frac{1}{4}\left[g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right] = g(x). \tag{10.26}$$

Mais, puisque $g(x)$ est continue dans l'intervalle $[0, 1]$, elle y est bornée :

$$|g(x)| \leq K \qquad (x \in [0, 1]);$$

de la périodicité de $g(x)$, il résulte que

$$|g(x)| \leq K \tag{10.27}$$

est valable pour *chaque* x. De (10.25) on tire

$$|g(x)| \leq \frac{1}{4}(K + K) = \frac{K}{2};$$

donc, si K est une borne supérieure pour $|g(x)|$, $\frac{K}{2}$ en est une autre; on peut, par conséquent, construire une borne supérieure aussi petite qu'on veut. On a, donc,

$$g(x) = 0$$

et, de (10.25),

$$\log\varphi(x) = ax + b.$$

Mais, puisque $\varphi(x)$ admet la période 1, on a

$$a(x+1) + b = ax + b,$$

ce qui donne $a = 0$.

On a finalement

$$\log\varphi(x) = b,$$

ou

$$\varphi(x) = \text{Cte} \quad [12].$$

10.6. Nous avons défini, au paragraphe 5.2, la fonction $\Gamma(x)$ pour toutes les valeurs réelles de x, sauf pour les valeurs $0, -1, -2, \ldots$.

Considérons maintenant la fonction

$$\varphi(x) = \Gamma(x)\,\Gamma(1-x)\,\sin\pi x, \tag{10.28}$$

où nous supposons que x n'est pas un nombre entier. On a

$$\begin{aligned}\varphi(x+1) &= \Gamma(x+1)\,\Gamma(-x)\,\sin\pi(x+1)\\ &= x\Gamma(x)\frac{\Gamma(1-x)}{-x}(-\sin\pi x) = \varphi(x),\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\varphi(x)$ admet la période 1.

D'autre part de (10.19) on a, si l'on pose $1-x$ à la place de x,

$$\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right) = 2\sqrt{\pi}\,2^{x-1}\,\Gamma(1-x).$$

On a, donc,

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)\sin\frac{\pi x}{2}\,\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)\cos\frac{\pi x}{2}\\ &= \pi\,\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)\,\sin\pi x = \pi\,\varphi(x).\end{aligned}$$

$\varphi(x)$ vérifie alors l'équation fonctionnelle

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \pi\,\varphi(x). \tag{10.29}$$

Enfin, $\varphi(x)$ possède des dérivées d'ordre quelconque, car $\Gamma(x)$ et $\sin x$ en possèdent.

Nous pouvons encore écrire $\varphi(x)$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{\Gamma(x+1)}{x}\Gamma(1-x)\,\sin\pi x\\ &= \Gamma(x+1)\,\Gamma(1-x)\left[\pi - \frac{\pi^3 x^2}{3\,!} + \frac{\pi^5 x^4}{5\,!} - \cdots\right].\end{aligned}$$

On sait que la série du troisième membre converge, pour chaque x. Donc le troisième membre de cette égalité a un sens, aussi pour $x = 0$; il représente, donc, une fonction qui admet des dérivées d'ordre quel-

---

[12] Cette méthode de démonstration est due à Herglotz. *Voir* ARTIN [9], p. 25.

conque. Il est, par conséquent, naturel de donner la valeur π à $\varphi(x)$, pour $x = 0$, c'est-à-dire

$$\varphi(0) = \pi. \tag{10.30}$$

Mais, puisque $\varphi(x)$ admet la période 1, on définit $\varphi(x)$ pour chaque x entier par la valeur π. Ainsi, $\varphi(x)$ est définie pour chaque x, elle est continue et admet des dérivées d'ordre quelconque.

Donc, d'après le théorème 10.5,

$$\varphi(x) = \Gamma(x)\,\Gamma(1-x)\,\sin\pi x = \text{Cte}. \tag{10.31}$$

De (10.31) on tire, pour $x = 0$, grâce à (10.30), que la constante est π et l'on a

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x} \tag{10.32}$$

qui est due à Euler et qui s'appelle quelquefois *relation des compléments.*

Pour $x = \frac{1}{2}$, (10.32) donne

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{10.33}$$

11. Autre définition fonctionnelle de $\Gamma(x)$.

11.1. Soit $f(x)$ une fonction quelconque; posons

$$\frac{f(x)}{\Gamma(x)} = \varphi(x). \tag{11.1}$$

Si $f(x)$ vérifie une des équations fonctionnelles suivantes :

$$f(x+1) = x f(x), \tag{11.2}$$

$$f\left(\frac{x}{p}\right) f\left(\frac{x+1}{p}\right) \cdots f\left(\frac{x+p-1}{p}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}}{p^{x-\frac{1}{2}}} f(x), \tag{11.3}$$

$$f(x) f(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}, \tag{11.4}$$

$\varphi(x)$ vérifie respectivement une des équations fonctionnelles suivantes :

$$\varphi(x+1) = \varphi(x), \tag{11.5}$$

$$\varphi\left(\frac{x}{p}\right) \varphi\left(\frac{x+1}{p}\right) \cdots \varphi\left(\frac{x+p-1}{p}\right) = \varphi(x), \tag{11.6}$$

$$\varphi(x)\,\varphi(1-x) = 1. \tag{11.7}$$

En particulier, si $f(x)$ vérifie la relation de Legendre

$$f\left(\frac{x}{2}\right) f\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}} f(x), \tag{11.8}$$

$\varphi(x)$ vérifie l'équation

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right)=\varphi(x). \tag{11.9}$$

Supposons que $f(x)$, donc $\varphi(x)$, soit continue pour $x \geqq 0$ et que $f(x)$ vérifie l'équation (11.2), c'est-à-dire que $\varphi(x)$ est une fonction périodique admettant 1 comme période. Si $f(x)$ est positive pour $x > 0$, il en est de même de $\varphi(x)$, pour $x > 0$, donc,

$$g(x)=\log\varphi(x)$$

est une fonction continue pour $x > 0$. Les équations correspondantes de (11.6), (11.7) et (11.8) sont

$$g\left(\frac{x}{p}\right)+g\left(\frac{x+1}{p}\right)+\ldots+g\left(\frac{x+p-1}{p}\right)=g(x), \tag{11.10}$$

$$g(x)=-g(1-x)=-g(-x), \tag{11.11}$$

$$g\left(\frac{x}{2}\right)+g\left(\frac{x+1}{2}\right)=g(x). \tag{11.12}$$

Supposons encore que $f(x)$, donc $\varphi(x)$, admette une dérivée du second ordre continue. D'après le théorème 10.5, si $\varphi(x)$ vérifie l'équation (11.9), elle est constante. On peut trouver cette constante si l'on pose à (11.9) $x = 1$; on trouve

$$\varphi(x)=1$$

et, d'après (11.1),

$$f(x)=\Gamma(x). \tag{11.13}$$

On parvient, donc, au théorème suivant :

La fonction $\Gamma(x)$ est la seule fonction positive, pour $x > 0$, qui admet une dérivée seconde continue et qui vérifie les équations fonctionnelles (11.2) et (11.8).

E. Artin, à qui l'on doit ce théorème, a examiné ([9], p. 32-35) les cas dans lesquels on peut éliminer la supposition de dérivabilité de $f(x)$. Nous envoyons le lecteur intéressé au Mémoire d'Artin.

12. Quelques généralisations.

12.1. Soit [3] $f(x)$ une fonction définie et positive pour $x > 0$ qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$f(x+1)=\frac{x(x+a_1)\ldots(x+a_p)}{(x+b_1)\ldots(x+b_q)}f(x) \qquad (a_i,\ b_i > 0). \tag{12.1}$$

Si n est un nombre naturel, on tire de cette relation

$$(12.2)\qquad f(x+n)=\frac{(x)_n\prod_{i=1}^{p}(x+a_i)_n}{\prod_{i=1}^{q}(x+b_i)_n}f(x)\equiv\sigma_n(x)f(x),$$

$$(12.3)\qquad f(1+n)=\frac{n!\prod_{i=1}^{p}(a_i+1)_n}{\prod_{i=1}^{q}(b_i+1)_n}f(1)\equiv\sigma_n(1)f(1).$$

On remarque aussitôt que si

$$p>q-1 \quad\text{ou}\quad p=q-1 \quad\text{et}\quad b_1+\ldots+b_q>a_1+\ldots+a_p,$$

on a

$$(12.4)\qquad \frac{f(n)}{f(n-1)}\leqq\frac{f(n+1)}{f(n)},$$

pour n *suffisamment* grand.

En posant, en effet, à (12.4) les valeurs tirées de (12.3), on a

$$(n-1)\frac{(a_1+n-1)\ldots(a_p+n-1)}{(b_1+n-1)\ldots(b_q+n-1)}\leqq n\frac{(a_1+n)\ldots(a_p+n)}{(b_1+n)\ldots(b_q+n)};$$

on en tire

$$(12.5)\qquad (-q+p+1)n^{p+q}+(b_1+\ldots+b_q-a_1-\ldots-a_p)n^{p+q-1}+\ldots\geqq 0.$$

Pour n suffisamment grand, le polynome du premier membre a le signe du premier terme. Donc, l'inégalité (12.4) est vraie, si $p+1>q$; si $p+1=q$ et $b_1+\ldots+b_q>a_1+\ldots+a_p$, l'inégalité est aussi vraie. Si $p+1=q$ et $b_1+\ldots+b_q=a_1+\ldots+a_p$, il faut examiner les coefficients suivants.

On remarque aussi que, si

$$p<q-1 \quad\text{ou}\quad p=q-1 \quad\text{et}\quad b_1+\ldots+b_q<a_1+\ldots+a_p,$$

on a

$$(12.6)\qquad \frac{f(n)}{f(n-1)}\geqq\frac{f(n+1)}{f(n)}.$$

12.2. Nous allons démontrer maintenant le théorème suivant :

Si $f(x)$ est une fonction définie et positive pour $x > 0$ qui :

I. *vérifie l'équation fonctionnelle* (12.1);

II. *est logarithmiquement convexe pour $x > \mathfrak{M}$* [13];

III. $p > q - 1$ *ou* $p = q - 1$ *et* $b_1 + \ldots + b_q > a_1 + \ldots + a_p$;

on a

$$f(x) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(x+a_1)\ldots\Gamma(x+a_p)}{\Gamma(x+b_1)\ldots\Gamma(x+b_q)}\,k,$$

où

$$k = \frac{\Gamma(b_1)\ldots\Gamma(b_q)}{\Gamma(a_1)\ldots\Gamma(a_p)}\,\frac{b_1\ldots b_q}{a_1\ldots a_p}\,f(1).$$

Il suffit de démontrer le théorème quand $x \in (0, 1]$. Pour les autres valeurs de x il résulte le théorème de (12.1).

