MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

HUGUETTE DELAVAULT

Les transformations intégrales à plusieurs variables et leurs applications

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 148 (1961)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1961__148__3_0>

M^lle Huguette DELAVAULT
Docteur ès Sciences

LES TRANSFORMATIONS INTÉGRALES A PLUSIEURS VARIABLES ET LEURS APPLICATIONS

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
Directeur : H. VILLAT
FASCICULE CXLVIII

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
Quai des Grands-Augustins, 55
1961

LES TRANSFORMATIONS INTÉGRALES A PLUSIEURS VARIABLES ET LEURS APPLICATIONS

Par M^lle Huguette DELAVAULT,

Docteur ès Sciences.

INTRODUCTION.

Les transformations intégrales à une variable permettant de ramener une équation aux dérivées partielles à n variables à une équation aux dérivées partielles à $n-1$ variables (pour $n=2$, nous obtenons une équation différentielle ; pour $n=1$, une équation algébrique), il est tout à fait naturel de penser qu'en effectuant de telles transformations par rapport aux n variables, nous obtiendrons une équation algébrique et le problème sera aisé à résoudre. Cette utilisation des transformations intégrales à n variables pour résoudre des problèmes de Physique mathématique n'est pas récente. Intégrales multiples de Fourier et de Laplace, séries multiples de Fourier, sont déjà utilisées par Fourier dans son étude de la propagation de la chaleur, et surtout par Cauchy, dont le Mémoire sur le calcul intégral et d'autres travaux [7] couvrent à peu près tout le champ des applications du calcul symbolique à n variables, connues maintenant.

Mais l'étude systématique des transformations intégrales multiples (« mixtes » écrit Vasilach [33]) et leur élévation au rang de méthode de résolution des équations aux dérivées partielles, avec conditions aux limites, et des équations intégrales, est assez récente.

La transformation double de Laplace a particulièrement retenu l'attention des mathématiciens. C'est P. Humbert qui publia le premier travail sur cette transformation [16], en 1934 et 1936. Puis viennent la thèse de Voelker (1939), l'étude en 1940 de Picone [23] sur son application aux équations aux dérivées partielles en relation avec la méthode de Riemann de la fonction de Green, et celle de Jaeger [18] tout à fait dans la ligne du calcul symbolique. En 1941, paraissent simultanément et indépendamment des travaux théoriques d'Amério [2 a] utilisant l'intégrale de Lebesgue, et de D. L. Bernstein [4] avec l'intégrale de Laplace-Stieltjes. Doetsch et Voelker [13] consacrent une monographie aux propriétés essentielles de cette transformation et surtout à ses applications aux dérivées partielles et le Professeur H. Villat [35 a] fait en Sorbonne un cours sur ce même sujet en 1952. M. P. Delerue [11] généralise à n variables les applications aux équations intégrales de M. Parodi et donne de nombreuses correspondances. Ces dernières années, le Professeur J. Leray [19], généralise et prolonge formellement cette transformation; la transformation formelle de Laplace ainsi introduite présente l'avantage pour les applications aux équations aux dérivées partielles, de transformer un opérateur différentiel $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ en un autre opérateur $A\left(-\frac{\partial}{\partial \xi}, \xi\right)$ de telle sorte que les caractéristiques de A se déduisent de celles de a par une transformation de contact simple (cas de dégénérescence de la transformation de Legendre), les bicaractéristiques étant données par le même système différentiel, et il l'utilise pour l'étude du problème de Cauchy des équations aux dérivées partielles linéaires à n variables et d'ordre m quelconque.

Les règles opératoires et les séquences de la transformation à n variables ont été étudiées par M. P. Delerue [11] et par un groupe de mathématiciens de Luknov (Inde) [36]. Ces mêmes mathématiciens généralisent les transformations de Whittaker et de Varma à deux variables ([6], [22]). Enfin signalons la généralisation intéressante de la transformation intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville par M. Riesz [27]. En outre en 1956, Vasilach [33] donne une application de ces transformations « mixtes » (ici transformation de Laplace à une variable et de Fourier à trois variables) et annonce un travail d'ensemble sur les transformations mixtes linéaires et continues d'un espace fonctionnel en un autre.

Nous-même [10], nous avons étudié une combinaison de transformation de Laplace et de Hankel et en avons donné une application à l'équation de la chaleur.

Un cours en Sorbonne du Professeur H. Villat [35] nous montre, en 1953, tout l'intérêt qu'il y a à considérer les développements en série de fonctions propres, associées aux équations différentielles du deuxième ordre, sous l'aspect de transformations intégrales finies. Sneddon [28] reprend sous cet aspect les travaux de Hilbert et Courant et nous-même appliquons cela à quelques problèmes d'électromagnétisme.

C'est ce changement de point de vue qui justifie l'étude que nous allons faire. En général, dans les problèmes de Physique mathématique, l'étude physique suggérait la forme de la solution, obtenue le plus souvent par la méthode de Riemann de la fonction de Green ou sous forme de développements en série de fonctions propres. Par la méthode des transformations intégrales, on ne préjuge pas de la forme de la solution; on transforme l'équation aux dérivées partielles en une équation différentielle ou mieux en une équation algébrique et les conditions aux limites s'introduisent naturellement dans les calculs. Connaissant les propriétés de la transformation, il suffit d'effectuer un simple calcul formel. Nous avons donc un puissant instrument de recherche, parfaitement adapté à ces problèmes aux limites, et nous permettant d'étudier des problèmes d'un abord physique difficile ou d'en apercevoir des aspects cachés et de les généraliser. La seconde opération consiste à revenir à la solution dans l'espace initial; de nombreux exemples ([10], [12], [13], [33]) prouvent qu'on peut souvent obtenir directement cette solution sans utiliser les formules d'inversion, avec la seule aide de formulaires; c'est alors que s'éliminent normalement les conditions surabondantes qui ont pu s'introduire dans le courant du calcul; et, en vérifiant que la solution trouvée satisfait bien au problème posé, on détermine les conditions qu'on doit imposer aux données pour qu'il en soit ainsi. Le simple calcul formel ne suffit pas; la vérification, certainement la plus délicate, est indispensable pour affirmer qu'on a effectivement résolu le problème posé et pour en utiliser le plus complètement possible toutes les ressources.

A part la transformation de Riesz, les transformations multiples utilisées jusqu'ici se déduisent immédiatement des transformations à une variable, leur noyau se séparant en noyaux à une variable. Mais les conditions de validité, la légitimation des opérations effectuées, les propriétés des fonctions transformables et transformées ne se déduisent pas aussi simplement, pas plus que la théorie des séries et intégrales simples ne se généralise à n variables par une simple répétition. Les difficultés rencontrées dans le passage d'une à deux variables sont les seules intéressantes, car ce sont les seules que nous retrouverions dans le passage à n variables. Nous nous limiterons donc, en général, au cas $n = 2$.

Nous ne ferons pas ici l'étude théorique des transformations intégrales multiples générales en tant qu'opérateurs linéaires. Nous en étudierons les problèmes élémentaires qui se posent lorsqu'on veut les appliquer aux problèmes de Physique mathématique : équations aux dérivées partielles avec conditions aux limites, équations intégrales, fonctions réciproques, etc.

Les intégrales doubles servant à la définition et au calcul de ces transformations, nous avons jugé nécessaire de consacrer quelques pages à cet instrument de travail, en indiquant les difficultés rencontrées principalement quand, soit le domaine d'intégration, soit l'intégrande, devient infini. Nous ne nous bornerons pas toujours au concept intégral de Riemann, celui de Lebesgue nous permettant une simplicité plus grande des théorèmes généraux (énoncés et démonstrations) et dans les applications nous reviendrons aisément au premier. En outre nous utiliserons parfois l'intégrale de Stieltjes.

Nous ne redonnerons pas, dans les applications de la transformation double de Laplace, celles publiées par Doetsch et Voelker dans leur monographie et nous ne rappellerons que très succinctement celles étudiées par L. Poli et P. Delerue [25] dans un fascicule de cette même Collection. En outre, pour la bibliographie, nous n'avons indiqué que les Ouvrages auxquels nous nous référerons explicitement, laissant au lecteur le soin de compléter à l'aide des Ouvrages [10], [13], [25].

(Les nombres entre crochets renvoient à la bibliographie située à la fin de ce travail.)

CHAPITRE I.

Généralités.

1. Définition. — Nous définissons la transformée intégrale de la fonction des variables réelles $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ par l'intégrale multiple

$$(1.1)\quad f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \int_D K(x_1, x_2, \ldots, x_n; \xi_1, \ldots, \xi_n)\, F(x_1, \ldots, x_n)\, dV_x,$$

$\xi_1, \ldots, \xi_n$ étant réelles ou complexes; D, domaine de l'espace à n dimensions fini ou infini; dV_x, élément de volume de cet espace rapporté aux coordonnées $x_1, \ldots, x_n$; K fonction donnée appelée noyau de la transformation. F sera appelée la fonction originale et f la fonction image.

Comme cas particulier nous avons les noyaux de la forme

$$K(x_1, \ldots, x_n; \xi_1, \ldots, \xi_n) = K(x_1\xi_1, \ldots, x_n\xi_n),$$
$$K(x_1, \ldots, x_n; \xi_1, \ldots, \xi_n) = K_1(x_1; \xi_1) \ldots K_n(x_n; \xi_n).$$

Pour $n = 2$, nous écrirons

$$(1.2)\qquad f(u, v) = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} K(x, y; u, v)\, F(x, y)\, dx\, dy.$$

2. Exemples de transformations :

a. la transformation double de Fourier :

$$K = \frac{e^{i(ux+vy)}}{2\pi};$$

$D(-\infty < x < +\infty, -\infty < y < \infty)$ ou $D(0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi)$.

On a également les transformations en sinus ou en cosinus :

$$K = \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b},$$

ou bien K obtenu en remplaçant l'un ou les deux sinus par un ou deux cosinus ; D est alors $(0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b)$;

b. la transformation double de Laplace :

$$K = e^{-ux-vy};$$

D étant : soit le premier quadrant $Q(0 \leqq x < \infty;\ 0 \leqq y < \infty)$, c'est la transformation unilatérale ; soit le plan tout entier $(-\infty < x < \infty,\ -\infty < y < +\infty)$, transformation bilatérale ;

c. la transformation double de Mellin étudiée par Reed [26] :

$$K = x^{u-1} y^{v-1};$$

D étant le premier quadrant $Q(0 \leqq x < \infty,\ 0 \leqq y < \infty)$;

d. la transformation double de Meijer introduite par Mehra [22] :

$$K = uv\, e^{ux+vy}\, W_{k+\frac{1}{2},\, m}(ux)\, W_{k'+\frac{1}{2},\, m'}(vy)\,(ux)^{-k-\frac{1}{2}}(vy)^{-k'-\frac{1}{2}},$$

D étant le quadrant Q.

Nous avons comme cas particulier :

$$k = \pm m \quad \text{et} \quad k' = \pm m',$$

le noyau est alors une dérivée fractionnaire ou entière de e^{-ux-vy} et par intégrations par parties on se ramène à la transformation de Laplace des dérivées de $F(x, y)$;

$$k = \frac{n}{2} - \frac{1}{4}, \qquad m = \pm \frac{1}{4}, \qquad k' = \frac{n'}{2} - \frac{1}{4}, \qquad m' = \pm \frac{1}{4},$$

on a alors une transformation en $D_n D_{n'}$, fonctions de Weber ;

$$k = \frac{n}{2} + l, \qquad m = \pm \frac{n}{2}, \qquad k' = \frac{n'}{2} + l', \qquad m' = \pm \frac{n'}{2},$$

on a alors une transformation en $L_l^n L_{l'}^{n'}$, polynomes de Laguerre généralisés.

Une autre forme de cette transformation est la généralisation de la *transformation de Whittaker* par Bose [6] :

$$K = uv(2ux)^{-\frac{1}{4}}(2vy)^{-\frac{1}{4}}\, W_{k,m}(2ux)\, W_{k',m'}(2vy)$$

qui se ramène à la transformation de Laplace pour

$$k = k' = \frac{1}{4}; \qquad m = m' = \pm \frac{1}{4};$$

e. la transformation de Laplace-Hankel [10] :

$$K = e^{-ux} y\, J_\nu(vy)$$

que nous avons étudiée sur $Q(0 \leqq x < \infty,\ 0 \leqq y < \infty)$.

Toutes ces transformations sont à noyaux séparables.

Divers travaux font intervenir les produits de fonction de Bessel. Le noyau $K = e^{imx} y\, J_m(vy)$ sur le rectangle $(0 \leqq x \leqq 2\pi,\ 0 \leqq y \leqq R)$ interviendra dans de nombreuses applications; remarquons que ce n'est plus un noyau séparable puisque m figure dans l'exponentielle et dans la fonction de Bessel.

Un autre noyau non séparable sera celui de la *tranformation de Riesz* [27] :

$$K(x_1, \ldots, x_n;\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \frac{r^{\alpha-m}}{H_m(\alpha)}, \qquad \text{avec} \quad r = \left[\sum_1^n (x_i - \xi_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

ou

$$K(x_1, \ldots, x_n;\ \xi_1, \ldots, \xi_n) = \frac{r^{\alpha-m}}{H_m(\alpha)},$$

avec

$$r = \left[(x_1 - \xi_1)^2 - \sum_{i=2}^{n} (x_i - \xi_i)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$H_m(\alpha)$ n'ayant pas la même valeur dans les deux cas.

D dans le deuxième cas est un volume borné par le cône $r^2 < 0$, $x_1 - \xi_1 > 0$.

Nous allons envisager les principaux problèmes qui se posent immédiatement et les propriétés générales communes à toutes les transformations. Nous ne ferons que des calculs formels, réservant une étude plus poussée pour chaque cas particulier.

3. **Existence de la transformée** $f(u, v)$. — Nous avons à considérer la convergence de l'intégrale multiple (1.1). Pour un domaine fini, il n'y aura de difficultés que si la fonction devient infinie dans le domaine; nous utiliserons alors la valeur principale de Cauchy ou la partie finie d'Hadamard (appendice I). Sinon nous pourrons la

calculer comme une intégrale répétée. Si le domaine est infini, nous considérerons soit la convergence absolue de l'intégrale, ce qui nous permet (dans le cas de l'intégrale de Lebesgue) de la calculer comme une intégrale répétée, soit les généralisations indiquées dans l'appendice I: convergence, convergence bornée. Nous chercherons le plus souvent possible à nous ramener à une intégrale convergeant absolument (généralisation du théorème de Mathias Lerch pour la transformation de Laplace).

4. **Détermination de** $F(x, y)$ **connaissant** $f(u, v)$. — C'est le problème de la résolution de l'équation intégrale (1.2). Dans le cas des noyaux séparables, si la transformation est absolument convergente ainsi que les transformations simples la composant, on pourra faire successivement l'inversion de ces transformations simples. Par exemple :

$$f(u, v) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ux-vy} F(x, y)\, dx\, dy = \int_0^\infty e^{-vy} \overset{\prime}{F}(u, y)\, dy,$$

avec

$$\overset{\prime}{F}(u, y) = \int_0^\infty e^{-ux} F(x, y)\, dx,$$

alors

$$\overset{\prime}{F}(u, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{vy} f(u, v)\, dv$$

et

$$F(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} e^{ux} \overset{\prime}{F}(u, y)\, du.$$

Pour les transformations non absolument convergentes, on utilisera comme pour une variable, des théorèmes de sommabilité ou des intégrales singulières. La méthode des intégrales singulières a été exposée dans sa généralité pour la transformation de Laplace à une variable par Erdelyi (*Math. Mag.*, t. 24, 1950, p. 1) qui y a rattaché les formules d'inversion déjà connues. On peut formellement généraliser cette méthode ainsi :

Soit $L_{h,k;x,y}$ un opérateur, dont nous ne préciserons pas ici les propriétés, mais qui peut être commuté avec l'opération d'intégration.

Appliquons-le aux deux membres de l'équation intégrale (1.2) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}_{h,\,k\,;\,x,\,y}[f(u,\,v)] &= \mathrm{L}_{h,\,k\,;\,x,\,y}\left[\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}[\mathrm{K}(\xi,\,\eta\,;\,u,\,v)\;\mathrm{F}(\xi,\,\eta)\,d\xi\,d\eta\right] \\
&= \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\mathrm{F}(\xi,\,\eta)\;\mathrm{L}_{h,\,k\,;\,x,\,y}[\mathrm{K}(\xi,\,\eta\,;\,u,\,v)]\,d\xi\,d\eta \\
&= \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\mathrm{F}(\xi,\,\eta)\;\mathrm{N}_{h,\,k}(\xi,\,\eta\,;\,x,\,y)\,d\xi\,d\eta,
\end{aligned}$$

$\mathrm{N}_{h,k}$ désignant la transformée du noyau K par l'opérateur.

Si

$$\lim_{h,\,k\to\infty}\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\mathrm{F}(\xi,\,\eta)\;\mathrm{N}_{h,\,k}(\xi,\,\eta\,;\,x,\,y)\,d\xi\,d\eta = \mathrm{F}(x,\,y),$$

nous aurons la formule d'inversion

$$\lim_{h,\,k\to\infty}\mathrm{L}_{h,\,k\,;\,x,\,y}[f(u,\,v)] = \mathrm{F}(x,\,y),$$

la convergence peut être ordinaire (convergence par points), forte (par exemple la convergence en moyenne) ou faible $\left[\text{par exemple convergence vers} \int_0^x\int_0^y \mathrm{F}(x,\,y)\,dx\,dy\right]$.

Pour la transformation de Laplace indiquée ci-dessus l'opérateur était

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int_{c-ih}^{c+ih}\int_{d-ik}^{d+ik} e^{ux+vy} f(u,\,v)\,du\,dv.$$

Formellement

$$\mathrm{L}_{h,\,k\,;\,x,\,y}[e^{-u\xi-v\eta}] = e^{c(x-\xi)+d(y-\eta)}\,\frac{\sin h\,(x-\xi)}{\pi(x-\xi)}\;\frac{\sin k(y-\eta)}{\pi(y-\eta)}$$

et le théorème de Fourier nous donne le résultat.

Nous indiquerons pour chaque transformation les formules d'inversion particulières, et en application de la transformation de Mellin une méthode générale de résolution de (1.2).

Nous étudierons également pour chaque transformation les conditions nécessaires auxquelles doit satisfaire $f(u,\,v)$ pour être représentée comme une transformée dans la transformation envisagée; nous déterminerons des conditions suffisantes pour qu'il en soit ainsi.

En outre nous chercherons à déduire le comportement asymptotique de $f(u, v)$ de celui de $F(x, y)$ (théorème abélien) ou inversement celui de $F(x, y)$, satisfaisant en outre à certaines conditions, de celui de $f(u, v)$ (théorèmes taubériens). Cela peut permettre d'étudier $F(x, y)$ sans faire l'inversion de la transformation.

5. Propriétés communes à ces transformations intégrales. — *a.* Supposons $F(x, y)$ *et* $f(u, v)$ *intégrables sur le domaine* D de la transformation. Nous aurons formellement si $F_i(x, y)$ a pour image $f_i(u, v)$, $i = 1, 2$:

$$\int_D F_1(x, y) f_2(x, y)\, dx\, dy = \int_D F_1(x, y)\, dx\, dy \int_D K(\xi, \eta;\, x, y)\, F_2(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Si nous pouvons intervertir l'ordre des intégrations :

$$\int_D F_1(x, y) f_2(x, y)\, dx\, dy = \int_D F_2(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \int_D K(\xi, \eta;\, x, y)\, F_1(x, y)\, dx\, dy.$$

Si $K(x, y;\, u, v) = K(u, v;\, x, y)$ [par exemple si K est de la forme $K(ux, vy)$] alors la deuxième intégrale du deuxième membre n'est autre que $f_1(\xi, \eta)$; d'où

$$\int_D F_1(x, y) f_2(x, y)\, dx\, dy = \int_D F_2(\xi, \eta) f_1(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{1.3}$$

b. Formule de Parseval.—Supposons que $\int_{D_1} f_1(u, v) f_2(u, v)\, du\, dv$ existe. On a alors formellement

$$\int_{D_1} f_1(u, v) f_2(u, v)\, du\, dv = \int_{D_1} f_1(u, v)\, du\, dv \int_D K(x, y;\, u, v)\, F_2(x, y)\, dx\, dy.$$

Si nous pouvons intervertir l'ordre des intégrations :

$$\int_{D_1} f_1(u, v) f_2(u, v)\, du\, dv = \int_D F_2(x, y)\, dx\, dy \int_{D_1} K(x, y;\, u, v) f_1(u, v)\, du\, dv.$$

Le cas intéressant est ici celui où

$$f(u, v) = \int_D K(x, y;\, u, v)\, F(x, y)\, dx\, dy \tag{1.4}$$

entraîne

$$F(x, y) = \int_{D_1} K(x, y;\, u, v) f(u, v)\, du\, dv, \tag{1.5}$$

en particulier si D_1 et D sont identiques, et $K(x, y; u, v) = K(ux, vy)$ nous avons la généralisation des noyaux de Fourier.

La relation précédente s'écrit

$$(1.6) \qquad \int_{D_1} f_1(u, v) f_2(u, v)\, du\, dv = \int_D F_1(x, y)\, F_2(x, y)\, dx\, dy.$$

Si $F_1 = F_2$:

$$(1.7) \qquad \int_{D_1} [f(u, v)]^2\, du\, dv = \int_D [F(x, y)]^2\, dx\, dy.$$

Ces deux relations sont les relations de Parseval.

Nous n'étudierons pas les conditions générales de telles relations. Mais notons cependant qu'une condition nécessaire est que les fonctions soient de carré intégrable; ce qui n'implique pas qu'elles soient intégrables. Nous voyons donc que nous aurons diverses propriétés selon les fonctions considérées et qu'il sera intéressant de considérer les transformations de fonctions de carré intégrable, généralisant ainsi la théorie de Plancherel.

6. **Fonctions réciproques et self-réciproques.** — Deux fonctions liées par les relations (1.4) et (1.5) sont dites réciproques si $D = D_1$ et $K = K(ux, vy)$.

Si en outre $f(u, v) = F(u, v)$, $F(x, y)$ est dite self-réciproque dans la transformation de noyau $K(ux, vy)$.

Nous rencontrerons l'étude de telles fonctions en application de la transformation de Mellin et de la transformation de Laplace. Mais une étude directe a été faite par Hardy (*J. London Math. Soc.*, t. 16, 1941, p. 89-94) quand le noyau est de la forme $K = k(ux)\, k(vy)$, k étant un noyau de Fourier satisfaisant en outre à certaines conditions telles que par exemple :

$$k_1(x) = \int_0^x k(t)\, dt = O\left(x^{\frac{1}{2}}\right) \qquad \text{pour tout } x > 0.$$

Alors si $F(x, y)$ est homogène et de degré -1 et a des dérivées premières continues sauf à l'origine, $F(x, y)$ est self-réciproque, l'intégrale étant prise au sens de valeur principale de Cauchy.

D'autres conditions peuvent être imposées à $k_1(x)$ et à $F(x, y)$.

Ceci permet de calculer certaines intégrales ; par exemple :

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos ax \cos by \, dx \, dy}{(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{2(\alpha b^2 + 2\beta ba + \gamma a^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(xy)^{\frac{1}{2}} J_\nu(ax) J_\nu(by)}{x+y} \, dx \, dy = \frac{1}{a+b}.$$

CHAPITRE II.

Transformation de Fourier.

1. Définition. — Soit la fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L_1$ sur l'espace $E_n(-\infty < x_k < +\infty ; \; k = 1, 2, \ldots, n)$ c'est-à-dire que F est mesurable et

$$\int_{E_n} |F(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \, dV_x < M.$$

On notera fréquemment

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x).$$

Soit

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^\infty \cdots \int_{-\infty}^\infty F(x_1, \ldots, x_n) \, e^{i\sum_1^n x_j \alpha_j} \, dx_1 \ldots dx_n$$

ou

$$f(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{E_n} F(x) \, e^{i\alpha x} \, dV_x.$$

$f(\alpha)$ est appelée la transformée de Fourier de $F(x)$ sur E_n. On notera $\mathcal{F}[F(x)] = f(\alpha)$ et lorsque d'autres paramètres ou variables interviendront, nous indiquerons en indice celles par rapport auxquelles on fait la transformation ; par exemple :

$$\mathcal{F}_{x_1, \ldots, x_n}[F(x, \xi)] = f(\alpha, \xi).$$

D'après les hypothèses faites sur $F(x)$, on a

$$|f(\alpha)| < \int_{E_n} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} |F(x)| . |e^{i\alpha x}| \, dV_x < \frac{M}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}.$$

Donc $f(\alpha)$ existe et est bornée pour tout α. En outre $f(\alpha)$ tend vers zéro quand $\sum_1^n \alpha_k^2 \to \infty$.

Pour le démontrer, remarquons tout d'abord que si

$$F(x) = \prod_1^n F_k(x_k),$$

alors

$$f(\alpha) = \prod_1^n f_k(\alpha_k), \qquad \text{avec} \quad f_k(\alpha_k) = \mathcal{F}_{x_k}[F_k(x_k)],$$

l'intégrale multiple se ramenant alors au produit de n intégrales.

Considérons la plus simple des fonctions en escalier :

$$\begin{aligned} G(x) &= 1 \quad \text{pour} \quad a_i \leq x_i \leq b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ G(x) &= 0 \quad \text{pour} \quad x_i < a_i \quad \text{ou} \quad x_i > b_i. \end{aligned}$$

Pour cette fonction, on a

$$\mathcal{F}[G(x)] = g(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{a_1}^{b_1} e^{i\alpha_1 x_1} \, dx_1 \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_n}^{b_n} e^{i\alpha_n x_n} \, dx_n.$$

A cette fonction nous pouvons appliquer le théorème de Riemann-Lebesgue pour une variable, chaque facteur est borné et $g(\alpha) \to 0$ quand $\sum_1^n \alpha_k^2 \to \infty$ car au moins un des facteurs tend vers zéro. La convergence est uniforme en α, donc cette propriété s'étend à toutes les fonctions de cette forme $\in L_1$ sur E_n et toute fonction $\in L_1$ sur cet espace pouvant être considérée comme limite d'une suite de fonctions en escalier (théorème sur les limites), toute transformée de Fourier tend donc vers zéro quand $\sum_1^n \alpha_k^2 \to \infty$ ([5]).

2. Propriétés de cette transformation. — Nous les déduisons de celles de la transformation à une variable. Si

$$\mathcal{F}[F(x_1, \ldots, x_n)] = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

$$(2.1) \qquad \mathcal{F}[F(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)] = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, e^{-i\sum_1^n \alpha_j y_j},$$

$$(2.2) \qquad \mathcal{F}\left[F(x_1, \ldots, x_n)\, e^{i\sum_1^n h_j x_j}\right] = f(\alpha_1+h_1, \ldots, \alpha_n+h_n),$$

$$(2.3) \qquad \mathcal{F}[F(x_1, \ldots, x_n)\, ix_j] = \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

$$(2.4) \qquad \mathcal{F}\left[\frac{\partial F}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n)\right] = -i\alpha_j f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

si $F(x_1, \ldots, x_n) \to 0$ quand $|x_j|$ tend vers l'infini.

En particulier

$$(2.5) \qquad \mathcal{F}_{x,y}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right] = -(\xi^2+\eta^2) f(\xi, \eta),$$

$F(x)$ et $f(\alpha)$ appartenant toutes deux à L_1, nous pouvons appliquer la formule (1.3) :

$$(2.6) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{E_n} F(x)\, g(x)\, dV_x = \int_{E_n} G(x) f(x)\, dV_x \\ \text{si} \quad \mathcal{F}[F(x)] = f(\alpha) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}[G(x)] = g(\alpha). \end{cases}$$

Produit de composition $F(x)$ et $G(x) \in L_1$:

$$H(x) = \int_{E_n} F(x-y)\, G(y)\, dV_y$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} F(x_1-y_1, \ldots, x_n-y_n)\, G(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \ldots dy_n$$

existe presque partout sur E_n et y appartient également à L_1. On a

$$(2.7) \qquad H(x) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} f(\alpha)\, g(\alpha),$$

la démonstration étant exactement la même que pour une variable, et le théorème de Fubini étant nécessaire pour légitimer le changement d'ordre des intégrations.

3. Inversion de la transformation. — Notons simplement que si la fonction $F(x) = \prod_1^n F_k(x_k)$, la formule d'inversion se déduit immédiatement de celle à une variable. $F_k(x_k)$ étant supposée appartenir à L_1 sur $(-\infty < x_k < +\infty)$, alors

$$F_k(x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(\alpha_k)^{i\alpha_k x_k} \, d\alpha_k$$

et

$$F(x) = \prod_1^n F_k(x_k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_1^n f_k(\alpha_k) \, e^{-i\sum_1^n \alpha_k x_k} \, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n,$$

d'où

$$F(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{E_n} f(\alpha) \, e^{-i\alpha x} \, dV_\alpha. \tag{2.8}$$

Par le procédé des limites indiqué précédemment nous pouvons généraliser cette formule à toute fonction $\in L_1$ sur E_n.

En se ramenant également au cas d'une variable, on démontre que si $F(x) \in L_1$ et $f(\alpha) \equiv 0$ alors $F(x) = 0$ presque partout, c'est-à-dire sauf peut-être sur un ensemble de mesure nulle.

4. **Formule de Parseval.** — Soient $F(x)$ et $G(x)$ bornées et $F(x) \in L_1$; le théorème du produit de composition nous donne

$$\mathcal{F}\left[\int_{E_n} F(x-y)\, G(y)\, dy_1 \ldots dy_n\right] = f(\alpha)\, g(\alpha)\, (2\pi)^{\frac{n}{2}},$$

d'où d'après la formule d'inversion

$$\int_{E_n} F(x-y)\, G(y)\, dy_1 \ldots dy_n = \int_{E_n} f(\alpha)\, g(\alpha)\, e^{-i\sum_1^n \alpha_j x} \, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n$$

en tout point $x \in E_n$. En particulier pour $x \equiv 0$, c'est-à-dire $x_1 = \ldots = x_n = 0$:

$$\int_{E_n} F(-y)\, G(y)\, dy_1 \ldots dy_n = \int_{E_n} f(\alpha)\, g(\alpha)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n. \tag{2.9}$$

Remplaçons $F(-y)$ par $\overline{F(y)}$, imaginaire conjuguée de $F(y)$, alors $f(\alpha)$ est remplacée par $\overline{f(\alpha)}$, imaginaire conjuguée de $f(\alpha)$ et la formule devient

$$\int_{E_n} \overline{F(y)}\, G(y)\, dy_1 \ldots dy_n = \int_{E_n} \overline{f(\alpha)}\, g(\alpha)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n \tag{2.10}$$

et si $F(x) \equiv G(x)$:

$$(2.11) \qquad \int_{E_n} \overline{F(y)}\, F(y)\, dy_1 \ldots dy_n = \int_{E_n} \overline{f(\alpha)}\, f(\alpha)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n.$$

Si l'on pose

$$\overline{F(y)}\, F(y) = \| F(y) \|^2,$$

la formule de Parseval s'écrit sous la forme

$$(2.12) \qquad \int_{E_n} \| F(y) \|^2\, dy_1 \ldots dy_n = \int_{E_n} \| f(\alpha) \|^2\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n,$$

Si $F(y)$ est à valeurs réelles sur E_n, on a à intégrer le carré de $F(y)$. On a supposé pour définir la transformation que $F(x) \in L_1$. Supposons en outre qu'elle est bornée : $| F(x) | < C$; on a alors

$$\int_{E_n} [F(x)]^2\, dV_x < C \int_{E_n} [F(x)]\, dV_x < CM.$$

Donc l'intégrale à gauche de (2.11) existe.

Si $\int_{E_n} [F(x)]^2\, dV_x < \text{Cte}$, on dit que $F(x) \in L_2$ sur E_n. Nous voyons donc qu'une fonction bornée $\in L_1$ appartient à L_2 ; nous pourrons étendre (2.11) à toute fonction $\in L_2$, à condition de donner une nouvelle définition de la transformation de Fourier, puisque l'intégrale de définition n'existe pas pour toute fonction $\in L_2$. On définit alors $f(\alpha)$ transformée de $F(x)$ par

$$(2.13) \qquad f(\alpha) = \text{l. i. m.} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, e^{i\sum x_j \alpha_j}\, dx_1 \ldots dx_n,$$

l. i. m. (limite en moyenne, de l'expression anglaise « limit in mean ») signifie que : étant donnée une suite de fonctions $G_k(x)$:

$$\text{l. i. m. } G_k(x) = G(x) \quad \text{quand } k \to \infty,$$

si

$$\left[\int_{E_n} [G_k(x) - G(x)]^2\, dx_1 \ldots dx_n \right]^{\frac{1}{2}} \to 0,$$

G_k et G sont supposées à valeurs réelles, sinon on remplacerait le carré par le produit de la fonction et de son imaginaire conjuguée.

Nous avons une généralisation de la théorie de Plancherel pour une variable.

Pour l'inversion de la transformation, nous aurons

$$(2.14) \qquad F(x_1, \ldots, x_n) \doteq \text{l. i. m.} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{E_n} f(y)\, e^{-i\sum x_j \alpha_j}\, dV.$$

5. **Sommation de Gauss.** — En étudiant ce mode de sommation. nous allons donner une autre formule d'inversion.

Soit

$$S_R(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{E_n} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, e^{-i\sum \alpha_j x_j}\, e^{-\frac{\sum \alpha_j^2}{R^2}}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n.$$

Nous allons montrer que quand $R \to \infty$, $S_R(x) - F(x) \to \infty$:

$$\mathcal{F}_y[F(x+y)] = f(\alpha)\, e^{-i\alpha x} \quad \text{d'après (2.1)},$$

$$\mathcal{F}_x\left[e^{\frac{-\sum x_j^2}{R^2}}\right] = R^{n-\frac{n}{2}}\, 2^{-\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{R^2\left(\sum \alpha_j^2\right)}{4}}$$

D'où d'après la formule (2.6), nous avons

$$S_R(x) = \frac{2^{-\frac{n}{2}} R^n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{E_n} F(x+y)\, e^{-\frac{R^2\left(\sum y_j^2\right)}{4}}\, dy_1 \ldots dy_n.$$

Ainsi

$$S_R(x) - F(x) = \frac{R^n}{(2^n \pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{E_n} [F(x+y) - F(x)]\, e^{-\frac{R^2\left(\sum y_j^2\right)}{4}}\, dy_1 \ldots dy_n.$$

Pour intégrer sur E_n nous pouvons d'abord intégrer dans une hypersphère de rayon t puis faire varier t de zéro à l'infini, d'où en posant $y = tz$:

$$\int_{E_n} G(y)\, e^{-\frac{R^2\left(\sum y_j^2\right)}{4}}\, dy_1 \ldots dy_n = \int_0^\infty \int_{\sum z_j^2 = 1} e^{-\frac{R^2 t^2}{4}}\, G(tz)\, \Omega_{n-1}(t)\, dt\, d\sigma,$$

$\Omega_{n=1}(t)$ représente un volume dans l'espace E_{n-1} donc est homogène de degré $n-1$:

$$\Omega_{n-1}(t) = \omega(n-1)\, t^{n-1}.$$

Pour calculer la constante $\omega(n-1)$, faisons $G=1$; nous avons alors

$$\int_{E_n} e^{-\frac{R^2\left(\sum y_j^2\right)}{4}} dy_1\ldots dy_n = \frac{(2\sqrt{\pi})^n}{R^n} = \omega(n-1)\int_0^\infty e^{-\frac{R^2t^2}{4}} t^{n-1}\,dt,$$

d'où

$$\omega(n-1) = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \tag{2.15}$$

On peut donc écrire

$$S_R(x) - F(x) = \frac{R^n}{(2\sqrt{\pi})^n}\int_0^\infty e^{-\frac{R^2t^2}{4}} G_x(t)\,dt,$$

avec

$$g_x(t) = t^{n-1}[F_x(t) - F(x)] \qquad \text{et} \qquad F_x(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(2\sqrt{\pi})^n}\int_\sigma F(ty+x)\,d\sigma_y.$$

Si $F(x)\in L_1$, on montre que $S_R(x) - F(x)$ tend vers zéro quand $R\to\infty$; pour cela il suffit que $\int_0^t g_x(t) = o(t^n)$ quand $t=0$. La démonstration est exactement la même que pour une variable.

Nous avons donc le théorème d'inversion

$$\lim_{R\to\infty}\int_{E_n} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, e^{-i\sum\alpha_j x_j}\, e^{-\frac{\sum\alpha_j^2}{R^2}}\, d\alpha_1\ldots d\alpha_n = F(x) \quad \text{presque partout.}$$

Si $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\in L_1$ on peut passer à la limite sous le signe intégrale et nous retrouvons la formule (2.8).

Si nous supposons en outre que $F(x)$ est continue, nous avons

$$F(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{E_n} f(\alpha)\, e^{-i\alpha x}\, d\alpha_1\ldots d\alpha_n \quad \text{partout,}$$

cette intégrale représentant une fonction continue.

6. **Cas particulier des fonctions radiales.** — Nous appelons fonctions radiales les fonctions $F(x_1, \ldots, x_n)$ qui ne dépendent que de $[x_1^2+\ldots+x_n^2]^{\frac{1}{2}} = r$, expression que nous pouvons interpréter comme la distance euclidienne du point $x\in E_n$ à l'origine.