Grâce à la condition II pour les quatre nombres

$$n-1 < n < n+x \leqq n+1 \qquad (n > \mathfrak{M}+1,\ x \in (0, 1]),$$

on a

$$\frac{\log f(n-1) - \log f(n)}{-1} \leqq \frac{\log f(n+x) - \log f(n)}{x} \leqq \frac{\log f(1+n) - \log f(n)}{1}$$

ou, compte tenu des (12.2),

$$\left[\frac{f(n)}{f(n-1)}\right]^x \frac{f(n)}{\sigma_n(x)} \leqq f(x) \leqq \left[\frac{f(n+1)}{f(n)}\right]^x \frac{f(n)}{\sigma_n(x)}. \tag{12.7}$$

Cette inégalité, étant valable quel que soit $n > \mathfrak{M} + 1$, reste valable, si dans le premier membre, on remplace $n - 1$ par n; on trouve alors

$$\left[\frac{f(n+1)}{f(n)}\right]^x \frac{f(n+1)}{\sigma_{n+1}(x)} \leqq f(x) \leqq \left[\frac{f(n+1)}{f(n)}\right]^x \frac{f(n)}{\sigma_n(x)}. \tag{12.8}$$

D'autre part, on reconnaît aisément qu'on a

$$\frac{f(n)}{\sigma_n(x)} = \frac{f(n+1)}{\sigma_{n+1}(x)}\,\frac{x+n}{n}\,\frac{(x+a_1+n)\ldots(x+a_p+n)}{(a_1+n)\ldots(a_p+n)}\,\frac{(b_1+n)\ldots(b_q+n)}{(x+b_1+n)\ldots(x+b_q+n)};$$

si, donc, on pose

$$\left[\frac{f(n+1)}{f(n)}\right]^x \frac{f(n+1)}{\sigma_{n+1}(x)} = F_n(x),$$

[13] *Voir* la note [11] du paragraphe 8.1.

on tire de (12.8)

$$F_n(x) \leqq f(x) \leqq F_n(x)\left[\frac{x+n}{n}\prod_{i=1}^{p}\frac{x+a_i+n}{a_i+n}\prod_{i=1}^{q}\frac{b_i+n}{x+b_i+n}\right].$$

Mais l'expression, qui se trouve dans le crochet du troisième membre, tend vers 1, quand $n \to \infty$; on a, donc,

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} F_n(x),$$

ou bien, compte tenu de (12.2) et (12.3)

$$f(x) = \lim_{n \to \infty}\left\{\left[n\frac{(a_1+n)\ldots(a_p+n)}{(b_1+n)\ldots(b_q+n)}\right]^x \frac{n!}{(x)_{n+1}}\right.$$
$$\left.\times\prod_{i=1}^{q}\frac{(x+b_i)_{n+1}}{(b_i+1)_n}\prod_{i=1}^{p}\frac{(a_i+1)_n}{(x+a_i)_{n+1}}f(1)\right\}.$$

Mais on peut écrire $F_n(x)$ comme il suit :

$$F_n(x) = \frac{n!\,n^x}{(x)_{n+1}}\frac{\prod_{i=1}^{p}\frac{n!\,n^{x+a_i}}{(x+a_i)_{n+1}}\prod_{i=1}^{q}\frac{n!\,n^{b_i}}{(b_i)_{n+1}}}{\prod_{i=1}^{q}\frac{n!\,n^{x+b_i}}{(x+b_i)_{n+1}}\prod_{i=1}^{p}\frac{n!\,n^{a_i}}{(a_i)_{n+1}}}$$
$$\times\left[\frac{n^q(a_1+n)\ldots(a_p+n)}{n^p(b_1+n)\ldots(b_q+n)}\right]^x\frac{b_1\ldots b_q}{a_1\ldots a_p}f(1).$$

Puisque l'expression, qui se trouve dans le crochet du second membre, tend vers 1 quand $n \to \infty$, on a

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = f(x) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(x+a_1)\ldots\Gamma(x+a_p)}{\Gamma(x+b_1)\ldots\Gamma(x+b_q)}k,$$

où

$$k = \frac{\Gamma(b_1)\ldots\Gamma(b_q)}{\Gamma(a_1)\ldots\Gamma(a_p)}\,\frac{b_1\ldots b_q}{a_1\ldots a_p}f(1).$$

12.3. On peut démontrer de la même façon la proposition suivante :

Si $f(x)$ est une fonction définie et positive pour $x > 0$ qui :

I. *vérifie l'équation fonctionnelle* (12.1);

II. *est logarithmiquement concave pour $x > \mathfrak{M}$;*

III. $p < q - 1$ *ou* $p = q - 1$ *et* $b_1 + \ldots + b_q < a_1 + \ldots + a_q$; *on a aussi*

$$f(x) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(x+a_1)\ldots\Gamma(x+a_p)}{\Gamma(x+b_1)\ldots\Gamma(x+b_q)}\,k,$$

où

$$k = \frac{\Gamma(b_1)\ldots\Gamma(b_q)}{\Gamma(a_1)\ldots\Gamma(a_p)}\,\frac{b_1\ldots b_q}{a_1\ldots a_p}\,f(1).$$

12.4. Nous avons supposé que $a_i, b_i > 0$; *si* a_i, b_i *sont de signes quelconques*, le domaine de définition de $f(x)$ est

$$x > \mathrm{N},$$

où

$$\mathrm{N} = \max(|a_1|, \ldots, |a_p|, |b_1|, \ldots, |b_q|) + 1,$$

dans lequel $f(x)$ est supposée positive.

Si

$$p > q - 1 \quad \text{ou} \quad p = q - 1 \quad \text{et} \quad b_1 + \ldots + b_q > a_1 + \ldots + a_p,$$

on a

$$\frac{f(\mathrm{N}+n)}{f(\mathrm{N}+n-1)} \leq \frac{f(\mathrm{N}+n+1)}{f(\mathrm{N}+n)}$$

pour n suffisamment grand. En effet, l'équation correspondante à (12.5) se réduit à celle-ci, si l'on remplace n par $n + \mathrm{N}$.

Les formules (12.2) et (12.3) deviennent, *si nous supposons* $x > 0$,

$$(12.9)\quad f(x+\mathrm{N}+n) = \frac{(x+\mathrm{N})_n \prod_{i=1}^{p}(x+\mathrm{N}+a_i)_n}{\prod_{i=1}^{q}(x+\mathrm{N}+b_i)_n}\,f(x+\mathrm{N}) \equiv \sigma_n(x+\mathrm{N})\,f(x+\mathrm{N}),$$

$$(12.10)\quad f(1+\mathrm{N}+n) = \frac{(1+\mathrm{N})_n \prod_{i=1}^{p}(1+\mathrm{N}+a_i)_n}{\prod_{i=1}^{q}(1+\mathrm{N}+b_i)_n}\,f(1+\mathrm{N}) \equiv \sigma_n(1+\mathrm{N})\,f(1+\mathrm{N}).$$

Donc, pour les quatre nombres

$$\mathrm{N}+n-1 < \mathrm{N}+n < \mathrm{N}+n+x \leq \mathrm{N}+n+1$$
$$(\mathrm{N}+n > \mathfrak{M}+1 \quad ([14]),\ x \in (0, 1]),$$

([14]) Nous supposons que $f(x)$ est logarithmiquement convexe dans le domaine $x > \mathfrak{M}$, où $\mathfrak{M} > \mathrm{N}$.

on a

$$\frac{\log f(\mathrm{N}+n-1)-\log f(\mathrm{N}+n)}{-1} \leqq \frac{\log f(\mathrm{N}+n+x)-\log f(\mathrm{N}+n)}{x}$$
$$\leqq \frac{\log f(\mathrm{N}+n+1)-\log f(\mathrm{N}+n)}{1}$$

ou bien

$$\left[\frac{f(\mathrm{N}+n)}{f(\mathrm{N}+n-1)}\right]^x \frac{f(\mathrm{N}+n)}{\sigma_n(\mathrm{N}+x)} \leqq f(\mathrm{N}+x) \leqq \left[\frac{f(\mathrm{N}+n+1)}{f(\mathrm{N}+n)}\right]^x \frac{f(\mathrm{N}+n)}{\sigma_n(\mathrm{N}+x)}.$$

En remplaçant dans le premier membre $n-1$ par n et en posant

$$\psi_n(x) = \left[\frac{f(\mathrm{N}+n+1)}{f(\mathrm{N}+n)}\right]^x \frac{f(\mathrm{N}+n+1)}{\sigma_{n+1}(\mathrm{N}+x)}, \tag{12.11}$$

on trouve, comme précédemment,

$$f(\mathrm{N}+x) = \lim_{n \to \infty} \psi_n(x). \tag{12.12}$$

Mais

$$\psi_n(x) = \left[\frac{(\mathrm{N}+n)\prod_{i=1}^{p}(\mathrm{N}+a_i+n)}{\prod_{i=1}^{q}(\mathrm{N}+b_i+n)}\right]^x \frac{(\mathrm{N}+1)_n}{(x+\mathrm{N})_{n+1}}$$
$$\times \frac{\prod_{i=1}^{p}(\mathrm{N}+a_i+1)_n \prod_{i=1}^{q}(x+\mathrm{N}+b_i)_{n+1}}{\prod_{i=1}^{q}(\mathrm{N}+b_i+1)_n \prod_{i=1}^{p}(x+\mathrm{N}+a_i)_{n+1}} f(1+\mathrm{N})$$
$$= \frac{\dfrac{n!\,n^{x+\mathrm{N}}}{(x+\mathrm{N})_{n+1}} \prod_{i=1}^{p} \dfrac{n!\,n^{x+\mathrm{N}+a_i}}{(x+\mathrm{N}+a_i)_{n+1}} \prod_{i=1}^{q} \dfrac{n!\,n^{\mathrm{N}+b_i}}{(\mathrm{N}+b_i)_{n+1}}}{\dfrac{n!\,n^{\mathrm{N}}}{(\mathrm{N})_{n+1}} \prod_{i=1}^{q} \dfrac{n!\,n^{x+\mathrm{N}+b_i}}{(x+\mathrm{N}+b_i)_{n+1}} \prod_{i=1}^{p} \dfrac{n!\,n^{\mathrm{N}+a_i}}{(\mathrm{N}+a_i)_{n+1}}}$$
$$\times \left[(\mathrm{N}+n)\frac{(\mathrm{N}+a_1+n)\ldots(\mathrm{N}+a_p+n)}{(\mathrm{N}+b_1+n)\ldots(\mathrm{N}+b_q+n)}\,\frac{n^q}{n^{p+1}}\right]^x$$
$$\times \frac{(\mathrm{N}+b_1)\ldots(\mathrm{N}+b_q)}{\mathrm{N}(\mathrm{N}+a_1)\ldots(\mathrm{N}+a_p)} f(1+\mathrm{N}).$$

On a donc

$$f(\mathrm{N}+x) = \frac{\Gamma(\mathrm{N}+x)\,\Gamma(\mathrm{N}+x+a_1)\ldots\Gamma(\mathrm{N}+x+a_p)}{\Gamma(\mathrm{N}+x+b_1)\ldots\Gamma(\mathrm{N}+x+b_q)}\,k',$$

où

$$k' = \frac{\Gamma(N+b_1)\ldots\Gamma(N+b_q)}{\Gamma(N)\,\Gamma(N+a_1)\ldots\Gamma(N+a_p)}\,\frac{(N+b_1)\ldots(N+b_q)}{N(N+a_1)\ldots(N+a_p)}\,f(1+N)$$