Nous allons montrer que la transformée de Fourier d'une telle fonction est aussi une fonction radiale et la calculer.

Considérons la transformation orthogonale

$$y_s = \sum_{j=1}^{n} b_{sj} x_j,$$

telle que son déterminant soit égal à 1 et telle que

$$\sum_1^n \alpha_j x_j = \left(\sum \alpha_j^2\right) y_1.$$

Nous avons alors

$$\sum_1^n x_j^2 = \sum_1^n y_s^2.$$

Soit $f(\alpha)$ la transformée de Fourier de $F(x) = \Phi(r)$. D'après les relations ci-dessus :

$$f(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{E_n} \Phi(r)\, e^{i\left(\sum \alpha_j^2\right) y_1}\, dy_1 \ldots dy_n.$$

Donc $f(\alpha)$ ne dépend que de $\sum \alpha_j^2 = \rho^2$, c'est-à-dire est une fonction radiale $\varphi(\rho)$. On a en outre, en séparant l'intégration par rapport à y_1 :

$$\varphi(\rho) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\rho y_1}\, dy_1 \int_{E_{n-1}} \Phi\left(\sqrt{y_1^2 + z^2}\right) dV_z.$$

Comme pour le calcul fait au paragraphe précédent :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\sqrt{y_1^2 + z^2}\right) dV_z = \int_0^{\infty} \Phi\left(\sqrt{y_1^2 + t^2}\right) \Omega_{n-2}(t)\, dt.$$

En remplaçant dans (2.15) n par $n-1$, nous avons

$$\varphi(\rho) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1} \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\rho y_1}\, dy_1 \int_0^{\infty} \Phi\left(\sqrt{y_1^2 + t^2}\right) t^{n-2}\, dt.$$

Passons en coordonnées polaires, en posant $z = r \sin\varphi$, $y = r\cos\varphi$:

$$\varphi(\rho) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1} \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^{\infty} \Phi(r)\, r^{n-1}\, dr \int_0^{\pi} e^{i\rho r\cos\varphi} \sin^{n-2}\varphi\, d\varphi,$$

or, cette dernière intégrale n'est autre que

$$\sqrt{\pi}\left(\frac{\rho r}{2}\right)^{1-\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)J_{\frac{n}{2}-1}(\rho r),$$

donc

$$\rho^{\frac{n}{2}-1}\varphi(\rho)=\int_0^\infty r^{\frac{n}{2}-1}\Phi(r)\,r\,J_{\frac{n}{2}-1}(\rho r)\,dr,$$

c'est-à-dire que

$$\rho^{\frac{n}{2}-1}\varphi(\rho)=\mathcal{H}_{\frac{n}{2}-1}\left[r^{\frac{n}{2}-1}\Phi(r)\right],$$

le symbole $\mathcal{H}_{\frac{n}{2}-1}$ signifiant transformée de Hankel d'ordre $\frac{n}{2}-1$. Nous voyons donc que la transformation de Fourier de fonction de n variables ne dépendant que $\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$ se ramène à la transformation de Hankel de fonction d'une variable, l'ordre de la transformation étant un entier ou un entier $+\frac{1}{2}$. Réciproquement de telles transformations de Hankel se ramènent à une transformation de Fourier. Dans la pratique, en dehors des fonctions d'Airy qui font intervenir des fonctions de Bessel d'ordre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, on n'a rencontré que des fonctions de Bessel d'ordre un multiple de $\frac{1}{2}$.

Pour $n=2$, on a

$$\varphi(\rho)=\int_0^\infty r\Phi(r)\,J_0(r\rho)\,dr.$$

Pour $n=1$,

$$J_{-\frac{1}{2}}(t)=\left(\frac{2}{\pi t}\right)^{\frac{1}{2}}\cos t. \qquad \text{d'où} \qquad \varphi(\rho)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \Phi(r)\cos\rho r\,dr.$$

En utilisant la formule

$$J_p(\rho r)\,\rho^{-p}=\left(\frac{-2}{r}\right)^m\frac{d^m}{ds^m}\left[\frac{J_{p-m}(r\sqrt{s})}{s^{\frac{p-m}{2}}}\right], \qquad \text{avec} \quad s=\rho^2,$$

on peut toujours se ramener aux deux cas précédents :
si $n=2m+2$:

$$\varphi(\rho)=(-1)^m\,2^m\frac{d^m}{ds^m}\int_0^\infty \Phi(r)\,r\,J_0(r\sqrt{s})\,dr;$$

si $n = 2m + 1$:

$$\varphi(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(-1)^m 2^{m+\frac{1}{2}} \frac{d^m}{ds^m} \int_0^\infty \Phi(r) \cos(r\sqrt{s})\, dr.$$

Dans la transformation de Fourier des fonctions $\in L_2$ nous avons quelque chose d'analogue, en tenant compte toutefois de ce que $F(x) \in L_2$ si et seulement si $\Phi(r)\, r^{n-1} \in L_2$ sur $(0 \leq r \leq \infty)$. Nous aurons ainsi

$$\tilde{\varphi}(\rho) = \varphi(\rho)\, \rho^{n-1} = \text{l. i. m.} \int_0^\infty \frac{\tilde{\Phi}(r)}{(\rho r)^{\frac{n-2}{2}}} J_{\frac{n}{2}-1}(\rho r)\, dr,$$

$$\tilde{\Phi}(r) = \Phi(r)\, r^{n-1}.$$

CHAPITRE III.

Transformation de Mellin.

Applications a la résolution d'équations intégrales et a l'étude des fonctions réciproques.

1. **Définition.** — Soit $F(x, y)$ une fonction des variables réelles x, y à valeurs réelles, définies dans le premier quadrant Q. Si dans un domaine des plans complexes (s) et (t) l'intégrale double

$$f(s, t) = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{s-1} y^{t-1} F(x, y)\, dx\, dy \tag{3.1}$$

existe, on dit que sa valeur $f(s, t)$ est la transformée de Mellin de $F(x, y)$ et l'on note

$$\mathfrak{M}[F(x, y)] = f(s, t).$$

Rappelons que si $f(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty F(x)\, e^{i\alpha x}\, dx$, en posant $e^x = \xi$ et $s = c + i\alpha$, nous avons

$$\left(\frac{s-c}{i}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \xi^{s-c} F(\log \xi) \frac{d\xi}{\xi},$$

d'où

$$g(s) = \int_0^\infty \xi^{s-1} G(\xi)\, d\xi.$$

De la même manière nous pouvons passer de la transformation de Fourier à deux variables à la transformation de Mellin à deux variables.

2. Convergence. — *a*. On suppose l'intégrale absolument convergente pour les valeurs s_0 et t_0 des variables s et t. En général elle sera absolument convergente dans des bandes des plans (s) et (t) :

$$\alpha_1 < \mathrm{R}s_0 = \alpha < \alpha_2, \qquad \gamma_1 < \mathrm{R}t = \gamma < \gamma_2 \qquad \text{et} \qquad \alpha_1 < \mathrm{R}s_0 < \alpha_2, \qquad \gamma_1 < \mathrm{R}t_0 < \gamma_2.$$

Pour le démontrer il suffit de partager l'intégrale en quatre morceaux par les points $x = 1$ et $y = 1$ et d'utiliser les inégalités

$$|x^{s-1}| < |x^{s_0-1}| \quad \text{si } 0 < x < 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{R}s > \mathrm{R}s_0$$

et le résulat opposé pour $x > 1$. Si en outre les intégrales simples

$$\int_0^\infty x^{s-1}\mathrm{F}(x, y)\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_0^\infty y^{t-1}\mathrm{F}(x, y)\,dy$$

convergent absolument, la première pour $\alpha_1 < \mathrm{R}s < \alpha_2$ et pour tout $y > 0$, la deuxième pour $\gamma_1 < \mathrm{R}t < \gamma_2$ pour tout $x > 0$, alors l'intégrale double est égale aux intégrales répétées et les propriétés seront déduites aisément de celles de la transformation à une variable.

b. Si l'intégrale double ne converge pas absolument, nous considérerons soit l'intégrale

$$\lim \int_{\varepsilon_1}^{\mathrm{X}} \int_{\varepsilon_2}^{\mathrm{Y}} x^{s-1} y^{t-1} \mathrm{F}(x, y)\,dx\,dy$$

quand X et Y tendent vers l'infini et ε_1 et ε_2 tendent vers zéro, indépendamment et simultanément, ou sa valeur principale

$$\lim_{\mathrm{X}\to\infty} \int_{\frac{1}{\mathrm{X}}}^{\mathrm{X}} dx \lim_{\mathrm{Y}\to\infty} \int_{\frac{1}{\mathrm{Y}}}^{\mathrm{Y}} x^{s-1} y^{t-1} \mathrm{F}(x, y)\,dx\,dy.$$

3. Inversion. — Pour la transformation à une variable, une solution de l'équation intégrale

$$f(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\mathrm{F}(x)\,dx \qquad \text{est} \quad \mathrm{F}(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} f(s)\,ds$$

en un point de continuité de $\mathrm{F}(x)$.

Étudions l'intégrale double

$$I = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} x^{-s} y^{-t} f(s, t)\, ds\, dt,$$

en posant $s = \alpha + i\beta$ et $t = \gamma + i\delta$, elle s'écrit

$$I = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^{-(\alpha+i\beta)-(\gamma+i\delta)} f(\alpha + i\beta, \gamma + i\delta)\, d\beta\, d\delta.$$

Posons $x = e^{\xi}$ et $y = e^{\eta}$ et remplaçons $f(s, t)$ par sa valeur

$$I = \frac{e^{-\xi\alpha-\eta\gamma}}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi\beta-i\eta\delta}\, d\beta\, d\delta \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu\beta+iv\delta} [e^{u\alpha+v\gamma} F(e^{u}, e^{v})]\, du\, dv.$$

Si $e^{u\alpha+v\gamma} F(e^{u}, e^{v})$ satisfait aux conditions de Fourier, alors aux points de continuité de la fonction, nous aurons

$$I = F(x, y).$$

Donc en particulier si $x^{s-1} y^{t-1} F(x, y) \in L_1$ pour x et $y > 0$, s et t dans deux bandes verticales de leurs plans respectifs

$$f(s, t) = \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} x^{s-1} y^{t-1} F(x, y)\, dx\, dy$$

a pour solution $F(x, y)$, fonction continue de x et de y :

$$(3.2) \qquad F(x, y) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} x^{-s} y^{-t} f(s, t)\, ds\, dt,$$

indépendante de α et γ avec $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$.

Si nous considérons l'intégrale au sens de Riemann, Reed [26] montre que les hypothèses peuvent être :

— $x^{s-1} y^{t-1} F(x, y)$ absolument intégrable sur le premier quadrant Q;

— $F(x, y)$ ne présentant que des discontinuités de première espèce en des points isolés ou le long de courbes régulières [$F(x, y)$ « piecewise continuous »] et l'intégrale donnant $F(x, y)$ est prise au sens de la valeur principale de Cauchy.

4. Propriétés d'holomorphie. — Lorsqu'elle existe pour s et t

compris dans les deux bandes définies précédemment, $f(s, t)$ y est une fonction holomorphe des deux variables.

En outre, en posant $x = e^\xi$ et $y = e^\eta$, on voit, d'après les propriétés de l'intégrale de Fourier, que

$$f(\alpha + i\beta, \gamma + i\delta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\xi\beta+\eta\delta)}\left[F(e^\xi, e^\eta)\, e^{\xi\alpha+\eta\gamma}\right] d\xi\, d\eta$$

est bornée et limite de $|f(\alpha + i\beta, \gamma + i\delta)| = 0$ quand $\sqrt{\beta^2+\delta^2}$ tend vers l'infini

5. **Représentabilité d'une fonction $f(s, t)$ comme transformée de Mellin.** — Supposons que $f(s, t)$ soit une fonction holomorphe de s et t pour $\alpha_1 < \alpha = \mathrm{R}s < \alpha_2$, $\gamma_1 < \mathrm{R}t = \gamma < \gamma_2$, qu'elle soit bornée et tende vers zéro quand $\sqrt{\beta^2+\delta^2}$ tend vers l'infini,

$$\beta = \mathcal{I}\, s \qquad \text{et} \qquad \delta = \mathcal{I}\, t.$$

Posons

$$F(x, y) = \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} x^{-s} y^{-t} f(s, t)\, ds\, dt$$

et calculons

$$I = \int_0^\infty\int_0^\infty x^{s-1} y^{t-1} F(x, y)\, dx\, dy.$$

Nous décomposons l'intégration par rapport à x et à y en quatre morceaux par les points $x = 1$ et $y = 1$ et nous intégrons dans les plans (s) et (t) sur des verticales convenablement choisies. Par exemple une de ces intégrales est

$$\begin{aligned} I_1 = & \int_0^1\int_0^1 x^{s-1} y^{t-1}\, dx\, dy \frac{1}{(2i\pi)^2} \\ & \times \int_{\alpha_3-i\infty}^{\alpha_3+i\infty}\int_{\gamma_3-i\infty}^{\gamma_3+i\infty} f(\alpha_3 + i\beta_3, \gamma_3 + i\delta_3)\, x^{-s_3} y^{-t_3}\, ds_3\, dt_3 \end{aligned}$$

avec

$$\alpha_1 < \alpha_3 < \alpha < \alpha_2, \qquad \gamma_1 < \gamma_3 < \gamma < \gamma_2.$$

D'où

$$\begin{aligned} I_1 = & \int_0^1\int_0^1 x^{(s-\alpha_3)-1} y^{(t-\gamma_3)-1}\, dx\, dy \frac{1}{(2\pi)^2} \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^{-i\beta} y^{-i\delta} f(\alpha_3 + i\beta, \gamma_3 + i\delta)\, d\beta\, d\delta \end{aligned}$$

outre les hypothèses déjà faites, si $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha+i\beta,\ \gamma+i\delta)\,d\beta\,d\delta$ est absolument convergente, comme $Rs > \alpha_3$ et $Rt > \gamma_3$, l'intégrale multiple et les intégrales répétées sont absolument convergentes, donc égales :

$$I_1 = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\alpha_3+i\beta,\ \gamma_3+i\delta)\,d\beta\,d\delta}{[s-(\alpha_3+i\beta)][t-(\gamma_3+i\delta)]}$$
$$= \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\alpha_3-i\infty}^{\alpha_3+i\infty}\int_{\gamma_3-i\infty}^{\gamma_3+i\infty}\frac{f(s_3,\ t_3)\,ds_3\,dt_3}{(s-s_3)(t-t_3)}$$

et de même pour les autres parties de l'intégrale.

Si nous appliquons le théorème de Cauchy au domaine constitué par deux rectangles des plans (s) et (t) compris dans les bandes $(\alpha_1,\ \alpha_2)$ et $(\gamma_1,\ \gamma_2)$, nous avons

$$E = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_R\int_{R'}\frac{f(\xi,\ \eta)}{(s-\xi)(t-\eta)}\,d\xi\,d\eta = f(s,\ t).$$

Quand les côtés horizontaux de ces rectangles tendent vers l'infini, les intégrales sur ces côtés tendent vers zéro puisque $f(s,\ t)$ tend vers zéro par hypothèse, et E tend vers 1. Donc à la limite

$$I = f(s,\ t).$$

Nous avons donc le théorème dû à Reed [26] et généralisant un théorème connu à une variable :

Si $f(s,\ t)$ est une fonction holomorphe de s et t dans le domaine $\alpha_1 < Rs < \alpha_2$, $\gamma_1 < Rt < \gamma_2$;

Si $f(s,\ t) \to 0$ quand $\sqrt{\beta^2+\delta^2} \to \infty$, $\beta = \mathfrak{I}s$ et $\delta = \mathfrak{I}t$;

Si $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(\alpha+i\beta,\ \gamma+i\delta)|\,d\beta\,d\delta$ converge absolument;

alors $f(s,\ t)$ est la transformée de Mellin (au sens de valeur principale de l'intégrale) de la fonction

$$F(x,\ y) = \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} x^{-s}y^{-t}f(s,\ t)\,ds\,dt.$$

Les deux premières conditions sont des conditions nécessaires. La troisième est une condition suffisante, et pourrait, peut-être, être remplacée par une autre.

6. Autres propriétés. — *a. Transformées des dérivées de* $F(x, y)$.

$$(3.3)\quad \frac{\partial^{p+q}F(x,y)}{\partial x^p\,\partial y^q} = (-1)^{p+q}(s-1)\ldots(s-p)(t-1)\ldots(t-q)f(s-p,t-q)$$

+ fonction linéaire des images

des dérivées $\dfrac{\partial^{p-\xi+q-\eta}F(x,y)}{\partial x^{p-\xi}\,y^{q-\eta}}$ prises entre o et ∞.

Par exemple :

$$(3.4)\quad \mathfrak{M}\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right] = -(s-1)f(s-1,t) \qquad \text{si} \quad |x^{s-1}F(x,y)|_{x=0}^{\infty} = 0,$$

$$(3.5)\quad \mathfrak{M}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right] = (s-1)(s-2)f(s-2,t)$$

si

$$\left| x^{s-1}\frac{\partial F}{\partial x} - (s-1)x^{s-2}F\right|_{x=0}^{\infty} = 0,$$

$$(3.6)\quad \mathfrak{M}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right] = (s-1)(t-1)f(s-1,t-1)$$

si

$$|x^{s-1}F|_{x=0}^{\infty} = |y^{t-1}F|_{y=0}^{\infty} = 0.$$

b. Soient $\mathfrak{M}[F(x,y)] = f(s,t)$ et $\mathfrak{M}[G(x,y)] = g(s,t)$, les domaines de convergence absolue ayant des parties communes. Formellement nous aurons

$$(3.7)\quad \int_0^\infty\int_0^\infty x^{s-1}y^{t-1}F(x,y)\,G(x,y)\,dx\,dy$$
$$= \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f(s_1,t_1)\,g(s-s_1,t-t_1)\,ds_1\,dt_1.$$

L'absolue convergence de l'intégrale d'inversion de $f(s, t)$ et de l'intégrale de Mellin de $G(x, y)$ suffit à légitimer les changements d'ordre des intégrations.

Nous obtenons ainsi l'image de $F(x, y)\,G(x, y)$. C'est une généralisation du théorème de composition pour les fonctions de variables complexes.

Si nous faisons $s = t = 1$, si ces points sont dans le domaine de convergence, la formule précédente s'exprime alors

$$(3.8)\quad \int_0^\infty\int_0^\infty F(x,y)\,G(x,y)\,dx\,dy$$
$$= \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f(s,t)\,g(1-s,1-t)\,ds\,dt.$$

c. Fonction originale de $f(s, t)\,g(s, t)$. — Formellement, nous aurons d'après (3.2)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f(s, t)\,g(s, t)\,x^{-s}y^{-t}\,ds\,dt\\
&=\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} x^{-s}y^{-t}f(s,t)\,ds\,dt\int_0^\infty\int_0^\infty G(\xi,\eta)\,\xi^{s-1}\eta^{t-1}\,d\xi\,d\eta\\
&=\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_0^\infty\int_0^\infty G(\xi,\eta)\,\xi^{-1}\eta^{-1}\,d\xi\,d\eta\\
&\qquad\times\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f(s, t)\left(\frac{x}{\xi}\right)^{-s}\left(\frac{y}{\eta}\right)^{-t} ds\,dt\\
&=\int_0^\infty\int_0^\infty G(\xi,\eta)\,F\left(\frac{x}{\xi},\frac{y}{\eta}\right)\frac{d\xi}{\xi}\,\frac{d\eta}{\eta}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
(3.9)\qquad f(s, t)\,g(s, t) &= \mathfrak{M}\left[\int_0^\infty\int_0^\infty F\left(\frac{x}{\xi},\frac{y}{\eta}\right)G(\xi,\eta)\frac{d\xi}{\xi}\,\frac{d\eta}{\eta}\right]\\
&= \mathfrak{M}\left[\int_0^\infty\int_0^\infty G\left(\frac{x}{\xi},\frac{y}{\eta}\right)F(\xi,\eta)\frac{d\xi}{\xi}\,\frac{d\eta}{\eta}\right].
\end{aligned}$$

d. Fonction originale de $f(s, t)\,g(1-s, 1-t)$. — On peut la déduire de la précédente en remarquant que

$$f(1-s, t) = \mathfrak{M}\left[\frac{1}{x}F\left(\frac{1}{x}, y\right)\right],$$

d'où

$$(3.10)\quad f(s, t)\,g(1-s, 1-t) = \mathfrak{M}\left[\int_0^\infty\int_0^\infty G(\xi,\eta)\,F(\xi x, \eta y)\,d\xi\,d\eta\right].$$

Notons également la formule

$$(3.11)\qquad \mathfrak{M}\,[F(x, y)\,x^p y^q] = f(s+p, y+q).$$

7. **Exemples.** — Soit la fonction particulière

$$F(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{m+n}\Phi(m, n)\,x^m y^n.$$

(Les fonctions hypergéométriques d'Appel peuvent s'exprimer ainsi.) Calculons

$$\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}\frac{\pi^2}{\sin\pi s\,\sin\pi t}\Phi(s, t)\,x^s y^t\,ds\,dt,$$

Γ_1 étant un rectangle du plan (s) de sommets : $-c+i\mathrm{M}$, $-c-i\mathrm{M}$, $\mathrm{M}+\frac{1}{2}-i\mathrm{M}$, $\mathrm{M}+\frac{1}{2}+i\mathrm{M}$ et Γ_2 un rectangle analogue dans le plan (t). D'après le théorème de Cauchy, cette intégrale est égale à

$$\sum_{m=0}^{\mathrm{M}}\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}(-1)^{m+n}\Phi(m, n)\,x^m y^n.$$

Quand M et N tendent vers l'infini, si Φ est bornée exponentiellement de sorte que les intégrales tendent vers zéro, alors il reste

$$\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{-c_1-i\infty}^{-c_1+i\infty}\int_{-\gamma_1-i\infty}^{-\gamma_1+i\infty}\frac{\pi^2}{\sin\pi s\sin\pi t}\Phi(s, t)\,x^s y^t\,ds\,dt$$
$$=\sum_0^\infty\sum_0^\infty(-1)^{m+n}\Phi(m, n)\,x^m y^n,$$

d'où en changeant s en $-s$ et t en $-t$ et en appliquant le résultat du paragraphe 5 :

$$\mathfrak{M}[\mathrm{F}(x, y)] = \frac{\Phi(-s, -t)}{\sin\pi s\sin\pi t}. \tag{3.12}$$

Ce résultat est une généralisation d'un théorème à une variable de Ramanujan (pour les conditions précises, *voir* [26]). Il nous permet de calculer certaines transformées Mellin. Par exemple :

$$\mathfrak{M}\left[\frac{1}{(1+x)(1+y)-\lambda xy}\right] = \frac{\pi^2}{\sin\pi s\sin\pi t}\mathrm{F}(s, t, -1; \lambda)$$

pour $0 < \mathrm{R}s < 1$, $0 < \mathrm{R}t < 1$, $|\lambda| > 1$; F, fonction hypergéométrique, formule établie différemment par Hardy.

8. Application à la résolution des équations intégrales. — Nous nous bornerons au type

$$f u, v) = \int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{K}(ux, vy)\,\mathrm{F}(x, y)\,dx\,dy \tag{3.13}$$

c'est-à-dire que ceci s'appliquera immédiatement à l'inversion des transformations intégrales que nous étudions.

a. Résolution de l'équation intégrale. — Appliquons la transformation de Mellin aux deux membres.

Soit

$$\mathfrak{M}[f(u, v)] = \varphi(s, t),$$
$$\mathfrak{M}[F(x, y)] = \Phi(s, t) \quad \text{et} \quad \mathfrak{M}[K(x, y)] = \mathcal{K}(s, t).$$

D'après la formule (3.10), (3.13) se transforme

$$\varphi(s, t) = \mathcal{K}(s, t)\,\Phi(1-s, 1-t) \tag{3.14}$$

et en changeant s en $1-s$ et t en $1-t$:

$$\Phi(s, t) = \frac{\varphi(1-s, 1-t)}{\mathcal{K}(1-s, 1-t)}. \tag{3.15}$$

Si cette expression est une transformée de Mellin, nous en déduirons $F(x, y)$ par la formule (3.2).

Si $\dfrac{1}{\mathcal{K}(1-s, 1-t)} = \mathcal{K}_1(s, t)$ est la transformée de Mellin de $K_1(x, y)$ d'après (3.10), nous aurons

$$F(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty K_1(ux, vy) f(u, v)\, du\, dv, \tag{3.16}$$

(3.13) et (3.16) sont des formules dissymétriques.

(3.15) peut aussi s'écrire

$$\Phi(s, t) = \frac{\varphi(1-s, 1-t)\,\mathcal{K}(s, t)}{\mathcal{K}(1-s, 1-t)\,\mathcal{K}(s, t)}. \tag{3.17}$$

A une variable, Fox (*Proc. Amer. Math. Soc.*, t. 7, 1956, p. 401-412) classait les noyaux à partir de la relation fonctionnelle

$$K(s)\,K(1-s) = \frac{1}{P[s(1-s)]} \qquad (\text{P étant un polynome})$$

et donnait les formules d'inversion correspondantes.

Nous pouvons généraliser ici à deux variables cette classification, et à partir de (3.17) donner des formules d'inversion. Aucune étude dans ce sens n'a été faite jusqu'ici.

Un cas particulier intéressant est celui où

$$\mathcal{K}(s, t)\,\mathcal{K}(1-s, 1-t) = 1. \tag{3.18}$$

La formule d'inversion est alors

$$F(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty K(ux, vy) f(u, v)\, du\, dv \tag{3.19}$$

et (3.13) et (3.19) sont symétriques. Nous avons déjà parlé de tels cas [formules (1.4) et (1.5)]. De tels noyaux généralisent les noyaux de Fourier. Outre la relation formelle (3.18) ils doivent satisfaire à certaines conditions permettant de justifier les calculs formels ci-dessus (nous ne connaissons aucun travail sur ce sujet). Il faudra en particulier déterminer les solutions de (3.18) qui sont des transformées de Mellin.

Cas particulier :

$$K(ux, vy) = K_1(ux)\,K_2(vy).$$

La relation (3.18) se sépare :

$$\mathcal{K}_1(s)\,\mathcal{K}_1(1-s) = a, \qquad \mathcal{K}_2(t)\,\mathcal{K}_2(1-t) = \frac{1}{a}.$$

Dans le cas $a = 1$, K_1 et K_2 sont des noyaux de Fourier à une variable, par exemple :

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x, \quad x^{\frac{1}{2}}\,J_\nu(x),$$

$f(u, v)$ et $F(x, y)$ liées par les relations (3.12) et (3.18) sont dites réciproques dans la transformation de noyau $K(x, y)$.

Si nous avons

$$F(u, v) = \int_0^\infty\int_0^\infty K(ux, vy)\,F(x, y)\,dx\,dy, \tag{3.20}$$

$F(x, y)$ est self-réciproque dans cette transformation.

b. Étude des fonctions self-réciproques. — $\Phi(s, t)$ doit satisfaire à la relation fonctionnelle

$$\Phi(s, t) = \Phi(1-s, 1-t)\,\mathcal{K}(s, t). \tag{3.21}$$

De telles fonctions ont été étudiées dans le cas où :

1° $K(ux, vy) = (uxvy)^{\frac{1}{2}}\,J_\nu(ux)\,J_\mu(vy)$ par R. P. Agarwal [1] : En tenant compte de la formule

$$\int_0^\infty \xi^{s-\frac{1}{2}}\,J_\nu(\xi)\,d\xi = 2^{s-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu-s}{2}+\frac{3}{4}\right)},$$

la relation (3.21) s'écrit

$$\Phi(s, t) = 2^{s+t-1}\frac{\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{t+\mu}{2}+\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-s}{2}+\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-t}{2}+\frac{3}{4}\right)}\,\Phi(1-s, 1-t)$$

et en posant

$$\psi(s, t) = \frac{\Phi(s, t)}{2^{\frac{s+t}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu+s}{2}+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+t}{2}+\frac{1}{4}\right)},$$

elle se transforme en la relation fonctionnelle

$$\psi(s, t) = \psi(1-s, 1-t).$$

Il faut donc déterminer les solutions de cette équation telles que $\Phi(s, t)$, qui s'en déduit immédiatement, soit une transformée de Mellin.

Le cas le plus simple est celui de $\Phi(s, t) = \Phi_1(s)\Phi_2(t)$. $F(x, y)$ est alors le produit de deux fonctions self-réciproques dans la transformation de Hankel à une variable. Agarwal donne d'autres exemples.

2° Batnagar [3] considère le cas du noyau

$$\varpi_{\mu,\nu}(ux) = \sqrt{ux}\int_0^\infty J_\nu(t)\, J_\mu\left(\frac{ux}{t}\right)\frac{dt}{t}$$

$$\text{pour} \quad \mu+\frac{1}{2}>0 \quad \text{et} \quad \nu+\frac{1}{2}>0$$

et étudie les fonctions self-réciproques dans la transformation

$$F(u, v) = \int_0^\infty\int_0^\infty \varpi_{\mu_1,\nu_1}(ux)\,\varpi_{\mu_2,\nu_2}(vy)\,F(x, y)\,dx\,dy.$$

Par une double transformation de Mellin, il aboutit également à la relation

$$\psi(s, t) = \psi(1-s, 1-t).$$

CHAPITRE IV.

Transformation de Laplace.

Applications a la résolution d'équations intégrales et a l'étude des fonctions self-réciproques.

1. Définition. — Nous nous bornerons au cas de $n=2$. Pour le cas n quelconque, *voir* [11]. Soient x et y des variables réelles, u, v des variables complexes. Si

$$(4.1) \qquad f(u, v) = \int_0^\infty\int_0^\infty F(x, y)\, e^{-ux-vy}\,dx\,dy$$

existe pour un couple de valeurs (u, v) nous l'appellerons : intégrale de Laplace de $F(x, y)$. Si elle existe pour tout point $(u, v) \in D$, nous dirons que c'est la transformée de Laplace de $F(x, y)$ et nous noterons

$$\mathcal{L}_{I}[F(x, y)] = f(u, v) \qquad \text{ou} \qquad F(x, y) \supset f(u, v)$$

ou s'il est nécessaire de distinguer les variables par rapport auxquelles a lieu la transformation

$$F(x, y) \underset{x}{\supset} \underset{y}{\supset} f(u, v).$$

Nous n'utiliserons pas la transformation de Laplace-Carson qui serait définie par

$$uv \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ux-vy} F(x, y)\, dx\, dy.$$

Si $F(x, y)$ est définie dans le plan entier, on peut considérer la transformation de Laplace bilatérale

$$(4.2) \qquad f(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ux-vy} F(x, y)\, dx\, dy$$

que nous noterons

$$\mathcal{L}_{II}[F(x, y)] = f(u, v).$$

Enfin généralisant la transformation de Laplace étudiée par Widder, nous définirons la transformation de Laplace-Stieltjes d'une fonction $\varphi(x, y)$:

$$(4.3) \qquad f(u, v) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ux-vy}\, d_x\, d_y\, \varphi(x, y) = \mathcal{L}(\varphi;\, u, v)$$

(*voir* appendice II pour la définition de cette intégrale).

Les cas particuliers de cette dernière forme sont très importants. Nous avons :

— l'intégrale de Lebesgue :

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ux-vy} F(x, y)\, dx\, dy$$

si $F(x, y) = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y}$ existe, ou si $\varphi(x, y)$ est absolument continue;

— les séries de Dirichlet :

$$f(u, v) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-p_m u - q_n v} a_{m,n}$$

si $\varphi(x, y)$ est une fonction en escalier.

Signalons aussi que le domaine d'intégration peut être fini :

$$f^*(u, v) = \int_a^b \int_c^d e^{-ux-vy} \mathrm{F}(x, y)\, dx\, dy,$$

transformation étudiée par Picone et Faedo [14].

2. **Convergence.** — *a. Convergence absolue.* — Si l'intégrale (4.1) converge absolument pour un couple (u_0, v_0) elle converge absolument pour tout (u, v) tel que $\mathrm{R}u > \mathrm{R}u_0$ et $\mathrm{R}v > \mathrm{R}v_0$.

On a en effet

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\mathrm{X}} \int_0^{\mathrm{Y}} e^{-ux-vy} \mathrm{F}(x, y)\, dx\, dy\right| &\leq \int_0^{\mathrm{X}} \int_0^{\mathrm{Y}} e^{-x\mathrm{R}u-y\mathrm{R}v} \,|\mathrm{F}(x, y)|\, dx\, dy \\ &\leq \int_0^{\mathrm{X}} \int_0^{\mathrm{Y}} e^{-x\mathrm{R}u_0-y\mathrm{R}v_0} \,|\mathrm{F}(x, y)|\, dx\, dy \\ &\leq \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} |e^{-u_0x-v_0y} \mathrm{F}(x, y)|\, dx\, dy.\end{aligned}$$

Si en outre $\int_0^\infty e^{-ux}\mathrm{F}(x, y)\, dx$ et $\int_0^\infty e^{-vy}\mathrm{F}(x, y)\, dy$ sont absolument convergentes et uniformément par rapport à y ou à x, l'intégrale double est égale aux intégrales répétées et nous sommes ramenés à effectuer successivement une transformation par rapport à x puis à y ou inversement. Si l'on pose

$$\overset{\prime}{\mathrm{F}}(u, y) = \int_0^\infty e^{-ux} \mathrm{F}(x, y)\, dx, \qquad \overset{\prime\prime}{\mathrm{F}}(x, v) = \int_0^\infty e^{-vy} \mathrm{F}(x, y)\, dy,$$

nous aurons

$$\mathrm{F}(x, y) \underset{y}{\supset} \overset{\prime\prime}{\mathrm{F}}(x, v) \underset{x}{\supset} f(u, v) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{F}(x, y) \underset{x}{\supset} \overset{\prime}{\mathrm{F}}(u, y) \underset{y}{\supset} f(u, v).$$

Pour étudier le domaine d'absolue convergence, il suffit de considérer les valeurs réelles de u et de v; on en déduira le domaine tout entier en associant à chaque couple (u, v) un couple de demi-plans $\mathcal{H}_u$ et $\mathcal{H}_v$.

A chaque valeur $u = c$ on peut associer une valeur $v = k$ telle que pour tout couple (c, v_1), $v_1 < k$, il n'y ait pas convergence absolue et pour tout couple (c, v_2), $v_2 > k$, il y ait convergence absolue. On définit ainsi une fonction $k = \lambda(c)$. k et c sont appelées « abscisses associées de convergence absolue ». La courbe $k = \lambda(c)$ dans le plan réel (u, v) est appelée « séparatrice » de convergence absolue. Il existe une valeur minimale de c : c_0 telle que pour $c < c_0$ il ne soit pas possible de déterminer un v pour qu'il y ait convergence absolue pour le couple (c, v). Il y a convergence absolue dans tout angle droit de sommet sur la séparatrice, de côtés dans les demi-plans $u > c$, $v > k$; la convergence sur la séparatrice n'est pas assurée.

Pour l'intégrale de Laplace-Stieltjes nous avons un résultat analogue en supposant $\varphi \in V_0$ et en étudiant la convergence de l'intégrale

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ux-vy}\, d_x d_y\, v(x, y) \qquad (\textit{voir} \text{ appendice II}),$$

$v(x, y)$ étant la variation totale de $\varphi(x, y)$ sur $(0, x; 0, y)$.

D. L. Bernstein [4] détermine les abscisses associées de convergence absolue généralisant les résultats de Widder à une variable. Par exemple, si c et k sont deux nombres positifs, la condition nécessaire et suffisante pour qu'ils soient abscisses associées de convergence absolue est que

$$\overline{\lim_{x+y \to \infty}} \frac{\log v(x, y)}{cx + ky} = 1.$$

En outre on montre que dans le cas de la convergence absolue, $v(x, y)$ est bornée exponentiellement; si en (σ_0, τ_0) il y a convergence absolue, σ_0 et τ_0 étant réels, on a

$$v(x, y) < \mathrm{M}\, e^{\sigma_1 x + \tau_1 y}, \qquad \sigma_1 = \max(0, \sigma_0), \qquad \tau_1 = \max(0, \tau_0).$$

Inversement si $v(x, y)$ est bornée exponentiellement :

$$v(x, y) < \mathrm{M}\, e^{a_0 x + b_0 y} \qquad (a_0 \text{ et } b_0 > 0),$$

l'intégrale (4.3) converge absolument pour tout (u, v) tels que $\mathrm{R}u > a_0$, $\mathrm{R}v > b_0$, et peut être calculée comme une intégrale répétée, car $v'(x, y)$ et $v''(x, y)$, variation totale de $\varphi(x, y)$ sur $(0, x)$ et $(0, y)$ comme fonction de x seul ou de y seul, sont inférieures à $v(x, y)$, donc également bornées exponentiellement et l'intégrale répétée existe au sens précisé dans l'appendice II.

b. Convergence bornée ([2*a*], [4], [8]). — Si la convergence absolue n'est pas assurée, nous considérerons la convergence bornée de l'intégrale (appendice I), c'est-à-dire

$$f(u, v) = \lim f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}; u, v) = \int_0^{\mathrm{X}} \int_0^{\mathrm{Y}} e^{-ux-vy}\, \mathrm{F}(x, y)\, dx\, dy$$

quand X et Y tendent vers l'infini simultanément et indépendamment et

$$|f(X, Y; u, v)| < M.$$

S'il en est ainsi, nous dirons que $F(x, y)$ est transformable en (u, v). Si la limite est uniforme par rapport à tout $(u, v) \in D$ et si M est indépendant de $(u, v) \in D$, nous disons que F est uniformément transformable dans D.