Nous avons supposé $x > 0$; en posant à (12.13)

$$x + N = x', \qquad \text{donc} \quad x' > N,$$

on a finalement

$$f(x') = \frac{\Gamma(x')\,\Gamma(x'+a_1)\ldots\Gamma(x'+a_p)}{\Gamma(x'+b_1)\ldots\Gamma(x'+b_q)}\,k'.$$

12.5. Nous allons examiner maintenant un cas particulier.

Soit $f(x)$ une fonction définie et positive pour $x > 0$, qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$(12.13) \qquad f(x+1) = \frac{x}{x+y}\,f(x) \qquad (y > 0).$$

On a $q = 1$; puisque $b_1 = y > 0$, la solution logarithmiquement convexe de (12.13) est la fonction

$$(12.14) \qquad f(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+y)}\,\Gamma(y)\,y\,f(1);$$

Si l'on prend

$$f(1) = \frac{1}{y},$$

on a

$$(12.15) \qquad f(x) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad (x > 0,\ y > 0).$$

12.6. Un autre cas particulier est le suivant :

Soit $f(x)$ une fonction qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$(12.16) \qquad f(x) = \frac{x(x-a-b)}{(x-a)\,(x-b)}\,f(x);$$

on a $p = 1$, $q = 2$, donc $p = q - 1$; d'autre part, $a_1 = -a - b$, $b_1 + b_2 = -a - b$, donc $a_1 = b_1 + b_2$. Le polynome (12.5) devient alors

$$2nab - ab(1+a+b).$$

Si $ab > 0$ (resp. $ab < 0$), il faut que $f(x)$ soit logarithmiquement convexe (resp. concave). On a, donc, plusieurs cas à distinguer :

1° $a < 0$, $b < 0$; la solution logarithmiquement convexe de (12.16) est

$$f(x) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(x-a-b)}{\Gamma(x-a)\,\Gamma(x-b)}\,k \qquad (x > 0),$$

où

$$k = \frac{\Gamma(-a)\,\Gamma(-b)}{\Gamma(-a-b)}\;\frac{ab}{-a-b}f(1).$$

2° $a > 0$, $b > 0$; on a alors $N = a + b + 1$ et la solution logarithmiquement convexe de (12.16) est

$$f(x') = \frac{\Gamma(x')\,\Gamma(x'-a-b)}{\Gamma(x'-a)\,\Gamma(x'-b)}k' \qquad (x' > a+b+1),$$

où

$$k' = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\;\frac{a(a+1)\,b(b+1)}{(a+b)\,(a+b+1)}f(a+b+2).$$

3° a, b de signes contraires; on a, en supposant, par exemple, $a > 0$, $a \geqq |b|$, $N = a + 1$ et la solution logarithmiquement *concave* de (12.16) est la fonction

$$f(x') = \frac{\Gamma(x')\,\Gamma(x'-a-b)}{\Gamma(x'-a)\,\Gamma(x'-b)}k'' \qquad (x' > a+1),$$

où

$$k'' = \frac{\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(1-b)}\;\frac{(a-b)\,(a-b+1)}{a(a+1)(1-b)}f(a+2).$$

$f(x)$ est, à un facteur constant près, la fonction de Gauss [19]

$$f(x) = 1 + \frac{ab}{1.x} + \frac{a(a+1)\,b(b+1)}{1.2.x(x+1)} + \ldots.$$

12.7. Nous allons chercher maintenant la solution logarithmiquement convexe de l'équation fonctionnelle

$$(12.17)\quad f(x+\omega) = x^k f(x) \qquad [f(\omega) = 1,\ f(x) > 0 \text{ pour } x > 0,\ \omega > 0,\ k > 0].$$

On en tire, en prenant $0 < x \leqq \omega$:

$$(12.18)\qquad f(x+n\omega) = \left[\omega^n \left(\frac{x}{\omega}\right)_n\right]^k f(x)$$

et pour $x = \omega$:

$$(12.19)\qquad f((n+1)\omega) = \omega^{nk}(n!)^k.$$

Pour les quatre nombres

$$(n-1)\omega < n\omega < n\omega + x \leqq (n+1)\omega \qquad (n \text{ naturel}, x \in (0, \omega]),$$

on a, puisque $f(x)$ est supposée logarithmiquement convexe,

$$\frac{\log f((n-1)\omega) - \log f(n\omega)}{-\omega} \leqq \frac{\log f(n\omega + x) - \log f(n\omega)}{x}$$
$$\leqq \frac{\log f((n+1)\omega) - \log f(n\omega)}{\omega}$$

ou, compte tenu de (12.18) et (12.19)

$$\frac{\log[\omega(n-1)]^k}{\omega} \leqq \frac{\log\left\{\left[\frac{\omega}{(n-1)!}\left(\frac{x}{\omega}\right)_n\right]^k f(x)\right\}}{x} \leqq \frac{\log(\omega n)^p}{\omega}$$

ou bien

$$\left\{\frac{[\omega(n-1)]^{\frac{x}{\omega}}(n-1)!}{\omega\left(\frac{x}{\omega}\right)_n}\right\}^k \leqq f(x) \leqq \left\{\frac{(\omega n)^{\frac{x}{\omega}}(n-1)!}{\omega\left(\frac{x}{\omega}\right)_n}\right\}^k.$$

Cette inégalité étant valable quel que soit le nombre naturel n, reste valable si au premier membre on remplace $n-1$ par n; on trouve alors

$$f_n(x) \leqq f(x) \leqq f_n(x)\left(\frac{x+n\omega}{n\omega}\right)^k,$$

où nous avons posé

$$f_n(x) = \left[\frac{n^{\frac{x}{\omega}}\, n!}{\left(\frac{x}{\omega}\right)_{n+1}}\right]^k \omega^{k\left(\frac{x}{\omega}-1\right)}$$

Donc,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \left[\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)\right]^k \omega^{k\left(\frac{x}{\omega}-1\right)} \tag{12.20}$$

12.8. On peut généraliser ce résultat en demandant la solution logarithmiquement convexe ou concave de l'équation fonctionnelle

$$f(x+\omega) = \left\{\frac{x(x+a_1)\dots(x+a_p)}{(x+b_1)\dots(x+b_q)}\right\}^k f(x), \tag{12.21}$$

où

$f(x) > 0$, pour $x > 0$, $\omega > 0$, $f(\omega) = 1$, $k > 0$, a_i, $b_i > 0$.

On tire de (12.21)

$$f(x+n\omega) = \left[\frac{\omega^{n(p+1-q)}\left(\frac{x}{\omega}\right)_n \prod_{i=1}^{p}\left(\frac{x+a_i}{\omega}\right)_n}{\prod_{i=1}^{q}\left(\frac{x+b_i}{\omega}\right)_n}\right]^k f(x) \tag{12.22}$$

et, pour $x = \omega$,

$$(12.23) \qquad f((n+1)\omega) = \left[\frac{\omega^{n(p+1-q)}\, n! \prod_{i=1}^{p} \left(\frac{\omega + a_i}{\omega}\right)_n}{\prod_{i=1}^{q} \left(\frac{\omega + b_i}{\omega}\right)_n} \right]^k$$

On remarque aussitôt que, si

$$p > q - 1 \qquad \text{ou} \qquad p = q - 1 \qquad \text{et} \qquad b_1 + \ldots + b_q > a_1 + \ldots + a_p,$$

on a

$$\frac{f(n\omega)}{f((n-1)\omega)} \leqq \frac{f((n+1)\omega)}{f(n\omega)}$$

pour n *suffisamment* grand. Au contraire, si

$$p < q - 1 \qquad \text{ou} \qquad p = q - 1 \qquad \text{et} \qquad b_1 + \ldots + b_q < a_1 + \ldots + a_p,$$

on a

$$\frac{f(n\omega)}{f((n-1)\omega)} \geqq \frac{f((n+1)\omega)}{f(n\omega)}$$

pour n suffisamment grand.

Nous pouvons maintenant démontrer, de la même façon comme le théorème 12.2, la proposition suivante :

Si $f(x)$ est une fonction définie et positive pour $x > 0$ qui :

I. *vérifie l'équation fonctionnelle* (12.21);

II. *est logarithmiquement convexe (resp. concave) pour $n > \mathfrak{M}$;*

III. *$p > q - 1$ (resp. $p < q - 1$) ou $p = q - 1$ et $b_1 + \ldots + b_q > a_1 + \ldots + a_p$ (resp. $b_1 + \ldots + b_q < a_1 + \ldots + a_p$);*

on a

$$f(x) = \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right) \Gamma\left(\frac{x + a_1}{\omega}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{x + a_p}{\omega}\right)}{\Gamma\left(\frac{x + b_1}{\omega}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{x + b_q}{\omega}\right)} \right\}^k \omega^{k(p-q+1)\left(\frac{x}{\omega} - 1\right)} C,$$

où

$$C = \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{b_1}{\omega}\right) \Gamma\left(\frac{b_q}{\omega}\right) \frac{b_1}{\omega} \cdots \frac{b_q}{\omega}}{\Gamma\left(\frac{a_1}{\omega}\right) \Gamma\left(\frac{a_p}{\omega}\right) \frac{a_1}{\omega} \cdots \frac{a_p}{\omega}} \right\}^k.$$

CHAPITRE III

LA FONCTION B (x, y).

13. Définition fonctionnelle de la fonction B (x, y).

13.1. Nous avons démontré au paragraphe 12.5 que, *si $f(x)$ est une fonction définie et positive pour $x > 0$ qui vérifie les conditions suivantes :*

I. $f(x+1) = \dfrac{x}{x+y} f(x) \qquad (y > 0);$

II. *elle est logarithmiquement convexe pour $x > \mathfrak{M}$;*

III. $f(1) = \dfrac{1}{y};$

alors

$$f(x) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Cette fonction est étudiée d'abord par Euler et est désignée par Binet [11] par B (x, y); on a alors

$$\text{(13.1)} \qquad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad (x > 0, y > 0).$$

Si l'on remplace x par y et y par x, on a

$$\text{(13.2)} \qquad B(x, y) = B(y, x).$$

13.2. Nous allons démontrer que B (x, y), considérée comme fonction de x par exemple, est *une fonction décroissante pour $x > 0$*. On a, en effet,

$$B'_x(x, y) = \frac{\Gamma(x+y)\,\Gamma'(x) - \Gamma(x)\,\Gamma'(x+y)}{\Gamma^2(x+y)}\,\Gamma(y).$$

Mais, comme nous avons remarqué à la fin du paragraphe 5.6, $\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ est une fonction croissante pour $x > 0$.

Donc

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)} < 0 \qquad (y > 0),$$

ce qui démontre, puisque $\Gamma(t) > 0$ pour $t > 0$,

$$B'_x(x, y) < 0.$$

De même, B (x, y), considérée comme fonction de y, est décroissante pour $y > 0$.