Supposons que F soit transformable en (u_0, v_0) :

$$f(X, Y; u, v) = \int_0^X \int_0^Y e^{-(u-u_0)x-(v-v_0)y} e^{-u_0x-v_0y} F(x, y)\, dx\, dy.$$

Posons

$$u = u_0 + s \qquad \text{et} \qquad v = v_0 + t.$$

En intégrant par parties nous obtenons

$$\begin{aligned} f(X, Y; u, v) = {} & e^{-sX-tY} f(X, Y; u_0, v_0) \\ & + e^{-tY} s \int_0^X e^{-sx} f(x, Y; u_0, v_0)\, dx \\ & + t e^{-sX} \int_0^Y e^{-ty} f(X, y; u_0, v_0)\, dy \\ & + st \int_0^X \int_0^Y e^{-sx-ty} f(x, y; u_0, v_0)\, dx\, dy. \end{aligned}$$

Par hypothèses, $|f(X, Y; u_0, v_0)| < M$; si $\mathrm{R}s$ et $\mathrm{R}t > 0$ alors quand X et Y tendent vers l'infini, les trois premiers termes tendent vers zéro et l'on a

$$f(u, v) = \lim_{X, Y \to \infty} f(X, Y; u, v) = \lim_{X, Y \to \infty} st \int_0^X \int_0^Y e^{-ux-vy} f(x, y; u_0, v_0)\, dx\, dy$$

et cette intégrale est absolument convergente. Nous avons donc une propriété analogue au théorème de Mathias Lerch à une variable.

En outre

$$|f(X, Y; u, v)| < M\left(1 + \frac{|s|}{\mathrm{R}s} + \frac{|t|}{\mathrm{R}t} + \frac{|st|}{\mathrm{R}s\mathrm{R}t}\right).$$

Donc la convergence est bornée dans le domaine D :

$$\mathrm{R}(u - u_0) > 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{R}(v - v_0) > 0.$$

En outre dans le domaine D_1 tel que

$$R(u-u_0) > |u-u_0|\cos\theta, \qquad R(u-u_0) > \delta;$$
$$R(v-v_0) > |v-v_0|\cos\theta, \qquad R(v-v_0) > \delta;$$

on a

$$|f(X, Y; u, v)| < M\left(1+\frac{1}{\cos\theta}\right)^2$$

et

$$|f(X, Y; u, v) - f(u, v)| < \frac{2M}{\cos^2\theta}[e^{-\delta X-\delta Y} + e^{-\delta X} + e^{-\delta Y}],$$

donc la convergence est uniforme.

L'étude du domaine de convergence bornée se fait comme pour la convergence absolue. La convergence absolue entraînant la convergence bornée, le domaine de convergence bornée sera intérieur à celui de convergence absolue. De plus dans tout domaine intérieur au domaine de convergence bornée, il y a convergence uniforme car on peut toujours déterminer θ et δ pour que le domaine considéré soit un domaine D_1.

Utilisant l'intégrale de Lebesgue, Amério [2 *a*] en conclut que, en outre, dans ce domaine, on peut calculer l'intégrale double comme une intégrale répétée. On a

$$f(u, v) = \lim_{Y\to\infty} f(\infty, Y; u, v) = \lim_{X\to\infty} f(X, \infty; u, v),$$

avec

$$f(\infty, Y; u, v) = \int_0^\infty e^{-ux}\,dx \int_0^Y e^{-vy}\,F(x, y)\,dy.$$

En outre, considérant l'intégrale

$$\varphi(x, y) = \int_0^x \int_0^y F(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta$$

si $F(x, y)$ est transformable pour (u_0, v_0) réels :

$$|\varphi(x, y)| < M\,e^{u_1 x+v_1 y}, \qquad u_1 = \max(0, u_0), \qquad v_1 = \max(0, v_0).$$

Il suffit pour le voir de considérer l'intégrale

$$\varphi(x, y) = \int_0^x \int_0^y e^{-u_0\xi-v_0\eta}\,F(\xi, \eta)\,e^{u_0\xi+v_0\eta}\,d\xi\,d\eta$$

et d'intégrer par parties; on majore en remarquant que pour u_0 réel :

$$|u_0| \int_0^X e^{u_0 x}\, dx < e^{u_1 x}, \qquad u_1 = \max(0, u_0).$$

Et inversement si $\varphi(x, y)$ est bornée exponentiellement

$$|\varphi(x, y)| < e^{u_1 x + v_1 y} \qquad (u_1 \text{ et } v_1 \text{ réels et positifs}),$$

on en déduit que (4.1) a une convergence bornée pour $Ru > u_1$ et $Rv > v_1$.

Pour tout ce qui précède, *l'hypothèse* $f(X, Y; u_0, v_0) < M$ *est essentielle.* Il n'y a rien d'analogue pour la convergence ordinaire.

Le théorème de Vignaux [34] n'est qu'un cas particulier de ceci, puisqu'il suppose $\varphi(x, y)$ bornée, c'est-à-dire $u = v = 0$ et qu'il en conclue la convergence bornée de l'intégrale de Laplace pour u et v réels et positifs.

Pour l'intégrale de Laplace-Stieltjes nous avons des résultats analogues dus à D. L. Bernstein [4].

Nous pouvons aussi étudier l'intégrale bilatérale [2a]; nous la considérerons au sens de valeur principale de Cauchy :

$$\begin{aligned} f(u, v) &= \lim_{X, Y \to \infty} \int_{-X}^{X} \int_{-Y}^{Y} e^{-ux-vy} F(x, y)\, dx\, dy \\ &= \lim_{X, Y \to \infty} [f(X, Y; u, v) + f(-X, Y; u, v) \\ &\qquad + f(X, -Y; u, v) + f(-X, -Y; u, v)], \end{aligned}$$

les domaines considérés sont alors $\alpha_1 < Ru < \alpha_2$, $\gamma_1 < Rv < \gamma_2$.

3. **Holomorphie.** — Dans le domaine de convergence bornée D, $f(u, v)$ est une fonction holomorphe des variables complexes u et v. Les dérivées partielles existent avec un ordre quelconque; on démontre que

$$\frac{\partial^{h+k} f(u, v)}{\partial u^h \partial v^k} \in (-1)^{h+k} x^h y^k F(x, y),$$

cette fonction étant transformable dans D.

Considérons deux demi-plans d'holomorphie associés; soit u fixé dans $\mathcal{H}_u$, pour tout v de $\mathcal{H}_v$ $f(u, v)$ est une fonction holomorphe de v et tend vers zéro quand $v \to \infty$ dans le domaine d'uniforme convergence. Même résultat en fixant v et en faisant varier u dans $\mathcal{H}_u$.

Donc une condition nécessaire pour qu'une fonction $f(u, v)$ soit une transformée de Laplace $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}$ est qu'il existe deux demi-plans associés où $f(u, v)$ possède les propriétés ci-dessus.

4. **Propriétés.** — Si nous nous plaçons dans le cas de l'absolue convergence, nous pouvons déduire les propriétés de la transformation de celles de la transformation à une variable.

En cherchant l'originale de $f(a_1 u + a_2 v + a_3,\ b_1 u + b_2 v + b_3)$, nous aurons comme cas particuliers :

le théorème d'homogénéité :

$$f(au, bv) \Subset \frac{1}{ab} \mathrm{F}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right); \tag{4.4}$$

le théorème d'amortissement :

$$f(u + \alpha, v + \beta) \Subset e^{-\alpha x - \beta y} \mathrm{F}(x, y). \tag{4.5}$$

Un *changement d'origine* nous donne

$$\mathrm{F}(x - a, y - b) \Supset e^{-au - bv} f(u, v), \tag{4.6}$$

en supposant, pour la transformation unilatérale, que

$$\mathrm{F}(x - a, y - b) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b.$$

Transformées des dérivées de $\mathrm{F}(x, y)$ *:*

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} \Supset u f(u, v) - \overset{\prime\prime}{\mathrm{F}}(0, v), \qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} \Supset v f(u, v) - \overset{\prime}{\mathrm{F}}(u, 0);\\
&\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2} \Supset u^2 f(u, v) - u \overset{\prime\prime}{\mathrm{F}}(0, v) - \frac{\partial \overset{\prime\prime}{\mathrm{F}}}{\partial x}(0, v),\\
&\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial y^2} \Supset v^2 f(u, v) - v \overset{\prime}{\mathrm{F}}(u, 0) - \frac{\partial \overset{\prime}{\mathrm{F}}}{\partial y}(u, 0);\\
&\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x \partial y} \Supset uv f(u, v) - v \overset{\prime\prime}{\mathrm{F}}(0, v) - u \overset{\prime}{\mathrm{F}}(u, 0) + \mathrm{F}(0, 0);
\end{aligned}\right. \tag{4.7}$$

où

$$\frac{\partial \overset{\prime\prime}{\mathrm{F}}}{\partial x}(0, v) \underset{y}{\subset} \left[\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\right]_{x=0}, \qquad \frac{\partial \overset{\prime}{\mathrm{F}}}{\partial y}(u, 0) \underset{x}{\subset} \left[\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\right]_{y=0}$$

et l'on peut généraliser aisément pour les dérivées d'ordre entier quelconque.

Produit de composition (appendice III) et [2 *a*]. — Nous vérifions aisément que

$$(4.8)\quad \mathcal{L}_{\mathrm{I}}\left[\mathrm{F}_1 \underset{0}{\overset{x}{\bigstar}} \underset{0}{\overset{y}{\bigstar}} \mathrm{F}_2\right] \underset{x}{\supset} \int_0^{y} \mathrm{F}_1(u, \eta)\, \mathrm{F}_2(u, y-\eta)\, d\eta \underset{y}{\supset} f_1(u, v) f_2(u, v).$$

Si F_1 est transformable au point (u, v) et si au même point F_2 est absolument transformable, alors le produit de composition est transformable et (4.8) est vérifiée.

On peut faire le même calcul pour $\mathcal{L}_{\mathrm{II}}$ en considérant le produit de composition de deux fonctions définies dans tout le plan et en supposant alors que F_1 et F_2 sont absolument transformables; le produit est aussi absolument transformable.

Pistoïa étudie le cas de la sommabilité de Cesàro [24 *b*]. Si $e^{-ux-vy}\mathrm{F}_1(x, y)$ est sommable-(C; α_1, α_1), la convergence étant bornée, si $e^{-ux-vy}\mathrm{F}_2(x, y)$ est sommable-(C; α_2, α_2) avec $0 > \alpha_1 > -1$ et $\alpha_2 = -(1+\alpha_1)$ alors le produit de composition est transformable et

$$\mathcal{L}_{\mathrm{I}}\left[\mathrm{F}_1 \underset{0}{\overset{x}{\bigstar}} \underset{0}{\overset{y}{\bigstar}} \mathrm{F}_2\right] = \mathcal{L}_{\mathrm{I}}[\mathrm{F}_1]\,\mathcal{L}_{\mathrm{I}}[\mathrm{F}_2],$$

ceci se déduit immédiatement de la formule (1) (appendice III) et de la relation

$$e^{-ux-vy}\mathrm{F}_1(x, y) \underset{0}{\overset{x}{\bigstar}} \underset{0}{\overset{y}{\bigstar}} e^{-ux-vy}\mathrm{F}_2(x, y) = e^{-ux-vy}\left(\mathrm{F}_1 \underset{0}{\overset{x}{\bigstar}} \underset{0}{\overset{y}{\bigstar}} \mathrm{F}_2.\right).$$

Pour le produit de composition superficiel (appendice III), nous aurons formellement

$$\begin{aligned}
(4.9)\quad & \mathcal{L}_{\mathrm{I}}\left[\mathrm{F}(x, y) \underset{\alpha}{\bigstar} \mathrm{H}(\tau)\right] \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-ux-vy}\, dx\, dy \int_0^{\min\left(\frac{x}{\cos\alpha}, \frac{y}{\sin\alpha}\right)} \mathrm{H}(\tau) \\
&\quad \times \mathrm{F}(x-\tau\cos\alpha, y-\tau\sin\alpha)\, d\tau \\
&= \int_0^{\infty} \mathrm{H}(\tau)\, d\tau \int_{\tau\cos\alpha}^{\infty}\int_{\tau\sin\alpha}^{\infty} e^{-ux-vy}\,\mathrm{F}(x-\tau\cos\alpha, y-\tau\sin\alpha)\, dx\, dy \\
&= \int_0^{\infty} \mathrm{H}(\tau) f(u, v)\, e^{-\tau(u\cos\alpha+v\sin\alpha)}\, d\tau = f(u, v)\, h(u\cos\alpha + v\sin\alpha).
\end{aligned}$$

On justifie le calcul formel en supposant F transformable en (u, v) et H absolument transformable au point $(u\cos\alpha + v\sin\alpha)$.

Nous avons le même résultat pour la transformation $\mathcal{L}_{\text{II}}$ en supposant l'absolue transformabilité des deux fonctions aux points ci-dessus.

Pistoïa étudie également dans ce cas la sommabilité de Cesàro.

Autres propriétés. — Si $f(u, v)$ existe pour u et v réels et positifs, nous pourrons avoir la formule (1.3) :

$$(4.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} F(x, y)\, g(x, y)\, dx\, dy = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(u, v)\, G(u, v)\, du\, dv \\ \quad \text{si} \quad F(x, y) \supset f(u, v) \quad \text{et} \quad G(x, y) \supset g(u, v); \end{array} \right.$$

il faudrait déterminer les conditions précises de cette formule.

5. Inversion. — En général nous appliquerons successivement les formules d'inversion à une variable comme nous l'avons indiqué page 12. Mais ce n'est plus possible lorsque la convergence est bornée, ou si les intégrales à une variable ne sont pas absolument convergentes.

a. Transformation bilatérale. — Soit $F(x, y)$ absolument transformable pour $\alpha_1 < \mathrm{R}u < \alpha_2$, $\gamma_1 < \mathrm{R}v < \gamma_2$. Amério [2 *a*] détermine les conditions restrictives qu'on doit imposer à $F(x, y)$ (conditions d'intégrabilité, de continuité, etc.) afin qu'on ait la relation

$$(4.11) \quad \overline{F}(x, y) = -\frac{\text{V.P.}}{4\pi^2} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{ux+vy} f(u, v)\, du\, dv,$$

avec

$$\overline{F}(x, y) = \frac{1}{4}[F(x+, y+) + F(x-, y+) + F(x+, y-) + F(x-, y-)].$$

Des extensions de ce théorème ont été données par Pistoïa [24 *a*]. Les conditions sont trop longues à énoncer pour que nous les donnions ici.

Le passage à la transformation $\mathcal{L}_{\text{I}}$ n'a pas été fait. Dans le cas d'une variable nous savions qu'une condition suffisante pour que la formule d'inversion de la transformation $\mathcal{L}_{\text{II}}$ soit valable pour $\mathcal{L}_{\text{I}}$ était que : $f(s)$ n'ait pas de points singuliers à droite d'une verticale et que son module tende vers zéro quand $s \to \infty$ dans ce demi-plan. Nous devons avoir des conditions analogues avec les couples de demi-plans d'holomorphie. En fait, si nous sommes assurés que $f(u, v)$ est la transformée de Laplace d'une fonction $F(x, y)$ nulle pour x et $y < 0$, la formule précédente nous fournira cette fonction.

Dans le cas où $F(x, y)$ est transformable, mais non absolument transformable, Amério utilise une formule de sommation différente.

Soit $F(x, y)$ transformable pour $\alpha_1 < Ru < \alpha_2$, $\gamma_1 < Rv < \gamma_2$ et soit deux nombres ρ et $\sigma > 0$ avec

$$\frac{1}{\rho} > |\alpha_1|, \quad \frac{1}{\rho} > |\alpha_2|, \quad \frac{1}{\sigma} > |\gamma_1|, \quad \frac{1}{\sigma} > |\gamma_2|.$$

L'intégrale impropre

$$\frac{1}{4\rho\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-|x-\xi|}{\rho}\,\frac{-|y-\eta|}{\sigma}} F(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta$$

converge vers une fonction $G_{\rho,\sigma}(x, y)$ continue ainsi que ses dérivées partielles $\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}$ au point (x, y) et cette fonction est absolument transformable dans D :

$$\mathcal{L}_{II}[G_{\rho,\sigma}(x, y)] = \frac{f(u, v)}{(1-\rho^2 u^2)(1-\sigma^2 v^2)}.$$

Dans ce cas :

$$(4.12)\quad \overline{F}(x, y) = \lim_{\rho,\sigma \to 0} G_{\rho,\sigma}(x, y)$$
$$= \lim_{\rho,\sigma\to 0} -\frac{\text{V.P.}}{4\pi^2}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{e^{ux+vy} f(u, v)}{(1-\rho^2 u^2)(1-\sigma^2 v^2)}\,du\,dv,$$

ρ et σ tendant vers zéro de sorte que

$$\frac{1}{\theta} < \frac{\rho}{\sigma} < \theta < 1, \quad \alpha_1 < a < \alpha_2, \quad \gamma_1 < b < \gamma_2.$$

b. Transformation de Laplace-Stieltjes. — Si $v(x, y)$ est bornée exponentiellement, cette transformation est absolument convergente et

$$f(u, v) = \int_0^{\infty} e^{-ux}\,d_x k(x, v) \qquad \text{et} \qquad k(x, v) = \int_0^{\infty} e^{-vy}\,d_y\,\varphi(x, y),$$

$k(x, v)$ est à variation bornée dans $(0, x)$ et l'on peut lui appliquer le théorème d'inversion à une variable :

$$\overline{k}(x, v) = \frac{k(x+;\, v) + k(x-;\, v)}{2} = \frac{\text{V.P.}}{2i\pi}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{ux}}{u} f(u, v)\,du,$$

$\varphi(x+, y)$ est à variation bornée dans $(0, y)$ et sa variation totale $v''(x, y)$ est bornée exponentiellement, donc

$$\frac{k(x-;v)+k(x+;v)}{2}=\int_0^{\infty} e^{-vy}\, d_y\, \frac{\varphi(x+,y)+\varphi(x-,y)}{2}$$

converge absolument et, en faisant l'inversion, on a

$$\bar{\varphi}(x, y)=\frac{\text{V.P.}}{2i\pi}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\frac{e^{vy}}{v}\bar{k}(x, v)\, dv,$$

d'où

$$(4.13)\qquad \bar{\varphi}(x, y)=-\frac{\text{V.P.}}{4\pi^2}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\frac{e^{ux+vy}}{uv}f(u, v)\, du\, dv.$$

Supposons que $\varphi(x, y)$ soit bornée exponentiellement, mais non $v(x, y)$; la transformation est convergente, la convergence étant bornée, mais non absolument convergente. Le raisonnement ci-dessus ne s'applique plus. D. L. Bernstein [4] considère alors une généralisation de la notion de dérivées fractionnaires d'une fonction, et pose

$$\bar{\varphi}_{\rho_1,\rho_2}(x, y)=\frac{1}{\Gamma(\rho_1)\Gamma(\rho_2)}\int_0^x\int_0^y(x-\xi)^{\rho_1-1}(y-\eta)^{\rho_2-1}\varphi(x, y)\, dx\, dy$$

pour ρ_1 et $\rho_2 > 0$.

En intégrant par parties nous avons

$$\bar{\varphi}_{\rho_1,\rho_2}(x, y)=\frac{1}{\Gamma(\rho_1+1)\Gamma(\rho_2+1)}\int_0^x\int_0^y(x-\xi)^{\rho_1}(y-\eta)^{\rho_2}\, d_x\, d_y\, \varphi(x, y)$$

qui tend vers $\varphi(x, y)$ si ρ_1 et ρ_2 tendent vers zéro.

Pour le cas ρ_1 et $\rho_2 > 1$ D. L. Bernstein, démontre que si $\varphi(x, y)$ est bornée exponentiellement, on a

$$(4.14)\qquad \bar{\varphi}_{\rho_1,\rho_2}(x, y)=-\frac{\text{V. P.}}{4\pi^2}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\frac{e^{ux+vy}}{u^{\rho_1+1}v^{\rho_2+1}}f(u, v)\, du\, dv.$$

Pour le cas $\rho_1=\rho_2=0$ l'hypothèse ne suffit plus; il faut en outre que la variation totale de $\varphi(x, y)$ comme fonction de x seul (ou de y seul) soit bornée exponentiellement. [D. L. Bernstein signale une erreur dans la démonstration de Durañona y Vedia et Trejo pour le cas $\rho_1=\rho_2=0$, ces auteurs trouvaient que l'hypothèse de $\varphi(x, y)$ bornée exponentiellement suffisait.]

c. Autres formules d'inversion. — D'autres formules peuvent être établies généralisant les formules à une variable. Elles rentrent en particulier dans la méthode des intégrales singulières que nous avons signalée page 12.

A partir d'un opérateur différentiel, on a

$$(4.15)\quad F(x, y) = \lim_{h,k\to\infty} \frac{(-1)^{h+k}}{h!\,k!}\left(\frac{h}{x}\right)^{h+1}\left(\frac{k}{y}\right)^{k+1}\frac{\partial^{h+k} f}{\partial u^h \partial v^k}\left(\frac{h}{x}, \frac{k}{y}\right)$$

généralisant le procédé de Widder.

Amério généralise le procédé de Phragmen :

$$(4.16)\quad \int_0^x \int_0^y F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \lim_{h,k\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{m!\,n!} e^{mhx+nky} f(mh, nk),$$

ici nous avons un exemple de convergence faible.

6. **Unicité et détermination de** $f(u, v)$. — Pour la transformation $\mathcal{L}_{\text{I}}$ Amério démontre que si $F_1(x, y)$ et $F_2(x, y)$ sont transformables pour $\alpha < \mathrm{R}u$ et $\beta < \mathrm{R}v$ et si, dans un tel domaine, leurs transformées sont identiques, alors on a presque partout $F_1 = F_2$, c'est-à-dire qu'elles sont égales en tout point où elles sont continues.

Nous avons une propriété analogue pour la transformation $\mathcal{L}_{\text{II}}$.

Supposons que $f(u, v)$ soit connue en une infinité de points. A une variable, le théorème de Blaschke (toute fonction holomorphe et bornée dans le cercle unité est uniquement déterminée par ses valeurs en une infinité de points tels que la série formée par leurs distances au cercle soit divergente) nous a permis de donner un théorème d'unicité de la transformation de Laplace ([10], p. 11) englobant les cas particuliers déjà connus (par exemple : points alignés en progression arithmétique sur une parallèle à l'axe réel). A l'aide des séries d'interpolation de Walsh nous avons donné un développement en série de $f(s)$ et de $F(x)$ dans certains cas généraux et nous en avons vu une application. A deux variables le problème est beaucoup plus compliqué. Il n'a été généralisé que dans le cas des points en progression arithmétique, par Amério, $F(x, y)$ étant exprimé sous forme de développement en série double de polynomes de Laguerre ou de Legendre. L. Poli et P. Delerue [25] donnent une méthode générale de développement en série double de polynomes orthogonaux, la justification étant aisée lorsqu'on considère des fonctions de carré sommable et la convergence en moyenne.

Par exemple, si nous connaissons $f(u, v)$ aux points $[u_0+(h+1)a, v_0+(k+1)b]$, a et b constantes réelles et positives, h et k parcourant la suite des entiers > 0, $f(u, v)$ est uniquement déterminée. Soit $P_n(x)$ une suite de polynomes orthonormés avec la fonction de poids $\Phi(x)$ donnée, dans l'intervalle $(0, 1)$,

$$(4.17)\quad F(x, y) = e^{u_0 x + v_0 y}\,\Phi(e^{-ax})\,\Phi(e^{-by}) \sum_{m,n=0}^{\infty} A_{mn} P_m(e^{-ax})\, P_n(e^{-by}).$$

7. Propriétés asymptotiques. — *a. Théorèmes abéliens.* — Vignaux démontre [34] que si $\left|\int_0^X \int_0^Y F(x, y)\,dx\,dy\right| < M$ pour tout X et $Y > 0$ et tend vers S quand X et $Y \to \infty$ indépendamment et simultanément alors $F(x, y)$ est transformable pour u et v réels et positifs et

$$f(u, v) \to S \qquad \text{quand } u \text{ et } v \to 0.$$

Une étude de cette propriété a été faite également par Timan [30] dans le cas où la convergence n'est pas bornée et également dans le cas où $F(x, y)$ est sommable-$(C; \alpha, \beta)$.

De même Magnaradze [21] montre que si $\int_0^\infty \int_0^\infty F(x, y)\,dx\,dy$ existe et est égale à S, si

$$s(x, y) = \int_0^x \int_0^y F(x, y)\,dx\,dy$$

est telle que $\frac{s(x, y)}{x}$ et $\frac{s(x, y)}{y} \to 0$ respectivement quand x ou $y \to \infty$, alors $f(u, v) \to S$ pour u et $v \to 0$ de sorte que $0 < \lambda \leqq \frac{u}{v} \leqq \Lambda$.

Ces théorèmes peuvent nous servir à calculer des intégrales, ou encore à donner un sens à des intégrales divergentes en utilisant la sommation d'Abel, dont ces théorèmes ne sont que des théorèmes de « permanence » (« consistency » dit Hardy).

Dans le cas de la transformation absolument convergente appliquons le théorème correspondant à une variable :

Si $\lim\limits_{y \to \infty} F(x, y) = F(x, \infty)$ *existe, alors* $\overset{''}{F}(x, v)$ *existe pour* $Rv > 0$ et

$$\lim_{v=0} v \overset{''}{F}(x, v) = F(x, \infty).$$

Donc

$$F(x, \infty) \underset{x}{\supset} \int_0^\infty e^{-ux} dx \lim_{v=0} v \overset{''}{F}(x, v).$$

Si nous pouvons échanger les signes intégrales et limites, nous aurons

$$F(x, \infty) \underset{x}{\supset} \lim_{v=0} v f(u, v).$$

De même

$$F(\infty, y) \underset{y}{\supset} \lim_{u=0} u f(u, v).$$

Enfin si $F(\infty, \infty)$ *existe,* $f(u, v)$ *existe pour* Ru *et* $Rv > 0$ *et*

$$\lim_{x \to \infty} F(x, \infty) = \lim_{u=0} \lim_{v=0} uv f(u, v) \quad \text{et} \quad \lim_{x, y \to \infty} F(x, y) = \lim_{u=v=0} uv f(u, v),$$

mais il faut légitimer tous ces passages à la limite et l'inversion des opérations intégrales et limites.

b. Les théorèmes taubériens sont particulièrement intéressants pour les applications car ils permettent de déduire des propriétés asymptotiques de $f(u, v)$ celles de $F(x, y)$ sans avoir besoin de faire l'inversion. Deux cas ont été étudiés : x et $y \to \infty$, ou $\frac{x}{y}$ tend vers une valeur finie.

Dans le premier cas, Pistoïa [24 *a*] considérant une fonction $f(u, v)$ holomorphe dans un couple de demi-plans et satisfaisant à certaines conditions de limite quand u et $v \to 0$, détermine la limite de $F(x, y)$ quand x et y tendent vers l'infini. En particulier si l'on peut écrire

$$f(u, v) = \frac{A}{uv} + \omega(u, v),$$

$\omega(u, v)$ satisfaisant à certaines conditions, alors $F(x, y) \to A$ quand x et y tendent vers l'infini.

H. Delange [9] étudie des problèmes semblables, avec des conditions plus simplement exprimées, avec l'hypothèse sur $F(x, y)$ que

$$\bar{\omega}_F(\lambda, \mu) = \operatorname*{Sup}_{x,y>0}\left[\operatorname*{Sup}_{\substack{x\leqq x'\leqq \lambda x\\ y\leqq y'\leqq \mu y}} |F(x', y') - F(x, y)|\right] \quad \text{est bornée,}$$

λ et μ réels > 1 ; dans ce cas $F(x, y)$ est absolument transformable pour $\mathrm{R}u$ et $\mathrm{R}v > 0$.

Dans le deuxième cas, $x \to cy$ ([10], p. 27), considérant la fonction $f(u, v) = \frac{1}{v + \psi(u)}$, $\psi(u)$, fonction holomorphe pour $\mathrm{R}u > 0$ et $\mathrm{R}\,\psi(u) > 0$, si en outre nous supposons que

$$\psi(u) - cu = \varphi(u) \approx \sum_{1}^{\infty} a_n u^{-n} \qquad \text{pour} \quad u \to \infty$$

(le signe $\approx$ signifiant un développement asymptotique au sens de Poincaré), $c > 0$, alors $f(u, v)$ est la transformée de Laplace de $F(x, y)$, fonction-nulle pour $0 < x < cy$ et $F(x, y) \approx \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x - cy)^n$ quand $x \to cy$ par valeurs supérieures. Ceci est particulièrement intéressant pour étudier une onde au voisinage du front d'onde.

On a une propriété analogue si $f(u, v - u)$ possède un développement asymptotique pour $u \to \infty$, les coefficients de ce développement remplissant certaines conditions, alors $F(x, y)$ existe, est une fonction nulle pour $0 < x < y$ et possède un développement asymptotique pour $x \to y$ qui se déduit de celui de $f(u, v - u)$. Le cas précédent est un cas d'exception de celui-ci.

8. Applications. — *a. Généralisation de fonctions.* — Par l'intermédiaire de leurs transformées de Laplace on peut généraliser certaines fonctions. C'est ainsi que P. Humbert a défini les polynomes généralisés d'Abel à deux variables. A une variable, on a

$$L_m(t) \supset \left(1 - \frac{1}{p}\right)^m.$$

A deux variables, nous définirons les polynomes par leur image

$$\left(1 - \frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)^m.$$

Considérant les polynomes généralisés de Laguerre :

$$x^{\alpha} L_m^{\alpha}(x) \supset \frac{\Gamma(m+\alpha+1)}{m!} \frac{1}{p^{\alpha}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{m}.$$

M. P. Delerue [11] définit les polynomes à n variables par l'égalité symbolique

$$x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n} L_m^{\alpha_1\ldots\alpha_n}(x_1, \ldots, x_n) \underbrace{\supset \ldots \supset}_{n} \frac{\Gamma(m+\alpha_1+1)\ldots\Gamma(m+\alpha_n+1)}{(m!)^m p_1^{\alpha_1}\ldots p_n^{\alpha_n}} \times\left(1-\frac{1}{p_1}-\ldots-\frac{1}{p_n}\right)^{m}.$$

Appliquant les règles de la transformation de Laplace à n variables, il étudie les équations aux dérivées partielles auxquelles satisfont ces polynomes, leur fonction génératrice, les relations de récurrence qui les lient et démontre qu'ils forment une suite orthogonale, la fonction de poids étant $e^{-\sum_{1}^{n} x_i}$.

De même il généralise les polynomes d'Hermitte et les étudie. Avec P. Humbert, il généralise aussi la fonction de Mittag-Leffler [17].

Nous ne nous étendrons pas sur ces applications données en particulier dans le fascicule CXXVII de ce même *Mémorial.*

b. Application à la résolution des équations intégrales. — Les applications de la transformation de Laplace à une variable à la résolution des équations intégrales sont dues à M. M. Parodi et ont été généralisées à d'autres transformations par Stankovic. Elles ont été généralisées à plusieurs variables par M. P. Delerue. Citons un exemple :

Si $F(x, y) \Supset f(u, v)$, nous avons la règle opératoire

$$(4.18)\quad x^{\alpha-1} y^{\beta-1} F\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) \Supset \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\frac{\lambda}{u}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\mu}{v}\right)^{\frac{\beta}{2}} \times J_\alpha(2\sqrt{\lambda u})\, J_\beta(2\sqrt{\mu v})\, f(\lambda, \mu)\, d\lambda\, d\mu.$$

Appliquons ceci à l'équation intégrale

$$(4.19)\quad f(u, v)+K\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\frac{\lambda}{u}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\mu}{v}\right)^{\frac{\beta}{2}} \times J_\alpha(2\sqrt{\lambda u})\, J_\beta(2\sqrt{\mu v})\, f(\lambda, \mu)\, d\lambda\, d\mu = g(u, v).$$

Soit

$$f(u, v) \Subset F(x, y), \qquad g(u, v) \Subset G(x, y).$$

Formellement, nous avons

$$F(x, y) + K x^{\alpha-1} y^{\beta-1} F\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) = G(x, y),$$

équation fonctionnelle nous permettant de déterminer $F(x, y)$, d'où $f(u, v)$. En changeant x en $\frac{1}{x}$ et y en $\frac{1}{y}$, nous avons une deuxième relation et nous éliminons $F\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ entre les deux. Nous obtenons

$$(1 - K^2) F(x, y) = G(x, y) - K x^{1-\alpha} y^{1-\beta} G\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right).$$

Pour $K \neq 1$, nous en déduisons

$$f(u, v) = \frac{1}{1 - K^2}\left[g(u, v) - K\int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{\lambda}{u}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\mu}{v}\right)^{\frac{\beta}{2}} \times J_\alpha(2\sqrt{\lambda u})\, J_\beta(2\sqrt{\mu v})\, g(\lambda, \mu)\, d\lambda\, d\mu\right].$$

Pour $K = \pm 1$, il ne peut y avoir de solutions que si le deuxième membre est nul [ce qui donne une relation fonctionnelle pour $G(x, y)$] et il y en a alors une infinité qu'on détermine en généralisant la méthode de M. Parodi.

c. Fonctions réciproques de Hankel. — $f(x, y)$ et $g(x, y)$ sont dites fonctions réciproques de Hankel d'ordre (α, β) si

$$(4.20)\quad f(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{y}{v}\right)^{\frac{\beta}{2}} J_\alpha(2\sqrt{ux})\, J_\beta(2\sqrt{vy})\, g(u, v)\, du\, dv$$

entraine

$$(4.21)\quad g(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{y}{v}\right)^{\frac{\beta}{2}} J_\alpha(2\sqrt{ux})\, J_\beta(2\sqrt{vy})\, f(u, v)\, du\, dv.$$

En prenant les images de ces égalités dans la transformation de Laplace nous obtenons entre les images $\varphi(u, v)$ et $\theta(u, v)$ de $f(x, y)$ et $g(x, y)$ les relations formelles

$$(4.22)\quad \varphi(u, v) = \frac{1}{u^{\alpha+1} v^{\beta+1}}\, \theta\left(\frac{1}{u}, \frac{1}{v}\right),$$

$$(4.23)\quad \theta(u, v) = \frac{1}{u^{\alpha+1} v^{\beta+1}}\, \varphi\left(\frac{1}{u}, \frac{1}{v}\right),$$

la condition de self-réciprocité sera donc

$$\varphi(u, v) = \frac{1}{u^{\alpha+1} v^{\beta+1}} \varphi\left(\frac{1}{u}, \frac{1}{v}\right). \tag{4.24}$$

La solution de cette équation fonctionnelle est

$$\varphi(u, v) = \frac{1}{u^{\alpha+1} v^{\beta+1}} \mathrm{F}(u, v) + \mathrm{F}\left(\frac{1}{u}, \frac{1}{v}\right) \qquad (\mathrm{F}, \text{ fonction arbitraire}).$$

Une autre méthode consiste à prendre les relations originales de (4.20) et (4.21) comme il a été fait pour l'équation intégrale (4.19). Si

$$\frac{g(u, v)}{u^{\alpha} v^{\beta}} \subset k(x, y) \qquad \text{et} \qquad \frac{f(u, v)}{u^{\alpha} v^{\beta}} \subset h(x, y),$$

on obtient

$$h(x, y) = k\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) x^{\alpha-1} y^{\beta-1}.$$

P. Delerue [11] donne de nombreux exemples de fonctions réciproques et self-réciproques déterminées par ces méthodes et discute les conditions de convergence.

L'efficacité de la méthode pour la solution des équations intégrales et pour l'étude des fonctions réciproques tient ici au fait que l'image du noyau $\left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{y}{v}\right)^{\frac{\beta}{2}} \mathrm{J}_{\alpha}(2\sqrt{ux}) \mathrm{J}_{\beta}(2\sqrt{vy})$ introduit des fonctions exponentielles. Ceci vaudra plus généralement si l'image du noyau $\mathrm{K}(\xi, \eta; x, y)$ est de la forme $a(u, v)\, e^{-b(u)\xi - c(v)\eta}$ car alors

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \mathrm{F}(\xi, \eta) \mathrm{K}(\xi, \eta; x, y)\, d\xi\, d\eta$$

$$\supset \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \mathrm{F}(\xi, \eta)\, a(u, v)\, e^{-b(u)\xi - e(v)\eta}\, d\xi\, d\eta = a(u, v) f[b(u), c(v)].$$

A partir de ceci on peut généraliser l'étude faite par M. Parodi sur des noyaux à une variable d'une forme analogue.

d. Dans ce même ordre d'idée, Stankovic cherche *la relation entre la transformation double de Laplace et la transformation généralisée de Hankel* [29].