13.3. On voit aussitôt, grâce à l'équation fondamentale (5.15) de $\Gamma(x)$, que $B(x, y)$ vérifie les équations fonctionnelles suivantes :

$$B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y) \qquad (x > 0,\ y > 0), \tag{13.3}$$

$$B(x+1, y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)} B(x, y) \qquad (x > 0, y > 0). \tag{13.4}$$

13.4. Nous allons démontrer maintenant que nous pouvons remplacer dans l'énoncé du théorème 13.1 la propriété de *convexité logarithmique* par la propriété de *décroissance*, c'est-à-dire nous allons prouver le théorème suivant [5] :

Une fonction $f(x)$ définie et positive pour $x > 0$ est identique à $B(x, y)$ si :

I. $f(x+1) = \frac{x}{x+y} f(x) \qquad (y > 0)$;

II. $f(x)$ *est décroissante pour* $x > \mathfrak{M}$;

III. $f(1) = \frac{1}{y}$.

On tire, en effet, de la condition I,

$$f(x+n) = \frac{(x)_n}{(x+y)_n} f(x) \qquad (n \text{ naturel}, x \in (0, 1]) \tag{13.5}$$

et, pour $x = 1$, compte tenu de III,

$$f(n+1) = \frac{n!}{(y)_{n+1}} \qquad (n \text{ naturel}). \tag{13.6}$$

Mais, $f(x)$ étant supposée décroissante pour $x > \mathfrak{M}$, on a

$$f(n) \geqq f(n+x) \geqq f(n+1) \qquad (n > \mathfrak{M},\ x \in (0, 1]),$$

ou bien, compte tenu de (13.5) et (13.6),

$$\frac{(n-1)!}{(y)_n} \geqq \frac{(x)_n}{(x+y)_n} f(x) \geqq \frac{n!}{(y)_{n+1}},$$

d'où l'on a

$$\frac{(n-1)!\,(x+y)_n}{(y)_n\,(x)_n} \geqq f(x) \geqq \frac{n!\,(x+y)_n}{(x)_n\,(y)_{n+1}}.$$

Cette inégalité étant valable quel que soit n, reste valable si l'on remplace au premier membre n par $n+1$; on trouve alors

$$\frac{n!\,(x+y)_{n+1}}{(y)_{n+1}\,(x)_{n+1}} \geqq f(x) \geqq \frac{n!\,(x+y)_{n+1}}{(y)_{n+1}\,(x)_{n+1}} \frac{x+n}{x+y+n}.$$

Quand $n \to \infty$,

$$\frac{x+n}{x+y+n} \to 1,$$

et l'on a

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,(x+y)_{n+1}}{(y)_{n+1}\,(x)_{n+1}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!\,n^x}{(x)_{n+1}} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!\,n^y}{(y)_{n+1}}}{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!\,n^{x+y}}{(x+y)_{n+1}}} = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \mathrm{B}(x, y).$$

13.5. On peut représenter B (x, y) par une intégrale. Considérons, en effet, l'intégrale

$$f(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \tag{13.7}$$

à qui Legendre [28] a donné le nom de l'intégrale eulérienne de première espèce.

Nous allons démontrer d'abord que cette intégrale existe pour $x > 0$, $y > 0$. Il suffit pour le vérifier de démontrer l'existence des deux intégrales

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt, \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt. \tag{13.8}$$

Mais, quand $0 < t \leqq \frac{1}{2}$,

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} < t^{x-1}(1-t)^{-1} < 2t^{x-1}$$

et, quand $\frac{1}{2} \leqq t < 1$,

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} < t^{-1}(1-t)^{y-1} < 2(1-t)^{y-1}.$$

Donc les intégrales (13.8), qui sont positives, existent, s'ils existent les intégrales

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}\,dt, \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{y-1}\,dt;$$

mais, on sait (§ 10.1) que ces intégrales existent.

Remplaçons maintenant à (13.7) x par $x+1$; on a

$$f(x+1, y) = \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\,dt = \int_0^1 (1-t)^{x+y-1}\left(\frac{t}{1-t}\right)^x dt:$$

considérons l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_{\varepsilon}^{1-\eta} (1-t)^{x+y-1} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{x} dt$$

et intégrons par parties; on a

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \frac{(1-\varepsilon)^{y}\, \varepsilon^{x} - \eta^{y}(1-\eta)^{x}}{x+y} + \int_{\varepsilon}^{1-\eta} \frac{x}{x+y}(1-t)^{x+y} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1} \frac{dt}{(1-t)^{2}} \\ &= \frac{(1-\varepsilon)^{y}\, \varepsilon^{x} - \eta^{y}(1-\eta)^{x}}{x+y} + \frac{x}{x+y} \int_{\varepsilon}^{1-\eta} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt. \end{aligned}$$

En faisant maintenant tendre ε et η vers zéro, on a

$$f(x+1, y) = \frac{x}{x+y} f(x, y);$$

$f(x, y)$ vérifie donc la condition I du théorème 13.4. D'autre part l'intégrale (13.7) est évidemment une fonction décroissante de x, pour $x > 0$, puisque $0 < t < 1$; la condition II du théorème est donc vérifiée. Enfin, en remplaçant dans (13.7) x par 1, on a

$$f(1, y) = \int_{0}^{1} (1-t)^{y-1}\, dt = \frac{1}{y},$$

c'est-à-dire la condition III est aussi vraie. D'après le théorème 13.4, on a

$$f(x, y) = \mathrm{B}(x, y);$$

on parvient, donc, à la formule

$$\mathrm{B}(x, y) = \int_{0}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt. \tag{13.9}$$

13.6. On peut généraliser les résultats du paragraphe 13.4, en considérant l'équation fonctionnelle

$$f(x+1) = \frac{x(x+a_1)\ldots(x+a_{p-1})}{(x+b_1)\ldots(x+b_p)} f(x), \tag{13.10}$$

où

$$f(x) > 0 \quad \text{pour} \quad x > 0, \qquad a_i,\, b_i > 0, \qquad 0 < x \leqq 1.$$

On tire de cette relation, n désignant un nombre naturel,

$$f(x+n) = \frac{(x)_n\,(x+a_1)_n\ldots(x+a_{p-1})_n}{(x+b_1)_n\ldots(x+b_p)_n} f(x); \tag{13.11}$$

or, en tenant compte de

$$(a+1)_n = \frac{1}{a}(a)_{n+1}, \tag{13.12}$$

on trouve, pour $x = 1$,

$$f(n+1) = \frac{n!\,(a_1)_{n+1}\ldots(a_{p-1})_{n+1}}{(b_1)_{n+1}\ldots(b_p)_{n+1}}\,\frac{b_1\ldots b_p}{a_1\ldots a_{p-1}}\,f(1). \tag{13.13}$$

On vérifie sans peine que, si

$$a_1+\ldots+a_{p-1} < b_1+\ldots+b_p,$$

on a

$$\frac{(x+n)\,(x+a_1+n)\ldots(x+a_{p-1}+n)}{(x+b_1+n)\ldots(x+b_p+n)} < 1, \tag{13.14}$$

pour n suffisamment grand, tandis que, si

$$a_1+\ldots+a_{p-1} > b_1+\ldots+b_p,$$

on a

$$\frac{(x+n)\,(x+a_1+n)\ldots(x+a_{p-1}+n)}{(x+b_1+n)\ldots(x+b_p+n)} > 1, \tag{13.15}$$

pour n suffisamment grand.

13.7. Nous allons démontrer maintenant le théorème suivant : *Si $f(x)$ est une fonction définie et positive pour $x > 0$ qui :*

I. *vérifie l'équation fonctionnelle* (13.10);

II. *est décroissante* (*resp. croissante*) *pour* $x > \mathfrak{M}$;

III. *et* $a_1+\ldots+a_{p-1} < b_1+\ldots+b_p$ (*resp.* $a_1+\ldots+a_{p-1} > b_1+\ldots+b_p$);

alors

$$f(x) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(x+a_1)\ldots\Gamma(x+a_{p-1})}{\Gamma(x+b_1)\ldots\Gamma(x+b_p)}\,k,$$

où

$$k = \frac{\Gamma(b_1)\ldots\Gamma(b_p)}{\Gamma(a_1)\ldots\Gamma(a_{p-1})}\,\frac{b_1\ldots b_p}{a_1\ldots a_{p-1}}\,f(1).$$

En supposant $f(x)$ décroissante et en prenant, $n > \mathfrak{M}$ et assez grand — tel que (13.14) soit vérifiée — on tire de

$$f(n) \geqq f(n+x) \geqq f(n+1) \qquad (0 < x \leqq 1),$$

grâce aux (13.11) et (13.13), la relation

$$\frac{(n-1)!\prod_{i=1}^{p-1}\frac{1}{a_i}(a_i)_n}{\prod_{i=1}^{p}\frac{1}{b_i}(b_i)_n}\,f(1) \geqq \frac{(x)_n\prod_{i=1}^{p-1}(x+a_i)_n}{\prod_{i=1}^{p}(x+b_i)_n}\,f(x) \geqq \frac{n!\prod_{i=1}^{p-1}\frac{1}{a_i}(a_i)_{n+1}}{\prod_{i=1}^{p}\frac{1}{b_i}(b_i)_{n+1}}\,f(1)$$

ou

$$\frac{(n-1)!}{(x)_n}\prod_{i=1}^{p-1}\frac{(a_i)_n}{a_i(x+a_i)_n}\prod_{i=1}^{p}\frac{b_i(x+b_i)_n}{(b_i)_n}f(1)$$

$$\geqq f(x)\geqq\frac{n!}{(x)_n}\prod_{i=1}^{p-1}\frac{(a_i)_{n+1}}{a_i(x+a_i)_n}\prod_{i=1}^{p}\frac{b_i(x+b_i)_n}{(b_i)_{n+1}}f(1).$$

Cette relation étant valable quel que soit n, reste valable si l'on remplace au premier membre n par $n+1$; on trouve ainsi

$$(13.16)\qquad f_n(x)\geqq f(x)\geqq f_n(x)\,\frac{(x+n)(x+a_1+n)\dots(x+a_{p-1}+n)}{(x+b_1+n)\dots(x+b_p+n)},$$

où

$$f_n(x)=\frac{n!}{(x)_{n+1}}\prod_{i=1}^{p-1}\frac{(a_i)_{n+1}}{a_i(x+a_i)_{n+1}}\prod_{i=1}^{p}\frac{b_i(x+b_i)_{n+1}}{(b_i)_{n+1}}f(1).$$

Mais, lorsque $n\to\infty$, on a

$$\frac{(x+n)(x+a_1+n)\dots(x+a_{p-1}+n)}{(x+b_1+n)\dots(x+b_p+n)}\to 1$$

et l'on a, comme on le vérifie aisément,

$$(13.17)\qquad f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(x+a_1)\dots\Gamma(x+a_{p-1})}{\Gamma(x+b_1)\dots\Gamma(x+b_p)}\,k,$$

où

$$k=\frac{\Gamma(b_1)\dots\Gamma(b_p)}{\Gamma(a_1)\dots\Gamma(a_{p-1})}\,\frac{b_1\dots b_p}{a_1\dots a_{p-1}}f(1).$$

13.8. Comme nous avons vu au paragraphe 13.6, la solution cherchée de l'équation fonctionnelle (13.10) est croissante ou décroissante suivant que le polynome

$$(x+n)(x+a_1+n)\dots(x+a_{p-1}+n)-(x+b_1+n)\dots(x+b_p+n)$$

est positif ou négatif pour n suffisamment grand; mais en posant

$$x+n=x'$$

cela revient à dire que le polynome

$$(13.18)\qquad x'(x'+a_1)\dots(x'+a_{p-1})-(x'+b_1)\dots(x'+b_p)$$

est positif ou négatif pour x' suffisamment grand. Or, ce polynome peut s'écrire

$$(c_1-\gamma_1)x'^{p-1}+(c_2-\gamma_2)x'^{p-2}+\dots+(c_{p-1}-\gamma_{p-1})x'-\gamma_p,$$

où c_i, γ_i sont les fonctions symétriques fondamentales des polynomes

$$x'(x'+a_1)\ldots(x'+a_{p-1}) \quad \text{et} \quad (x'+b_1)\ldots(x'+b_p).$$

13.9. On peut examiner le cas où a_i, b_i sont des signes quelconques; le domaine de définition de $f(x)$ est $x > \mathrm{N}$, où

$$\mathrm{N} = \max(|a_1|, \ldots, |a_{p-1}|, |b_1|, \ldots, |b_p|) + 1;$$

on peut répéter ici ce que nous avons dit au paragraphe 12.4.

13.10. Nous pouvons appliquer ces résultats à l'équation fonctionnelle

$$f(x+1) = \frac{x(x-a-b)}{(x-a)(x-b)} f(x), \tag{13.19}$$

qui a été examiné au paragraphe 12.6. Le polynome (13.18) se réduit à $-ab$. Si a, b sont de même signe, ce polynome est négatif; donc la solution *décroissante* de l'équation (13.19) est la fonction hypergéométrique

$$\left\{\begin{array}{c} f(x) = \dfrac{\Gamma(x)\,\Gamma(x-a-b)}{\Gamma(x-a)\,\Gamma(a-b)}\,k \\ (x > 0 \text{ si } a < 0,\ b < 0;\ x > a+b+1 \text{ si } a > 0,\ b > 0) \end{array}\right. \tag{13.20}$$

ou

$$k = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\Gamma(-a)\,\Gamma(-b)}{\Gamma(-a-b)}\,\dfrac{ab}{-a-b} f(1) & \text{quand } a < 0, \quad b < 0; \\ \dfrac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\,\dfrac{a(a+1)\,b(b+1)}{(a+b)(a+b+1)} f(a+b+2) & \text{quand } a > 0 \quad b > 0. \end{array}\right.$$

Si $ab < 0$ (par exemple $a > 0$, $a \geqq |b|$), on voit que la solution *croissante* de l'équation (13.19) est la même fonction (13.20) $(x > a+1)$, où

$$k = \frac{\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(1-b)}\,\frac{(a-b)(a-b+1)}{a(a+1)(1-b)} f(a+2) \quad [15].$$

13.11. Nous dirons qu'une fonction de deux variables $\varphi(x, y)$, définie dans le domaine C, est *croissante* (resp. *décroissante*) dans C, si, (x_1, y_1), (x_2, y_2) étant deux points de C, il résulte de $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$, la relation

$$\varphi(x_1, y_1) \leqq \varphi(x_2, y_2) \qquad [\text{resp. } \varphi(x_1, x_1) \geqq \varphi(x_2, y_2)]. \tag{13.21}$$

---

[15] *Voir*, paragraphe 12.6.

13.12. Nous allons démontrer le théorème suivant [5] :

Une fonction de deux variables $f(x, y)$ définie et positive pour $x > 0$, $y > 0$ est identique à $B(x, y)$ si :

I. $f(x+1, y+1) = \dfrac{xy}{(x+y)(x+y+1)} f(x, y)$;

II. *la fonction* $\dfrac{(x+y)^{x+y}}{x^x y^y} f(x, y)$ *est décroissante pour* $x > \mathfrak{M}$, $y > \mathfrak{M}$ (16);

III. $f(1, 1) = 1$.

Vérifions d'abord que, si $0 < x \leqq 1$, $0 < y \leqq 1$,

$$(13.22)\quad \sigma_n(x, y) \equiv \frac{(x+n)^{x+n+1}(y+n)^{y+n+1}(x+y+2n+2)^{x+y+2n+2}}{\left\{\begin{array}{l}(x+n+1)^{x+n+1}(y+n+1)^{y+n+1}\\ \quad\times(x+y+2n)^{x+y+2n+1}(x+y+2n+1)\end{array}\right\}} < 1;$$

on a, en effet, en posant

$$x+n=\omega, \qquad y+n=\varphi,$$

$$\sigma_n = \frac{\omega+\varphi}{\omega+\varphi+1}\left[\frac{\omega(\omega+\varphi+2)}{(\omega+1)(\omega+\varphi)}\right]^{\omega+1}\left[\frac{\varphi(\omega+\varphi+2)}{(\varphi+1)(\omega+\varphi)}\right]^{\varphi+1}$$

Si $x = y$, on a évidemment $\sigma_n < 1$; si $x < y$, par exemple, puisque $0 < x \leqq 1$, $0 < y \leqq 1$, on a

$$\frac{\omega(\omega+\varphi+2)}{(\omega+1)(\omega+\varphi)} < 1, \qquad \frac{\varphi(\omega+\varphi+2)}{(\varphi+1)(\omega+\varphi)} > 1,$$

donc

$$\begin{aligned}\sigma_n &< \frac{\omega+\varphi}{\omega+\varphi+1}\left[\frac{\omega(\omega+\varphi+2)}{(\omega+1)(\omega+\varphi)}\right]^{n+1}\left[\frac{\varphi(\omega+\varphi+2)}{(\varphi+1)(\omega+\varphi)}\right]^{n+2}\\ &= \frac{\varphi(\omega+\varphi+2)}{(\varphi+1)(\omega+\varphi+1)}\left[\frac{\omega\varphi(\omega+\varphi+2)^2}{(\omega+\varphi)^2(\omega+1)(\varphi+1)}\right]^{n+1};\end{aligned}$$

on a toujours

$$\varphi(\omega+\varphi+2) < (\varphi+1)(\omega+\varphi+1),$$
$$\omega\varphi(\omega+\varphi+2)^2 < (\omega+\varphi)^2(\omega+1)(\varphi+1),$$

parce qu'on a respectivement

$$\omega+1>0, \qquad (\omega-\varphi)^2(1+\varphi+\omega) > 0.$$

Venons maintenant à la démonstration du théorème. On tire de la condition I,

$$(13.23)\quad f(x+n, y+n) = \frac{(x)_n(y)_n}{(x+y)_{2n}} f(x, y) \qquad (n > \mathfrak{M};\ x, y \in (0, 1])$$

(16) On ne suppose rien sur la nature de la fonction $f(x, y)$.

et, pour $x = y = 1$, grâce à la condition III,

$$f(n+1, n+1) = \frac{n!\,n!}{(2n+1)!} \qquad (n > \mathfrak{M}). \tag{13.24}$$

Mais, la fonction

$$\frac{(x+y)^{x+y}}{x^x y^y} f(x, y)$$

étant supposée décroissante pour $x > \mathfrak{M}$, $y > \mathfrak{M}$ on tire de

$$n < n+x \leqq n+1, \qquad n < n+y \leqq n+1 \qquad (n > \mathfrak{M}),$$

grâce aux (13.23) et (13.24), la relation

$$\begin{aligned} 2^{2n} \frac{(n-1)!\,(n-1)!}{(2n-1)!} &\geqq \frac{(x+y+2n)^{x+y+2n}}{(x+n)^{x+n}(y+n)^{y+n}} \frac{(x)_n (y)_n}{(x+y)_{2n}} f(x, y) \\ &\geqq 2^{n+2} \frac{n!\,n!}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} &2^{2n} \frac{(n-1)!\,(n-1)!\,(x+y)_{2n}\,(x+n)^{x+n}(y+n)^{y+n}}{(2n-1)!\,(x)_n (y)_n\,(x+y+2n)^{x+y+2n}} \\ &\quad\geqq f(x, y) \geqq 2^{2n+2} \frac{n!\,n!\,(x+y)_{2n}\,(x+n)^{x+n}(y+n)^{y+n}}{(2n+1)!\,(x)_n (y)_n\,(x+y+2n)^{x+y+2n}}. \end{aligned}$$

Cette inégalité étant valable quel que soit $n > \mathfrak{M}$, reste valable si l'on remplace au premier membre n par $n+1$; on trouve alors

$$f_n(x, y) \geqq f(x, y) \geqq f_n(x, y)\,\sigma_n(x, y), \tag{13.25}$$

où nous avons posé

$$f_n(x, y) = 2^{2n+2} \frac{n!\,n!}{(2n+1)!} \frac{(x+y)_{2n+2}\,(x+n+1)^{x+n+1}(y+n+1)^{y+n+1}}{(x)_{n+1}(y)_{n+1}\,(x+y+2n+2)^{x+y+2n+2}}$$

et où $\sigma_n(x, y)$ est la fonction définie par (13.22) qui, comme nous venons de le voir, est < 1.

Mais, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sigma_n(x, y) = {} & \lim \frac{x+n}{x+n+1} \lim \frac{y+n}{y+n+1} \lim \frac{(x+y+2n+2)^2}{(x+y+2n)(x+y+2n+1)} \\ & \times \lim \left(\frac{x+n}{x+n+1}\right)^{x+n} \lim \left(\frac{y+n}{y+n+1}\right)^{y+n} \\ & \times \lim \left(\frac{x+y+2n+2}{x+y+2n}\right)^{x+y+2n} = 1.1.1.\frac{1}{e}\frac{1}{e}e^2 = 1. \end{aligned}$$

On tire, donc, de (13.25)

$$f(x, y) = \lim_{n \to \infty} f_n(x, y).$$

Mais,

$$f_n(x, y) = \frac{\dfrac{n!\, n^x}{(x)_{n+1}} \dfrac{n!\, n^y}{(y)_{n+1}}}{\dfrac{(2n+1)!\,(2n+1)^{x+y}}{(x+y)_{2n+2}}}\, t_n(x, y)$$

où

$$t_n(x, y) = \frac{(2n+1)^{x+y}}{n^x n^y}\, 2^{2n+2}\, \frac{(x+n+1)^{x+n+1}(y+n+1)^{y+n+1}}{(x+y+2n+2)^{x+y+2n+2}}.$$

Or,

$$\begin{aligned}\lim_{n \to \infty} t_n(x, y) = {} & \lim \left(\frac{2n+1}{n}\right)^{x+y} \lim \left(\frac{x+n+1}{x+y+2n+2}\right)^x \\ & \times \lim \left(\frac{y+n+1}{x+y+2n+2}\right)^y \lim \left(\frac{2x+2n+2}{x+y+2n+2}\right)^{n+1} \\ & \times \lim \left(\frac{2y+2n+2}{x+y+2n+2}\right)^{n+1} = 2^{x+y} \frac{1}{2^x} \frac{1}{2^y} e^{\frac{x-y}{2}} e^{\frac{y-x}{2}} = 1.\end{aligned}$$

On a, donc, finalement

$$f(x, y) = \lim_{n \to \infty} \frac{\dfrac{n!\, n^x}{(x)_{n+1}} \dfrac{n!\, n^y}{(y)_{n+1}}}{\dfrac{(2n+1)!\,(2n+1)^{x+y}}{(x+y)_{2n+2}}} = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \mathrm{B}(x, y).$$

14. La fonction G(*x*).

14.1. Considérons la fonction

$$(14.1) \quad \mathrm{G}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{B}\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)};$$

cette fonction est un cas particulier de la fonction B (*x*, *y*), mais, puisqu'elle présente un intérêt particulier ([17]) nous l'examinerons séparément.