Soit Φ la fonction de Wright généralisant la fonction de Bessel. Nous écrirons

$$\Phi(z) = \Phi(\mu, \nu; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\mu+\nu k)},$$

étudiée dans les cas $\nu > 0$ et $\mu > 0$; où $0 > \nu > -1$ et μ arbitraire.

Stankovic définit la transformation généralisée de Hankel par

$$(4.25) \qquad \lim_{\xi_0, \eta_0 \to \infty} g(x, y; \xi_0, \eta_0) = \lim \int_0^{\xi_0} \int_0^{\eta_0} \Phi(-\xi x^\nu)\, x^{\mu-1} \times \Phi(-\eta y^\rho)\, y^{\beta-1} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Soit

$$\gamma(u, v) = \mathcal{L}_1[g(x, y; \infty, \infty)] \qquad \text{et} \qquad \varphi(u, v) = \mathcal{L}_1[f(x, y)],$$

$$\mathcal{L}_1[K(x, y; \xi, \eta)] = \frac{1}{u^\mu} \frac{1}{v^\beta} e^{-\frac{\eta}{v^\rho}} e^{-\frac{\xi}{u^\nu}}$$

et ces intégrales sont absolument et uniformément convergentes pour tout (ξ, η) d'un domaine fini $D(0, \xi_0; 0, \eta_0)$. Nous sommes dans le cas signalé ci-dessus. En prenant les images des deux membres nous obtenons formellement

$$(4.26) \qquad \frac{1}{u^\mu} \frac{1}{v^\beta} \varphi\left(\frac{1}{u^\nu}, \frac{1}{v^\rho}\right) = \gamma(u, v),$$

$\mu, \beta, \nu, \rho > 0$; où μ et β arbitraires et $-1 < \frac{\nu}{\rho} < 0$.

Stankovic donne les conditions qu'on doit imposer aux fonctions $f(x, y)$ et $g(x, y)$ pour justifier le calcul, en particulier l'inversion de l'ordre des intégrations et des limites. Il étudie les cas limites

$$\beta = 0 \quad \text{et} \quad \rho = -1; \qquad \mu = 0 \quad \text{et} \quad \nu = -1.$$

Remarquons que P. Delerue avait exprimé l'originale de

$$\frac{1}{u^\mu v^\beta} \varphi\left(\frac{1}{u^m}, \frac{1}{v^n}\right) \qquad (m \text{ et } n \text{ entiers}),$$

à l'aide des fonctions hyperbesséliennes.

Les cas particuliers importants de la fonction Φ sont :

$$\Phi\left(\mu, -\frac{1}{2}; -z\right) = \frac{2^{\mu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{8}} D_{1-2\mu}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\frac{1}{x}\Phi\left(0, -\frac{1}{2}; -\xi x^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{\xi e^{-\frac{\xi^2}{4x}}}{2\sqrt{\pi}\, x^{\frac{3}{2}}} = \psi(\xi, x),$$

$$\Phi(1, m; -z) = {}_0F_m\left(\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}; \frac{-z}{m^n}\right),$$

$$\Phi(\alpha+1, 1; -z) = z^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{z}),$$

cette formule donnant (4.18) a partir de (4.26).

CHAPITRE V.

Transformation de Laplace-Hankel.

1. **Définition** — Soit

$$f_\nu(u, v) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-uxy} J_\nu(vy)\, F(x, y)\, dx\, dy \qquad (\nu \text{ réel}).$$

Si cette intégrale existe pour des valeurs $(u, v) \in D$, nous dirons que $f_\nu(u, v)$ est la transformée de Laplace-Hankel de $F(x, y)$ et nous noterons $f_\nu(u, v) \overset{\nu}{\subset} F(x, y)$.

2. **Convergence.** — *a. Convergence absolue.* — Si v est réel et positif, nous pouvons trouver une constante A_ν telle que

$$|J_\nu(vy)| < A_\nu (vy)^\nu (1+vy)^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}$$

D'où

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |e^{-uxy} J_\nu(vy)\, F(x, y)|\, dx\, dy$$
$$< A_\nu \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x R u_0} v^\nu \left| y^{\nu+1} (1+vy)^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} F(x, y) \right| dx\, dy$$

si $Ru > Ru_0$.

Or

$$\left(\frac{\nu y}{1+\nu y}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} < 1 \qquad \text{pour } \nu > 0 \qquad \text{et} \qquad \nu > -\frac{1}{2}$$

D'où, dans ce cas :

$$\int_0^\infty \int_0^\infty | e^{-ux} y \, J_\nu(\nu y) \, F(x, y) | \, dx \, dy$$
$$< A_\nu \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x R u_0} \left| y^{\frac{1}{2}} \nu^{-\frac{1}{2}} F(x, y) \right| dx \, dy.$$

Donc $f_\nu(u, \nu)$ converge absolument si $\int_0^\infty \int_0^\infty \left| e^{-u_0 x} y^{\frac{1}{2}} F(x, y) \right| dx \, dy$ converge absolument avec $R u > R u_0$, ν réel et positif, $\nu > -\frac{1}{2}$.

b. Convergence au sens de Hardy. — Nous avons démontré [10] que si $\left| \int_0^X \int_0^Y y \, F(x, y) \, dx \, dy \right| < M$ pour tout couple $(x, y) \geqq 0$, $M > 0$ et si $F(x, y)$ garde un signe constant, alors $f_\nu(u, \nu)$ existe pour $R u > 0$, ν réel et positif, $\nu > -\frac{1}{2}$, au sens de

$$\lim_{X, Y \to \infty} \int_0^X \int_0^Y \cdots$$

Pour cela on applique le critère de convergence de Cauchy. La difficulté vient ici de ce que $J_\nu(\nu y)$ décroît en oscillant, alors que dans la transformation double de Laplace $e^{-\nu y}$ tendait vers zéro de façon monotone. L'utilisation du premier théorème de la moyenne nous a imposé l'hypothèse restrictive de « $F(x, y)$ a un signe constant »; c'est cependant une hypothèse assez souvent réalisée en Physique.

3. **Propriétés d'holomorphie. Inversion.** — Nous n'utiliserons que le cas où l'on peut calculer l'intégrale double comme une intégrale répétée, c'est-à-dire effectuer successivement les deux transformations. Notons

$$\Phi_1(u, y) = \int_0^\infty e^{-ux} F(x, y) \, dx \qquad \text{et} \qquad \Phi_2(x, \nu) = \int_0^\infty y \, J_\nu(\nu y) \, F(x, y) \, dy,$$

$\Phi_1(u, y)$ est une fonction holomorphe de la variable u dans le demi-plan $\mathrm{R}u > \mathrm{R}u_0$ où elle existe; il en est de même de $f_\nu(u, v)$: donc cette fonction a des dérivées de tous ordres par rapport à u et l'on a

$$\frac{\partial^p f}{\partial u^p}(u, v) \overset{\nu}{\subseteq} (-x)^p \, \mathrm{F}(x, y) \qquad \text{quel que soit } p \text{ positif.}$$

Pour déterminer $\mathrm{F}(x, y)$ connaissant $f_\nu(u, v)$, nous déterminerons $\Phi_2(x, v)$ par l'inversion de la transformation de Laplace et nous aurons

$$\mathrm{F}(x, y) = \int_0^\infty v \, \mathrm{J}_\nu(vy) \, \Phi_2(x, v) \, dv.$$

Nous voyons qu'une condition nécessaire pour que $f(u, v)$ soit la transformée de $\mathrm{F}(x, y)$ est que ce soit une fonction holomorphe de u dans un demi-plan $\mathrm{R}u > \alpha$.

4. Autres propriétés :

Homogénéité :

$$\frac{1}{ab^2} \mathrm{F}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) \overset{\nu}{\supseteq} f_\nu(au, bv).$$

Amortissement :

$$e^{-\alpha x} \, \mathrm{F}(x, y) \overset{\nu}{\supseteq} f_\nu(u + \alpha, v).$$

Décalage :

$$\mathrm{F}(x - a, y) \overset{\nu}{\supseteq} e^{-au} f_\nu(u, v) \qquad \text{si} \quad \mathrm{F}(x - a, y) = 0 \qquad \text{pour} \quad 0 < x < a.$$

Ces deux dernières propriétés ne donnant rien de simple dans la transformation de Hankel, nous ne les avons fait porter que sur la variable x.

Transformée des dérivées :

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} \overset{\nu}{\supseteq} u f_\nu(u, v) - \Phi_2(0, v),$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2} \overset{\nu}{\supseteq} u^2 f_\nu(u, v) - u\,\Phi_2(0, v) - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(0, v),$$

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} \overset{\nu}{\supseteq} \frac{\nu - 1}{2\nu} v f_{\nu+1}(u, v) - \frac{\nu + 1}{2\nu} v f_{\nu-1}(u, v), \qquad \alpha + \nu + 1 > 0, \qquad \beta + \frac{1}{2} < 0,$$

en particulier :

$$\frac{\partial F}{\partial y} \overset{1}{\supset\!\!\!\supset} - v f_0(u, v), \qquad \alpha + 2 > 0, \qquad \beta + \frac{1}{2} < 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\nu^2}{y^2} F \overset{\nu}{\supset\!\!\!\supset} - v^2 f_\nu(u, v), \qquad \text{avec} \quad \alpha + \nu > 0, \qquad \beta + \frac{1}{2} < 0,$$

où

$$F(x, y) = O(y^\alpha) \quad \text{pour } y = 0 \qquad \text{et} \qquad O(y^\beta) \quad \text{pour } y \to \infty.$$

Les conditions imposées à α et β ont pour but d'assurer la convergence des intégrales dans la transformation de Hankel et l'annulation de la partie toute intégrée dans l'intégration par parties.

Produit de composition par rapport à x :

1° Si $F(x, y) \underset{x}{\supset} \Phi_1(u, y)$ et $\mathcal{H}_\nu[\Phi_1(u, y)] = f_\nu(u, v)$:

$$G(x, y) \underset{x}{\supset} \Gamma_1(u, y) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{H}_\nu[\Gamma_1(u, y)] = g_\nu(u, v),$$

nous avons

$$F(x, y) \overset{x}{\underset{0}{\bigstar}} G(x, y) \overset{\nu}{\supset\!\!\!\supset} \int_0^\infty y\, J_\nu(vy)\, \Phi_1(u, y)\, \Gamma_1(u, y)\, dy;$$

2° d'après le théorème de Parseval appliqué à la transformation de Hankel :

$$\int_0^\infty v f_\nu(u, v)\, g_\nu(u, v)\, dv = \int_0^\infty y\, \Phi_1(u, y)\, \Gamma_1(u, y)\, dy.$$

D'où si les intégrales existent :

$$\int_0^\infty v f_\nu(u, v)\, g_\nu(u, v)\, dv \underset{x}{\subset} \int_0^\infty y\, F(x, y) \overset{x}{\underset{0}{\bigstar}} G(x, y)\, dy.$$

5. Relation avec la transformation de Laplace. — Posons

$$\varphi(u, v) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ux-vy}\, F(x, y)\, dx\, dy,$$

$$f_\nu(u, v) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ux} y\, J_\nu(vy)\, F(x, y)\, dx\, dy.$$

Un simple calcul formel nous donne

$$\varphi(u, v) = \int_0^\infty \xi^{\nu+1} \frac{f_\nu(u, \xi)\, d\xi}{\sqrt{v^2 + \xi^2}\left[v + \sqrt{v^2 + \xi^2}\right]^\nu}$$

et si $R\xi < 0$:

$$f_\nu(u, v) = \frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \varphi(u, \xi)\, d\xi \frac{v^\nu\left[\nu\sqrt{v^2+\xi^2}-\xi\right]}{(v^2+\xi^2)^{\frac{3}{2}}\left[\sqrt{v^2+\xi^2}-\xi\right]^\nu}.$$

Pour $\nu = 0$, ces formules deviennent

$$\varphi(u, v) = \int_0^\infty \xi f_0(u, \xi)\,(v^2+\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\, d\xi$$

et

$$f_0(u, v) = \frac{-1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \xi\varphi(u, \xi)\,(v^2+\xi^2)^{-\frac{3}{2}}\, d\xi$$

6. **Propriétés asymptotiques.** — Si $\int_0^\infty\int_0^\infty y\, F(x, y)\, dx\, dy = S$ et si la convergence est bornée, alors $\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ux}y\, J_\nu(vy)\, F(x, y)\, dx\, dy$ tend vers S quand u et v tendent vers zéro indépendamment et simultanément.

Toute transformation de Fourier à n variables d'une fonction radiale se ramenant à une transformation de Hankel d'ordre $\nu = \frac{n}{2} - 1$, nous voyons que comme cas particulier de ce qui précède, nous avons des combinaisons de transformation de Laplace et de Fourier.

Nous aurions pû prendre la transformation de Hankel sous la forme étudiée par Tricomi :

$$\psi_\nu(u, V) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ux} J_\nu(2\sqrt{VY})\, F(x, Y)\, dx\, dY.$$

On se ramène à la forme précédente, en posant

$$\sqrt{2V} = v \qquad \text{et} \qquad \sqrt{2Y} = y.$$

On a, sous cette forme, l'avantage de pouvoir exprimer simplement la relation avec la transformation de Laplace :

Si $\chi(u, s) \subset Y^{\frac{\nu}{2}} F(x, Y)$ alors

$$V^{\frac{\nu}{2}}\psi_\nu(u, V) \underset{V}{\supset} \frac{1}{s^{\nu+1}}\chi\left(u, \frac{1}{s}\right).$$

Nous avons ici un cas limite de la transformation étudiée par Stankovic (4.25).

CHAPITRE VI.

TRANSFORMATIONS FINIES.

Ces transformations se présentent comme un des aspects de la théorie des développements d'une fonction en série multiple de fonctions propres associées aux équations différentielles du second ordre.

1. Transformation multiple de Fourier. — Soit $F(x, y)$ une fonction définie sur le rectangle $(0, a; 0, b)$. Nous définirons sa transformée en sinus par

$$(6.1)\quad \mathcal{F}_{ss}[F(x, y)] = f_{ss}(m, n) = \int_0^a \int_0^b F(x, y) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}\, dx\, dy$$

et nous aurons la formule d'inversion

$$(6.2)\qquad F(x, y) = \frac{4}{ab} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{ss}(m, n) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}.$$

Nous ne pourrons dériver ce développement terme à terme que si $F(x, y)$ s'annule pour $x = 0$ et pour $y = 0$.

Si

$$F(0, y) = \Phi_1(y) \qquad \text{et} \qquad F(a, y) = \Phi_2(y)$$

et si $\varphi_{1,s}(n)$ et $\varphi_{2,s}(n)$ sont les transformées de Fourier en sinus de $\Phi_1(y)$ et $\Phi_2(y)$, nous aurons

$$(6.3)\quad \mathcal{F}_{ss}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right] = \frac{m\pi}{a}[\varphi_{1,s}(n) + (-1)^{m+1}\varphi_{2,s}(n)] - \frac{m^2\pi^2}{a^2} f_{ss}(m, n)$$

et une formule analogue pour $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

Donc si $F(0, y) = F(a, y) = F(x, 0) = F(x, b) = 0$:

$$(6.4)\qquad \mathcal{F}_{ss}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right] = -\Pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) f_{ss}(m, n).$$

Si, au lieu de F, c'est $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ qui est nulle pour $x = 0$ et $x = a$, nous considérerons une transformation en sinus et en cosinus :

$$(6.5)\qquad \mathcal{F}_{cs}(m, n) = \int_0^a \int_0^b F(x, y) \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}\, dx\, dy.$$

La formule d'inversion sera alors

$$(6.6)\qquad F(x, y) = \frac{2}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} f_{cs}(0, n) \sin \frac{n\pi y}{b} + \frac{4}{ab} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{cs}(m, n) \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

et des formules analogues en combinant différemment les sinus et les cosinus suivant la forme des conditions aux limites.

2. Transformation de Fourier et de Hankel. — Soit la transformation

$$(6.7)\qquad f_m(\eta, m) = \int_0^{2\pi} \int_0^{R} e^{-im\theta} r \, J_m(\eta r) F(r, \theta) \, dr \, d\theta.$$

Appliquons cette transformation à l'expression différentielle

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}.$$

Si nous supposons que $F(r, 0) = F(r, 2\pi)$ et de même pour les dérivées, l'expression deviendra

$$-\eta^2 f_m + \left| J_m(\eta r) \, r \frac{\partial F}{\partial r m} - r\eta \, J'_m(\eta r) \right|_{r=0}^{r=R}$$

avec

$$F_m(r, m) = \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} F(r, \theta) \, d\theta.$$

Nous pouvons choisir η de diverses manières :

Si η est égal à λ_p, racines de $J_m(\eta R) = 0$, nous aurons la formule d'inversion

$$(6.8)\qquad F(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{R^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{e^{im\theta} J_m(\lambda_p r)}{J_{m+1}^2(\lambda_p R)} f_m(\lambda_p, m).$$

Si η est égal à ξ_p, ξ_p racines de $\xi_p J'_m(R\xi_p) + h \, J_m(\xi_p R) = 0$, nous aurons la formule d'inversion

$$(6.9)\qquad F(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{R^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{J_m(\xi_p r) \, e^{im\theta}}{\left(h^2 + \xi_p^2 - \frac{m^2}{R^2}\right) J_m^2(\xi_p R)} f_m(\xi_p, m).$$

L'étude théorique de ces séries a été faite en tant qu'étude de développements en série de fonctions propres (R. Courant et D. Hilbert, *Methoden der Mathematischen Physik*). Nous avons ici un cas où le noyau ne se sépare pas, l'indice de la fonction de Bessel étant lié au paramètre de la transformation de Fourier.

Notons que les développements précédents ne sont dérivables terme à terme par rapport à r que si $F(R, \theta) = 0$ pour le premier, et $\left|\frac{\partial F}{\partial r} + hF\right|_{r=R} = 0$ pour le deuxième. S'il n'en est pas ainsi, on applique la dérivation terme à terme au développement de la fonction $F^1(r\,\theta) = F(r, \theta) - F(R, \theta)$ $\left[\text{ou } F^1(r) = F(r) - r\frac{dF}{dr}(R)\right.$ pour le deuxième avec $\left.h = 0\right]$ (*voir* [10], p. 41).

Ces développements en série correspondent à des fonctions propres associées aux équations aux dérivées partielles.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + [\lambda - q(x, y)]\, F = 0.$$

dans le cas où cette équation est séparable, c'ést-à-dire où l'on peut, par une transformation de coordonnées :

$$x \equiv x(u, v), \qquad y \equiv y(u, v),$$

l'écrire sous la forme $F_1(u, F) + F_2(v, F) = 0$, F_1 ne contenant que des dérivées par rapport à u et u lui-même, F_2 ne contenant que v et des dérivéés par rapport à v. L'équation primitive se sépare alors en deux équations différentielles du deuxième ordre, les valeurs propres de ces deux équations étant liées. Titchmarsh [31] a fait l'étude de ces développements quand l'équation ne se sépare pas, pour un domaine fini ou infini. Nous avons ici une source de transformations intégrales non étudiées.