On voit aussitôt que G (*x*) vérifie l'équation fonctionnelle

$$(14.2) \qquad \mathrm{G}(x+1) = \frac{1}{x\,\mathrm{G}(x)}.$$

([17]) *Voir* par exemple : N. Nörlund [32], p. 115-118.

Nous pouvons donner une autre forme à $G(x)$; on a

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n!\,n^{\frac{x}{2}}}{\left(\frac{x}{2}\right)_{n+1}}}{\sqrt{2}\,\dfrac{n!\,n^{\frac{x+1}{2}}}{\left(\frac{x+1}{2}\right)_{n+1}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2^{n+1}}{x(x+2)\dots(x+2n)}}{\dfrac{\sqrt{2n}.2^{n+1}}{(x+1)(x+3)\dots(x+2n+1)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(x+1)(x+3)\dots(x+2n+1)}{x(x+2)\dots(x+2n)\sqrt{2n}};$$

on a, donc,

$$G(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(x+1)(x+3)\dots(x+2n+1)}{x(x+2)\dots(x+2n)\sqrt{2n}}; \tag{14.3}$$

mais, puisque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x+2n}{2n} = 1,$$

nous pouvons écrire

$$G(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(x+1)(x+3)\dots(x+2n-1)}{x(x+2)\dots(x+2n-2)\sqrt{x+2n}}. \tag{14.4}$$

D'autre part, comme nous avons vu au paragraphe 13.2, $G(x)$ est *décroissante pour* $x > 0$; elle est aussi *convexe pour* $x > 0$. En effet, on vérifie aussitôt que

$$\frac{x+1}{x}$$

est positive, décroissante et convexe pour $x > 0$; donc, en remplaçant x par $x + 2\nu$, on voit que

$$\frac{x+2\nu+1}{x+2\nu}$$

a les mêmes propriétés. D'après le théorème *c* du paragraphe 1.12, la fonction

$$\frac{x+1}{x}\,\frac{x+3}{x+2}\cdots\frac{x+2n-1}{x+2n-2}\,\frac{1}{\sqrt{2n}}$$

est convexe (et décroissante) pour $x > 0$; donc, d'après le théorème du paragraphe 1.13,

$$G(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{(x+1)(x+3)\dots(x+2n-1)}{x(x+2)\dots(x+2n-2)} \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

est convexe (et décroissante) pour $x > 0$.

14.2. On voit aussitôt que $G(x)$ *est semi-décroissante et semi-convexe* ([18]) *pour* $x > 0$ car, comme nous avons vu aux paragraphe 3.2 et 4.1, une fonction décroissante (resp. convexe) pour $x > 0$ est aussi semi-décroissante (resp. semi-convexe) pour $x > 0$.

14.3. A. Mayer [29] *a démontré* qu'*une fonction convexe et positive pour* $x > 0$, *qui vérifie l'équation fonctionnelle* (14.2) *est identique à* $G(x)$. La démonstration de Mayer suppose connue la fonction $G(x)$.

Nous allons démontrer le théorème suivant [2] :

Une fonction $f(x)$ *définie et positive pour* $x > 0$, *semi-décroissante pour* $x > \mathfrak{M}$, *qui vérifie l'équation fonctionnelle* (14.2), *est identique à* $G(x)$.

On tire, en effet, de (14.2),

$$(14.5) \quad \begin{cases} f(x+2n+1) = \dfrac{(x+1)(x+3)\dots(x+2n-1)}{x(x+2)\dots(x+2n)} \dfrac{1}{f(x)}, \\ f(x+2n) \qquad = \dfrac{x(x+2)\dots(x+2n-2)}{(x+1)(x+3)\dots(x+2n-1)} f(x) \\ \qquad\qquad (n \text{ naturel};\ 0 < x \leqq 1). \end{cases}$$

Or, $f(x)$ étant semi-décroissante pour les valeurs de la variable plus grandes que $\mathfrak{M}$, de trois nombres

$$x+2n-1 < x+2n < x+2n+1 \qquad \left(n > \frac{\mathfrak{M}+1}{2},\ x \in (0, 1]\right),$$

on tire

$$f(x+2n-1) \geqq f(x+2n) \geqq f(x+2n+1)$$

([18]) Dans la suite nous écrirons, pour abréger, semi convexe, semi-décroissante, etc., au lieu de semi-convexe 1, semi décroissante 1, etc.

et compte tenu de (14.5),

$$(14.6)\qquad \frac{\prod_{\nu=1}^{n-1}(x+2\nu-1)}{\prod_{\nu=1}^{n}(x+2\nu-2)}\frac{1}{f(x)} \geqq \frac{\prod_{\nu=1}^{n}(x+2\nu-2)}{\prod_{\nu=1}^{n}(x+2\nu-1)}f(x)$$

$$\geqq \frac{\prod_{\nu=1}^{n}(x+2\nu-1)}{\prod_{\nu=1}^{n+1}(x+2\nu-2)}\frac{1}{f(x)}.$$

Mais, pour $x > 0$, $f(x) > 0$ et l'on déduit de (14.6),

$$(14.7)\qquad f_n(x) \leqq f^2(x) \leqq f_n(x)\frac{x+2n}{x+2n-1},$$

où

$$(14.8)\qquad f_n(x) = \frac{(x+1)^2(x+3)^2\ldots(x+2n-1)^2}{x^2(x+2)^2\ldots(x+2n-2)^2(x+2n)}$$

Il résulte de (14.7),

$$(14.9)\qquad f^2(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

et, $f(x)$ étant positive pour $x > 0$,

$$(14.10)\quad f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{(x+1)(x+3)\ldots(x+2n-1)}{x(x+2)\ldots(x+2n-2)\sqrt{x+2n}} = \mathrm{G}(x).$$

14.4. Nous pouvons encore démontrer le théorème suivant :

Une fonction $f(x)$ *définie et positive pour* $x > 0$, *semi-convexe pour* $x > \mathfrak{M}$, *qui vérifie l'équation fonctionnelle* (14.2), *est identique à* $\mathrm{G}(x)$.

De semi-convexité de $f(x)$, pour les valeurs de la variable plus grandes que $\mathfrak{M}$, on tire

$$f(x+2n) \leqq \frac{1}{2}[f(x+2n-1)+f(x+2n+1)]$$

$$f(x+2n+1) \leqq \frac{1}{2}[f(x+2n)+f(x+2n+2)]$$

$$\left(n > \frac{\mathfrak{M}+1}{2},\ 0 < x \leqq 1\right)$$

ou, compte tenu de (14.5),

$$(14.11)\quad \left\{\begin{aligned} &\prod_{\nu=1}^{n}\frac{x+2\nu-2}{x+2\nu-1}f(x) \\ &\qquad\leq\frac{1}{2}\frac{\displaystyle\prod_{\nu=1}^{n-1}(x+2\nu-1)}{\displaystyle\prod_{\nu=1}^{n}(x+2\nu-2)}\left(1+\frac{x+2n-1}{x+2n}\right)\frac{1}{f(x)}, \\ &\frac{\displaystyle\prod_{\nu=1}^{n}(x+2\nu-1)}{\displaystyle\prod_{\nu=1}^{n+1}(x+2\nu-2)}\frac{1}{f(x)} \\ &\qquad\leq\frac{1}{2}\frac{\displaystyle\prod_{\nu=1}^{n}(x+2\nu-2)}{\displaystyle\prod_{\nu=1}^{n}(x+2\nu-1)}\left(1+\frac{x+2n}{x+2n+1}\right)f(x). \end{aligned}\right.$$

Il en résulte, puisque $f(x) > 0$, pour $x > 0$,

$$(14.12)\qquad \varphi_n(x) \leq f^2(x) \leq \varphi_n(x)\frac{(2x+4n)^2-1}{(2x+4n)^2-4},$$

où nous avons posé

$$(14.13)\qquad \varphi_n(x) = f_n(x)\frac{2x+4n+2}{2x+4n+1},$$

$f_n(x)$ étant la fonction définie par (14.8).

De (14.13), (14.12) et (14.9), on a

$$f^2(x) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty}f_n(x) = G^2(x),$$

ou bien, $f(x)$ étant positive pour $x > 0$,

$$f(x) = G(x).$$

14.5. H. P. Thielman [35], généralisant le résultat cité de Mayer, a démontré que *si $f(x)$ est une fonction définie et positive pour $x > 0$*, *convexe ou décroissante pour $x > 0$, qui vérifie l'équation fonctionnelle*

$$f(x+\omega) = \frac{1}{x^k f(x)} \qquad (x > 0,\ \omega > 0,\ k > 0), \tag{14.14}$$

alors $f(x)$ est identique à la fonction

$$F(x) = \left[\frac{1}{\sqrt{2\omega}} \frac{\Gamma\left(\dfrac{x}{2\omega}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{x+\omega}{2\omega}\right)} \right]^k. \tag{14.15}$$

Cette fonction peut s'exprimer, par la fonction $B(x, y)$, comme il suit :

$$F(x) = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\omega}} B\left(\frac{x}{2\omega}, \frac{1}{2}\right) \right]^k. \tag{14.16}$$

14.6. Nous pouvons démontrer le théorème suivant [6] :

La fonction $F(x)$, *définie par* (14.15), *est la seule fonction définie et positive pour $x > 0$, semi-décroissante ω ou semi-convexe ω dans le domaine $x > \mathfrak{M}$, qui vérifie l'équation fonctionnelle* (14.14).

Soit $f(x)$ une fonction semi-décroissante ω, qui remplit les suppositions du théorème; nous allons démontrer que $f(x) = F(x)$; si $f(x)$ est semi-convexe ω, la démonstration résulte d'une façon pareille.

On tire de (14.14),

$$\left\{\begin{aligned} f(x+(2n-1)\omega) &= \left[\frac{\left(\dfrac{x+\omega}{2\omega}\right)_{n-1}}{2\omega\left(\dfrac{x}{2\omega}\right)_n} \right]^k \frac{1}{f(x)} \\ f(x+2n\omega) &= \left[\frac{\left(\dfrac{x}{2\omega}\right)_n}{\left(\dfrac{x+\omega}{2\omega}\right)_n} \right]^k f(x) \end{aligned}\right. \qquad (0 < x \leqq \omega). \tag{14.17}$$

A cause de semi-décroissance ω de $f(x)$ pour les valeurs de la variables plus grandes que $\mathfrak{M}$, de trois nombres

$$x + (2n-1)\omega \leqq x + 2n\omega \leqq x + (2n+1)\omega.$$
$$\left(n > \frac{\mathfrak{M}+\omega}{2},\ x \in (0, \omega]\right)$$

on tire la relation

$$f(x+(2n-1)\omega) \geqq f(x+2n\omega) \geqq f(x+(2n+1)\omega),$$

et, grâce aux (14.17), on a

$$(14.18)\qquad f_n^2(x) \leq f^2(x) \leq f_n^2(x)\left[\frac{x+2n\omega}{x+(2n-2)\omega}\right]^k,$$

où nous avons posé

$$(14.19)\quad f_n(x) = \left[\frac{\left(\dfrac{x+\omega}{2\omega}\right)_n}{\left(\dfrac{x}{2\omega}\right)_n}\right]^k \frac{1}{(2\omega)^{\frac{k}{2}}\left(\dfrac{x}{2\omega}+n\right)^{\frac{k}{2}}}$$

$$= \left[\frac{(n-1)!\,(n-1)^{\frac{x}{2\omega}}}{\left(\dfrac{x}{2\omega}\right)_n} : \frac{(n-1)!\,(n-1)^{\frac{x+\omega}{2\omega}}}{\left(\dfrac{x+\omega}{2\omega}\right)_n}\,\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\right]^k$$

$$\times\left[\frac{n-1}{\dfrac{x}{2\omega}+n}\right]^{\frac{k}{2}}.$$

On tire de (14.19) que,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = F(x)$$

et, de (14.18), puisque $f(x)$ est positive, pour $x > 0$,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = F(x).$$

14.7. Considérons maintenant l'équation fonctionnelle

$$(14.20)\qquad \begin{cases} f(x+\omega) = \dfrac{1}{[(x+\rho_1)\ldots(x+\rho_p)]^k}\,\dfrac{1}{f(x)} \\ \quad (x>0,\ k>0;\ \rho_1,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_p > 0). \end{cases}$$

Si l'on pose

$$(14.21)\qquad P(x) = [(x+\rho_1)\ldots(x+\rho_p)]^k,$$

(14.20) devient

$$(14.22)\qquad f(x+\omega) = \frac{1}{P(x)\,f(x)}.$$

Si $f_\nu(x)$ satisfait l'équation fonctionnelle

$$(14.23)\qquad f_\nu(x+\omega) = \frac{1}{(x+\rho_\nu)^k f_\nu(x)},$$

la fonction

$$(14.24)\qquad \Phi(x) = f_1(x)\,f_2(x)\ldots f_p(x)$$

est une solution de (14.20). D'autre part, toute solution $\sigma(x)$ de (14.20), est liée avec $\Phi(x)$ par la relation

$$Q(x+\omega)\,Q(x)=1, \tag{14.25}$$

où

$$Q(x)=\frac{\sigma(x)}{\Phi(x)}.$$

Il en résulte que, la solution générale de (14.20) est

$$f(x)=\Phi(x)\,Q(x), \tag{14.26}$$

où $\Phi(x)$ est la fonction (14.24) et $Q(x)$ une solution quelconque de (14.25).

14.8. Nous allons chercher les solutions semi-décroissantes ω de (14.20), positives, pour $x>0$.

Si $F(x)$ est la fonction définie par (14.15), on reconnaît aussitôt que $F(x+\rho_\nu)$ est une solution de (14.23) positive et semi-décroissante ω, pour $x>0$; mais, d'après le théorème b du paragraphe 3.4, le produit des fonctions semi-décroissantes ω et positives, pour $x>0$, est une fonction qui a les mêmes propriétés; la fonction, donc,

$$\Phi(x)=F(x+\rho_1)\ldots F(x+\rho_p) \tag{14.27}$$

est une solution de (14.20) semi-décroissante ω et positive, pour $x>0$.

Nous allons démontrer maintenant le théorème suivant :

$\Phi(x)$, *définie par* (14.27) *est la seule solution semi-décroissante* ω *et positive pour* $x>0$ *de* (14.20).

Soit $f(x)$ une autre solution de (14.20), qui a les propriétés de $\Phi(x)$. Il résulte de (14.26) que, $Q(x)$ est positive, pour $x>0$; on tire de (14.18), pour $n=1$,

$$\left[\frac{(x+\omega)}{x\sqrt{x+2\omega}}\right]^k\leqq F(x)\leqq\left[\frac{\sqrt{x+\omega}}{x}\right]^k,$$

qui devient, en remplaçant x par $x+\rho_\nu$,

$$\left[\frac{x+\rho_\nu+\omega}{(x+\rho_\nu)\sqrt{x+\rho_\nu+2\omega}}\right]^k\leqq F(x+\rho_\nu)\leqq\left[\frac{\sqrt{x+\rho_\nu+\omega}}{(x+\rho_\nu)}\right]^k$$
$$(\nu=1,2,\ldots,p)$$

et, en multipliant $(\nu=1,2,\ldots,p)$,

$$\frac{P_1}{P_0\sqrt{P_2}}\leqq\Phi(x)\leqq\frac{\sqrt{P_1}}{P_0}, \tag{14.28}$$

où nous avons posé, pour abréger,

$$P_0 \equiv [P(x)]^k, \qquad P_\lambda = [P(x+\lambda\omega)]^k.$$

$f(x)$, étant supposée une solution de (14.20) ayant les propriétés de $\Phi(x)$, sera de la forme (14.26); mais, $Q(x)$ étant positive, pour $x > 0$, il résulte de (14.28)

$$Q(x)\frac{P_1}{P_0\sqrt{P_2}} \leqq f(x) \leqq \frac{\sqrt{P_1}}{P_0}Q(x). \tag{14.29}$$

En remplaçant x par $x+\omega$, $x+2\omega$, $x+3\omega$, (14.29) devient, grâce à (14.25),

$$\frac{1}{Q(x)}\frac{P_2}{P_1\sqrt{P_3}} \leqq f(x+\omega) \leqq \frac{\sqrt{P_2}}{P_1}\frac{1}{Q(x)}, \tag{14.30}$$

$$Q(x)\frac{P_3}{P_2\sqrt{P_4}} \leqq f(x+2\omega) \leqq \frac{\sqrt{P_3}}{P_2}Q(x), \tag{14.31}$$

$$\frac{1}{Q(x)}\frac{P_4}{P_3\sqrt{P_5}} \leqq f(x+3\omega) \leqq \frac{\sqrt{P_4}}{P_3}\frac{1}{Q(x)}. \tag{14.32}$$

$f(x)$, étant semi-décroissante ω pour $x > 0$, on tire de (14.29), (14.30) et (14.31),

$$\frac{P_0P_2}{P_1\sqrt{P_1P_3}} \leqq Q^2(x) \leqq \frac{P_2\sqrt{P_2P_4}}{P_1P_3}.$$

On en tire, en remplaçant x par $x+2n\omega$ et en tenant compte que $Q(x)$ admet la période 2ω,

$$\frac{P_{2n}P_{2n+2}}{P_{2n+1}\sqrt{P_{2n+1}P_{2n+3}}} \leqq Q^2(x) \leqq \frac{P_{2n+2}\sqrt{P_{2n+2}P_{2n+4}}}{P_{2n+1}P_{2n+3}}$$

et, en faisant $n \to \infty$,

$$Q^2(x) = 1$$

ou, $Q(x)$ étant positive pour $x > 0$,

$$Q(x) = 1.$$

On tire, donc, de (14.26) que,

$$f(x) = \Phi(x).$$

On parvient au même résultat, si l'on cherche les solutions semi-convexes ω et positives, pour $x > 0$. On a, donc, le théorème

$\Phi(x)$, *définie par* (14.27) *est la seule solution semi-convexe* ω *et positive pour* $x > 0$ *de* (14.20).

14.9. Considérons le cas particulier suivant : Soit l'équation fonctionnelle

$$f\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\pi\left(x+\frac{1}{2}\right)}\frac{1}{f(x)}. \tag{14.33}$$

Si l'on demande la solution semi-décroissante $\frac{1}{2}$ ou semi-convexe $\frac{1}{2}$, pour $x > 0$, de l'équation (14.33), on trouve

$$\Delta(x)=\frac{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(x+1)}=\frac{1}{x\,\mathrm{B}\left(x,\frac{1}{2}\right)}.$$

Cette fonction a été examinée par Hisasue [21]

NOTE.

W. Krull ([24], [25]) dans deux Mémoires très intéressants, généralisant les résultats d'Artin [9], a examiné l'équation fonctionnelle

$$g(x+1)-g(x)=\varphi(x), \tag{1}$$

où $\varphi(x)$ est une fonction définie et continue pour $x > \mathfrak{M}$, qui vérifie l'une des conditions suivantes :

$$\lim_{x\to\infty}[\varphi(x+h)-\varphi(x)]=0 \qquad (h>0), \tag{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\Delta\varphi(x;\,h_1,\,h_2)=0 \qquad (0<h_i\leqq\delta;\ i=1,\,2), \tag{3}$$

où nous avons posé

$$\Delta\varphi(x;\,h_1,\,h_2)=\frac{\varphi(x+h_2)-\varphi(x)}{h_2}-\frac{\varphi(x)-\varphi(x-h_1)}{h_1} \quad (^{19}). \tag{4}$$

Nous donnerons dans ce qui suit les résultats principaux de W. Krull sans démonstration; le lecteur intéressé peut consulter les Mémoires originaux ([20]).

([19]) *Voir* paragraphe 1.9.

([20]) On peut consulter aussi le Mémoire intéressant de A. Dinghas [16].

Son *théorème fondamental* I est le suivant :

Supposons que $\varphi(x)$ *puisse s'écrire*

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x),$$

où $\varphi_1(x)$ *est convexe,* $\varphi_2(x)$ *est concave pour* $x > \mathfrak{M}$ *et qu'elles vérifient la condition* (2); *alors il existe une et, d'une constante additive près, une seule « solution normale »* $g(x)$ *de l'équation* (1), *qui pour chaque* $h_1 > 0$ *vérifie la condition* (3); *pour* $x \geqq B > \mathfrak{M}$ *une solution normale est définie par*

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} g(x) &= \int_B^x \varphi(u)\,du - \frac{1}{2}\varphi(x) + Z[\varphi(x)], \\ Z[\varphi(x)] &= \sum_{k=0}^{\infty} X[\varphi(x+k)], \\ X[\varphi(x)] &= \int_x^{x+1} \varphi(u)\,du - \frac{1}{2}[\varphi(x+1) + \varphi(x)]. \end{aligned} \right.$$

La fonction $Z[\varphi(x)]$ *tend vers zéro quand* $x \to \infty$.

Les formules (5) sont une généralisation évidente de la formule de Stirling pour la fonction $\Gamma(x)$.

En supposant que $\varphi(x)$ soit définie dans $x > 0$ on peut démontrer les théorèmes suivants :

1. *Si les suppositions du théorème fondamental sont remplies, la solution normale de l'équation* (1), *pour qui* $g(1) = 0$, *peut s'écrire comme il suit :*

$$(6) \qquad g(x) = \lim_{n \to \infty} \left[x\varphi(n) - \varphi(x) - \sum_{k=1}^{n} (\varphi(x+k) - \varphi(k)) \right]$$
$$= -\varphi(x) - x\varphi(0) - x\sum_{k=1}^{\infty} \Delta\varphi(k;\, 1,\, x).$$

Cette formule est une généralisation de la formule de Gauss pour la fonction $\Gamma(x)$.

2. *Si* $\varphi(x)$ *est convexe (resp. concave) pour* $x > \mathfrak{M}$, *les solutions normales de l'équation* (1) *sont concaves (resp. convexes) pour* $x > \mathfrak{M}$.

3. *Si les suppositions du théorème fondamental sont remplies, une solution convexe ou concave pour* $x > \mathfrak{M}$ *de* (1) *est toujours une solution normale.*

W. Krull considère ensuite l'équation

$$G(x+1) = \Phi(x)\,G(x), \tag{7}$$

où $\Phi(x)$ est une fonction définie, positive et continue pour $x > 0$; il démontre le théorème suivant :

Si $\Phi(x)$ *pour* $x > \mathfrak{M}$ *est logarithmiquement convexe (resp. concave) et si* $\Phi(x)$ *vérifie la condition*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Phi(x+1)}{\Phi(x)} = 1,$$

l'équation (7) *admet une et, d'un facteur constant près, une seule solution normale* $G(x)$ *qui remplit la condition*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Phi(x+h)\,\Phi(x-h)}{\Phi(x)^2} = 1$$

et qui pour $x > \mathfrak{M}$ *est logarithmiquement concave (resp. convexe).*

On peut démontrer [8] le théorème suivant qui généralise le résultat du paragraphe 8.

Supposons que $\Phi(x)$ *soit logarithmiquement concave (resp. convexe) pour* $x > \mathfrak{M}$ *et remplisse les conditions suivantes :*

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{\Phi(x+h)}{\Phi(x)}\right]^x = k^h \qquad (k = \text{Cte},\ h > 0),$$

$$\left[\frac{\Phi(x+1)}{\Phi(x)}\right]^{x+1} \geqq k \quad (\text{resp.} \leqq k) \qquad \text{pour} \quad x > 0;$$

une fonction $G(x)$, *définie pour* $x > 0$, *se confond avec*

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\Phi(1))_n\,\Phi(n)^x}{(\Phi(x))_{n+1}},$$

si $G(x)$ *vérifie les conditions suivantes :*

I. *elle est une solution de l'équation* (7);

II. $\left[\dfrac{k}{\Phi(x)}\right]^x G(x)$ *est décroissante (resp. croissante) pour* $x > 0$;

III. $G(1) = 1$.

Dans son deuxième Mémoire W. Krull démontre le *théorème fondamental II suivant :*

Si $\varphi(x)$ *admet une dérivée d'ordre r, si cette dérivée est monotone et si* $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi^{(r)}(x) = K$ *(K fini), alors l'équation fonctionnelle* (1) *admet* *une et, d'une constante additive près, une seule solution normale $g(x)$ qui admet une dérivée d'ordre r et qui vérifie, pour $h_1, h_2 > 0$, la condition*

$$\lim_{x\to\infty} \Delta g^{(r)}(x;\, h_1,\, h_2) = 0.$$

Si, en particulier, $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi^{(r)}(x) = 0$, la solution normale vérifie de plus, pour chaque $h > 0$, la condition

$$\lim_{x\to\infty} \left(g^{(r)}(x+h) - g^{(r)}(x)\right) = 0.$$

Il démontre ensuite les théorèmes suivants :

1. *Si $g(x)$ est une solution normale et intégrable de l'équation* (1), *la fonction*

$$\mathrm{F}(x) = \int_1^x g(u)\,du - (x-1)\int_1^2 g(u)\,du$$

est une solution normale de l'équation

$$\mathrm{F}(x+1) - \mathrm{F}(x) = \int_1^x \varphi(u)\,du,$$

pour qui $\mathrm{F}(1) = 0$.

2. *Si $\varphi^{(r)}(x)$ est monotone et si*

$$\lim_{x\to\infty} \varphi^{(r)}(x) = \varphi(1) = \varphi'(1) = \ldots = \varphi^{(r-1)}(1) = 0,$$

la solution normale de (1), *pour qui $g(1) = 0$, prend la forme*

$$(8)\quad g(x) = \lim_{n\to\infty} \Big\{ [\mathrm{P}_r(x)\,\varphi^{(r-1)}(n+2) + \mathrm{P}_{r-1}(x)\,\varphi^{(r-2)}(n+2) + \ldots + \mathrm{P}_1(x)\,\varphi(n+2)] - \sum_{k=0}^{n} [\varphi(x+k) - \varphi(1+k)] \Big\},$$

où $\mathrm{P}_k(x)$ sont définis par

$$\mathrm{P}_1(x) = (x-1), \qquad \mathrm{P}_s(x) = \int_1^x \mathrm{P}_{s-1}(u)\,du - (x-1)\int_1^2 \mathrm{P}_{s-1}(u)\,du.$$

Si dans cette formule on pose $r = 1$, on trouve la formule (6).

3. *Si $\varphi^{(r)}(x)$ est monotone, si $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi^{(r)}(x) = 0$ et si $g(x)$ est une solution normale de* (1), *$g^{(r)}(x)$ est aussi monotone.*

On dit qu'une fonction $f(x)$, définie dans $a \leqq x < \infty$, est *à variation bornée* dans cet intervale s'il y a un nombre fini K tel que pour chaque suite finie $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqq \mathrm{K}.$$

On a alors le théorème :

Le théorème fondamental II *est valable en supposant — au lieu de la monotonie de* $\varphi^{(r)}(x)$ — *que* $\varphi^{(r)}(x)$ *soit à variation bornée dans* $a \leqq x < \infty$, *pour a assez grand.*

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J. Aczél, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen* (Birkhäuser, Basel, 1961).

[2] J. Anastassiadis, *Fonctions semi-monotones et semi-convexes et solutions d'une équation fonctionnelle* (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 76, 1952, p. 148-160).

[3] J. Anastassiadis, *Sur les solutions logarithmiquement convexes ou concaves d'une équation fonctionnelle* (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 81, 1957, p. 78-87).

[4] J. Anastassiadis, *Une propriété de la fonction Gamma* (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 81, 1957, p. 116-118).

[5] J. Anastassiadis, *Définitions fonctionnelles de la fonction* $\mathrm{B}(x, y)$ (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 83, 1959, p. 24-32).

[6] J. Anastassiadis, *Remarques sur quelques équations fonctionnelles* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 250, 1960, p. 2663-2665).

[7] J. Anastassiadis, *Sur les fonctions périodiquement à variation bornée* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 252, 1961, p. 55-56).

[8] J. Anastassiadis, *Sur les solutions de l'équation fonctionnelle* $f(x+1) = \varphi(x) f(x)$ (*C. R. Acad. Sc.*, t. 253, 1961, p. 2446-2447).

[9] E. Artin, *Einführung in die Theorie der Gammafunktion* (Teubner, Leipzig, 1931)

[10] W. N. Bailey, *Generalized Hypergeometric series* (Cambridge University Press, London, 1935).

[11] J. Binet, *Mémoire sur les intégrales définies eulériennes et sur leurs applications à la théorie des suites, ainsi qu'à l'évaluation des fonctions des grands nombres* (*J. Éc. Polyt.*, cahier 27, 1839, p. 123-343).

[12] H. Bohr et I. Mollerup, *Lœrebog i matematisk Analyse*, t. III (Kopenhagen, 1922).

[13] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématiques*, Livre IV, *Fonctions d'une variable réelle* (Hermann, Paris, 1949).

[14] C. Carathéodory, *Funktionentheorie*, t. I (Birkhäuser, Basel, 1950).

[15] A. Denjoy, *Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues* (*J. Math. pures et appl.*, 7e série, t. 1, 1915, p. 105-240).

[16] A. Dinghas, *Zur Theorie der Gammafunktion* (*Mathematisch-Physikalische Semesterberichte*, t. 6, 1959, p. 245-252).

[17] L. Euler, *Institutiones calculi differentialis cum ejus usu in analysi finitorum ac doctrina serierum* (Petersburg, 1755).

[18] L. EULER, *Institutiones calculi integralis*, t. I et II (Petersburg, 1768-1769).

[19] C. F. GAUSS, *Disquisitiones generales circa serien infinitam*

$$1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha.(\alpha+1).\beta.(\beta+1)}{1.2.\gamma.(\gamma+1)}x^2+\dots.$$

[*Comm. Soc. Sc. Gottingensis rec.* (*math.*), t. 2, 1813, nº 1, p. 1-46].

[20] O. HAUPT et G. AUMANN, *Differential und Integralrechnung*, t. I et II (Walter de Gruyter, Berlin, 1938).

[21] H. K. HISASUE, *The Delta Funktion* (*Proc. Phys. math. Soc. Japan*, 3e série, t. 9, 1927, p. 145-151).

[22] O. HÖLDER, *Ueber die Eigenschaft der Gammafunktion, keiner algebraischen Differentialgleichung zu genügen* (*Math. Ann.*, t. 28, 1887, p. 1-13).

[23] F. KLEIN, *Vorlesungen über hypergeometrische Funktion* (Springer, Berlin, 1933).

[24] W. KRULL, *Bemerkungen zur Differenzengleichung*

$$g(x+1)-g(x) \doteq \varphi(x).$$

I. (*Math. Nachr.*, t. 1, 1948, p. 365-376).

[25] W. KRULL, *Bemerkungen zur Differenzengleichung*

$$g(x+1)-g(x)=\varphi(x).$$

II. (*Math. Nachr.*, t. 2, 1949, p. 251-262).

[26] M. KUCZMA, *Remarques sur quelques théorèmes de J. Anastassiadis* (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 84, 1960, p. 98-102).

[27] M. KUCZMA, *Remarks on some functional equations* (*Ann. Polonici Math.*, t. 8, 1960, p. 277-284).

[28] A. M. LEGENDRE, *Exercices de calcul intégral sur divers ordres de transcendantes et sur les quadratures*, t. II (Paris, 1814).

[29] A. MAYER, *Konvexe Lösungen der Funcktionalgleichung*

$$\frac{1}{f(x+1)}=xf(x)$$

(*Acta Math.*, t. 70, 1939, p. 57-62).

[30] P. MONTEL, *Sur les fonctions convexes et les fonctions sous harmoniques* (*J. Math. pures et appl.*, 9e série, t. 7, 1928, p. 29-60).

[31] P. MONTEL, *Sur les propriétés périodiques des fonctions* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 251, 1960, p. 2111-2112).

[32] N. NÖRLUNG, *Differenzenrechnung* (Springer, Berlin, 1924).

[33] A. OSTROWSKI, *Neuer Beweis des Hölderschen Satzes, dass die Gammafunktion keiner algebraischen Differentialgleichung genücht* (*Math. Ann.*, t. 79, 1919, p. 286-288).

[34] G. PLANA, *Note sur une nouvelle expression analytique des nombres bernoulliens, propre à exprimer en termes finis la formule générale pour la sommation des suites* [*Mém. Acad. Sc. Torino*, (1), 25, 1820, p. 403-418].

[35] H. P. THIELMAN, *On the convex solution of a certain functional equation* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 47, 1941, p. 118-120).

[36] K. WEIERSTRASS, *Ueber die Theorie der analytischen Fakultäten* (*J. reine angew. Math.*, t. 51, 1856, p. 1-60).

[37] E. T. WHITTAKER et G. N. WATSON, *A course of modern Analysis* (Cambridge University Press, London, 1950).

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

Fonctions convexes, semi-monotones et semi-convexes.

CHAPITRE II.

La fonction $\Gamma(x)$.

CHAPITRE III.

La fonction $B(x, y)$.