CHAPITRE VII.

Transformation de Riesz.

Soit une fonction $F(P)$ de m variables.

1° Posons.

$$I^\alpha[F(P)] = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int_\Omega F(Q)\, r_{PQ}^{\alpha - m}\, dQ,$$

P et Q représentent deux points de l'espace à m dimensions, de coordonnées $(x_1, \ldots, x_m)$, $(y_1, \ldots, y_m)$; r_{PQ} représentent leur distance euclidienne, c'est-à-dire $r_{PQ} = \left[\sum_1^m (x_i - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$.

$$H_m(\alpha) = \frac{\pi^{\frac{m}{2}} 2^\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-\alpha}{2}\right)}$$

On a alors les propriétés fondamentales·

$$I^\alpha[I^\beta(F(P))] = I^{\alpha+\beta}[F(P)], \qquad \text{(théorème de composition)},$$

$$\Delta I^{\alpha+2}[F(P)] = -I^\alpha[F(P)], \qquad \text{avec } \Delta = \sum_1^m \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

En particulier

$$I^\alpha e^{i\sum a_j x_j} = \left(\sum a_j^2\right)^{-\frac{\alpha}{2}} e^{i\sum a_j x_j} \qquad \text{et} \qquad I^\alpha[e^{ix_1}] = e^{ix_1},$$

ce qui permet de relier cette transformation à la transformation de Fourier.

2° La définition la plus utilisée est celle où r_{PQ} représente la distance lorentzienne des points P et Q ([27] et [2 b]). On pose

$$r_{PQ} = [(x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2 - \ldots - (x_m - y_m)^2]^{\frac{1}{2}}$$

et

$$H_m(\alpha) = \pi^{\frac{m-2}{2}} 2^{\alpha-1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+2-m}{2}\right).$$

Le domaine d'intégration est alors choisi de sorte que

$$r_{PQ}^2 < 0 \qquad \text{et} \qquad x_1 - y_1 > 0.$$

I^α est une fonction analytique de la variable complexe α, holomorphe pour $\alpha > m - 2$. On a alors les relations fondamentales

$$I^\alpha[I^\beta] = I^{\alpha+\beta} \qquad \text{et} \qquad \Delta I^{\alpha+2} = I^\alpha \qquad \text{où } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}.$$

Pour $\alpha \leq m - 2$, en général l'intégrale n'existe pas; on définit alors $I^\alpha[F(P)]$ par prolongement analytique sous des hypothèses convenables pour F et ses dérivées. Ce prolongement se fait par intégrations par parties. En admettant l'existence des dérivés d'ordre $\leqq \frac{m+1}{2}$ ou $\frac{m}{2}$ selon la parité de m, on obtient ainsi.

$$I^0[F(P)] = F(P).$$

On a donc ainsi une formule d'inversion.

La relation entre cette transformation et la transformation multiple de Laplace a été étudiée par Amério, dans leur application aux équations aux dérivées partielles [2, *b*],

CHAPITRE VIII.

Application a la résolution des équations aux dérivées partielles dans l'espace a trois dimensions.

Nous donnerons le principe de ces applications; mais nous renverrons aux travaux déjà publiés pour les détails du calcul, nous bornant à en esquisser les grandes lignes.

Le choix de la transformation intégrale n'est nullement laissé au hasard, comme il pourrait le paraître à première vue. Il repose sur :

— la forme du domaine où a lieu le phénomène étudié;

— la forme de l'équation aux dérivées partielles régissant ce phénomène.

Nous ferons toujours une transformation de Laplace sur $(0, \infty)$ par rapport à la variable temps, cette transformation présentant alors l'avantage de faire apparaître dans le calcul les conditions initiales.

Pour les variables d'espace, nous utiliserons, selon les cas; la transformation de Laplace, celle de Fourier sur un intervalle fini ou infini, ou celles de Hankel quand les coordonnées cylindriques sont imposées soit par les données, soit par la forme du domaine envisagé.

1. Équation de la chaleur ([10], p. 59). — Soit, en coordonnées cartésiennes, l'équation

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{\partial F}{\partial t} \tag{8.1}$$

et supposons connue la distribution de température au temps $t = 0$. Effectuons une transformation de Laplace par rapport à t et une transformation de Fourier par rapport aux variables x et y. Posons

$$\mathcal{F}_{xy}[F(t, x, y, z)] = f(t, v, w, z) \underset{t}{\supset} \varphi(u, v, w, z),$$

$$F(0, x, y, z) = C(x, y, z), \qquad \text{avec} \quad \mathcal{F}_{xy}[C(x, y, z)] = c(v, w, z),$$

(8.1) se transforme en une équation différentielle du deuxième ordre, linéaire, à coefficients constants, avec second membre, la variable étant z :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - (u + v^2 + w^2)\,\varphi = -c(v, w, z). \tag{8.2}$$

La solution générale dépendra de deux constantes arbitraires Nous aurons une et une seule solution si nous imposons à la solution deux conditions nous permettant de déterminer ces constantes; par exemple si nous connaissons sa valeur pour $z = 0$ et $z = l$, ou si nous connaissons sa valeur et celle de sa première dérivée en $z = 0$. Nous avons réalisé le calcul dans le premier cas; nous connaissons

$$F(t, x, y, 0) = A(t, x, y), \qquad \text{avec} \quad \mathcal{F}_{xy}[A(t, x, y)] = a(t, v, w) \underset{t}{\supset} \alpha(u, v, w),$$

$$F(t, x, y, l) = B(t, x, y), \qquad \text{avec} \quad \mathcal{F}_{xy}[B(t, x, y)] = b(t, v, w) \underset{t}{\supset} \beta(u, v, w).$$

Nous déterminons alors la solution de (8.2) par la méthode de la variation des constantes. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
\varphi(u, v, w, z) = {} & \frac{1}{u + v^2 + w^2} \int_0^z c(v, w, \xi) \\
& \times \frac{\operatorname{ch}\sqrt{u + v^2 + w^2}\,(l + \xi - z) - \operatorname{ch}\sqrt{u + v^2 + w^2}\,(l - z - \xi)}{2 \operatorname{sh}\sqrt{u + v^2 + w^2}\, l}\, d\xi \\
& + \frac{1}{u + v^2 + w^2} \int_z^l c(v, w, \xi) \\
& \times \frac{\operatorname{ch}\sqrt{u + v^2 + w^2}\,(l + z - \xi) - \operatorname{ch}\sqrt{u + v^2 + w^2}\,(l - \xi - z)}{2 \operatorname{sh}\sqrt{u + v^2 + w^2}\, l}\, d\xi \\
& + \beta(u, v, w) \frac{\operatorname{sh}\sqrt{u + v^2 + w^2}\, z}{\operatorname{sh}\sqrt{u + v^2 + w^2}\, l} + \alpha(u, v, w) \frac{\operatorname{sh}\sqrt{u + v^2 + w^2}\,(l - z)}{\operatorname{sh}\sqrt{u + v^2 + w^2}\, l}.
\end{aligned}$$

Pour revenir à la fonction originale $F(t, x, y, z)$, nous faisons d'abord l'inversion de la transformation de Laplace en utilisant le formulaire de MacLachlan et P. Humbert [20] [en remarquant toutefois que ces formulaires sont établis pour la transformation de Laplace-Carson c'est-à-dire que $\varphi(u)$ correspond à $\frac{1}{p}f(p)$ du formulaire]. Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} f(t, v, w, z) = & \frac{2}{l}\int_0^l c(v, w, \xi)\, e^{-(v^2+w^2)t} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{l^2}} \sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi z}{l}\, d\xi \\ & - \frac{1}{l}\frac{\partial\theta_4}{\partial z}\left(\frac{z}{2l}, \frac{\pi^2 t}{l^2}\right) e^{-(v^2+w^2)t} \overset{t}{\underset{0}{\bigstar}}\, b(t, v, w) \\ & + \frac{1}{l}\frac{\partial\theta_4}{\partial z}\left(\frac{l-z}{2l}, \frac{\pi^2 t}{l^2}\right) e^{-(v^2+w^2)t} \overset{t}{\underset{0}{\bigstar}}\, a(t, v, w). \end{aligned}$$

L'inversion de la transformation de Fourier est alors très simple, il suffit de remarquer que

$$e^{-v^2 t} = \mathcal{F}_x\left[\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2t}\right] \qquad \text{pour} \quad t > 0$$

et d'appliquer le théorème du produit de composition. Nous avons

$$\begin{aligned} F(t, x, y, z) = & \frac{2}{l}\int_0^l \sum_{0}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{l^2}} \sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi z}{l}\, C(x, y, \xi) \overset{\infty}{\underset{-\infty}{\bigstar}} \overset{\infty}{\underset{-\infty}{\bigstar}} \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}}{2t}\, d\xi \\ & - \frac{1}{l}\frac{\partial\theta_4}{\partial z}\left(\frac{z}{2l}, \frac{\pi^2 t}{l^2}\right) \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}}{2t} \overset{t}{\underset{0}{\bigstar}} \overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\bigstar}} \overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\bigstar}} B(t, x, y) \\ & + \frac{1}{l}\frac{\partial\theta_4}{\partial z}\left(\frac{l-z}{2l}, \frac{\pi^2 t}{l^2}\right) \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}}{2t} \overset{t}{\underset{0}{\bigstar}} \overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\bigstar}} \overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\bigstar}} A(t, x, y). \end{aligned}$$

On doit vérifier que cette solution satisfait bien à l'équation, c'est-à-dire en particulier est deux fois différentiable en x, y, z et une fois en t. En outre quand $t \to 0$ elle doit tendre vers $C(x, y, z)$ et quand z tend vers 0 ou l, elle doit tendre vers $A(t, x, y)$ ou $B(t, x, y)$. Cette vérification peut s'effectuer si les données sont des fonctions positives, bornées et continues en x, y, z, t pour $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, $0 < z < l$, $0 < t$, leurs dérivées premières et deuxièmes en x et y sont bornées, les dérivées premières étant respectivement d'ordre $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ pour $x\ \infty$ et $y\ \infty$. Ce sont des conditions suffisantes; une étude plus précise des conditions de convergence et de dérivabilité permettrait certainement d'élargir ces conditions.

Dans cette vérification, nous sommes amenés à étudier l'intégrale singulière

$$P(t, x, y, z) = C(x, y, z) \underset{\infty}{\overset{\infty}{\bigstar}} \underset{\infty}{\overset{\infty}{\bigstar}} \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}}{2t}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2}{4t}}}{2t} C(\lambda, \mu, z)\, d\lambda\, d\mu$$

qui tend vers $C(x, y, z)$ si $t \to 0$, C satisfaisant aux conditions énoncées ci-dessus.

Si nous supposons que les données A, B, C ne dépendent de x et y que par l'intermédiaire de $\sqrt{x^2+y^2} = r$, le phénomène sera de révolution autour de l'axe Oz. Nous pouvons faire le changement de variables sur la formule obtenue en remarquant que

$$P(t, r, \xi) = \frac{1}{4\pi t}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \rho\, C(\rho, \xi)\, e^{-\frac{r^2+\rho^2}{4t}}\, e^{\frac{r\rho}{2t}\cos(\varphi-\theta)}\, d\varphi\, d\rho$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \rho\, C(\rho, \xi)\, e^{-\frac{r^2+\rho^2}{4t}}\, I_0\left(\frac{r\rho}{2t}\right) d\rho$$

qui peut aussi s'écrire

$$\int_0^{\infty} J_0(\nu r)\, \nu\, e^{-\nu^2 t}\, d\nu \int_0^{\infty} \rho\, J_0(\nu\rho)\, C(\rho, \xi)\, d\rho.$$

Mais ce problème de révolution pouvait s'étudier directement.

La transformation double de Fourier se ramène dans ce cas-là à une transformation de Hankel d'ordre o. Nous pouvons donc utiliser la transformation de Laplace-Hankel que nous avons étudiée au chapitre V. Nous appliquons cette transformation à l'équation

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{8.3}$$

Soit

$$\varphi(u, \nu, z) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-ut}\, r\, J_0(\nu r)\, F(t, r, z)\, dt\, dr$$

et

$$c(\nu, z) = \int_0^{\infty} r\, J_0(\nu r)\, C(r, z)\, dr \qquad \text{avec} \quad C(r, z) = F(0, r, z),$$

(8.3) se transforme en

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - (u + \nu^2)\, \varphi = -c(\nu, z). \tag{8.4}$$

Nous avons la même équation que précédemment en remplaçant $v^2 + w^2$ par v^2. Les calculs sont exactement les mêmes, l'inversion de la transformation de Hankel se faisant très simplement par la formule

$$\int_0^\infty v\,J_0(vr)\,f(t,\,v,\,z)\,dv.$$

Il nous suffit ici de supposer que les données sont des fonctions absolument intégrables et à variation bornée par rapport à la variable r sur l'intervalle $(0,\,\infty)$ et développables en série de Fourier par rapport à z sur $(0,\,l)$.

Nous avons donc résolu de cette manière le problème de la propagation de la chaleur entre deux plans illimités $z = 0$ et $z = l$, la température initiale étant connue ainsi que celle des deux plans en chacun de leurs points et en tout instant.

2. **Équation des ondes.** — Soit l'équation

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \sigma\mu\frac{\partial F}{\partial t}. \tag{8.5}$$

Nous supposons F nulle sur les parois d'un tube à section rectangulaire. Soit $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, les parois de ce tube d'axe Oz.

Faisons successivement une transformation finie de Fourier en sinus par rapport à x et y, et une transformation de Laplace par rapport à t.

(8.5) se transforme en une équation différentielle linéaire à cœfficients constants du deuxième ordre du même type que dans le paragraphe précédent, la variable étant z; dans le deuxième membre figurera les valeurs de F et $\frac{\partial F}{\partial t}$ pour $t = 0$.

Posons

$$f(t,\,m,\,n,\,z) = \int_0^a\int_0^b F(t,\,x,\,y,\,z)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy$$

et

$$\varphi(u,\,m,\,n,\,z) = \int_0^\infty e^{-ut} f(t,\,m,\,n,\,z)\,dt,$$

$\varphi(u, m, n, z)$ doit satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \lambda^2\varphi = g(u, m, n, z) \tag{8.6}$$

avec

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) + \frac{1}{\gamma^2}u(u+k) \\ &= \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) - \frac{k^2}{4\gamma^2} + \frac{1}{\gamma^2}\left(u + \frac{k}{2}\right)^2 = \frac{\omega^2}{\gamma^2} + \left(u + \frac{k}{2}\right)^2\frac{1}{\gamma^2};\end{aligned}$$

$k = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{1}{\tau}$ ayant la dimension de l'inverse d'un temps, $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \gamma$ ayant la dimension d'une vitesse :

$$g(u, m, n, z) = \frac{1}{\gamma^2}(u+k)f(0, n, m, z) - \frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial f}{\partial t}(0, n, m, z).$$

Hayashi [15] résout le problème en supposant F et $\frac{\partial F}{\partial z}$ connus pour $z = 0$. On en déduit φ et $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ pour $z = 0$; d'où la solution de (8.6) est parfaitement déterminée et on la calcule par la méthode de la variatton des constantes. On peut aussi supposer $F = F_0$ pour $z = 0$ et nul pour $z\,\infty$. La solution de (8.6) est alors de la forme

$$\varphi(u, m, n, z) = \Phi(u, m, n)e^{-\lambda z} \qquad \text{avec} \quad \mathcal{F}_{xy}[F_0] = f_0(t, m, n) \underset{t}{\supset} \Phi(u, m, n).$$

On fait alors l'inversion de la transformation de Laplace, puis celle de la transformation de Fourier par la formule (6.2). On trouve

$$\begin{aligned}F(t, x, y, z) &= 0 \qquad \text{pour} \quad 0 < t < \frac{z}{\gamma}, \\ &= e^{-\frac{kz}{2\gamma}} F_0\left(t - \frac{z}{\gamma}, x, y\right) - \frac{4}{ab}\sum_m\sum_n \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \\ &\quad \times \int_{\frac{z}{\gamma}}^{t} e^{-\frac{\xi}{2t}} F_1(t-\xi, m, n)\,\psi\left(\omega, \frac{z}{\gamma}, \xi\right)d\xi \qquad \text{pour} \quad 0 < \frac{z}{\gamma} < t,\end{aligned}$$

$$\psi(\omega, b; t) = \frac{\omega b\, J_1\left(\omega\sqrt{t^2 - b^2}\right)}{\sqrt{t^2 - b^2}} \qquad \text{pour } \omega \text{ réel,}$$

$$\psi(\omega, b, t) = -\frac{i\omega b\, I_1\left(t\omega\sqrt{t^2 - b^2}\right)}{\sqrt{t^2 - b^2}} \qquad \text{pour } \omega \text{ imaginaire pur,}$$

γ représente la vitesse de propagation de l'onde, puisque, émise dans le plan $z = 0$, il lui faut un temps $t = \frac{z}{\gamma}$ pour atteindre les points de cote z. Le premier terme montre que nous avons une vibration retardée et atténuée, le facteur d'atténuation étant $e^{-\frac{kz}{2\gamma}}$; le deuxième terme contient le même facteur d'atténuation mais dans les directions Ox et Oy. Pour l'atténuation du signal émis dans le plan $z = 0$, il suffit d'étudier l'onde au voisinage de son front d'onde, c'est-à-dire quand $t - \frac{z}{\gamma}$ est un infiniment petit,

Si nous étudions la propagation des ondes électromagnétiques, F représentant la fonction d'onde, le cas précédent correspond à une onde du type (E). Pour une onde du type (H), les conditions sur la surface latérale du tube sont

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{x=0} = \left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{x=a} = \left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{y=0} = \left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{y=b} = 0.$$

Nous faisons alors une transformation en cosinus :

$$f(t, m, n, z) = \int_0^a \int_0^b F(t, x, y, z) \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}\, dx\, dy.$$

Le calcul se fait exactement de la même manière que précédemment, en modifiant convenablement la formule d'inversion de la transformation de Fourier.

Si le tube a une section circulaire, nous devons utiliser les coordonnées cylindriques. L'équation (8.5) prend la forme

$$(8.7) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Nous faisons la transformation

$$f_m(t, \eta, m, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-im\theta}\, r\, J_m(\eta r)\, F(t, r, \theta, z)\, d\theta\, dr$$

et une transformation de Laplace par rapport à t.

Nous obtenons une équation du même type que précédemment, mais au second membre figure en outre l'expression provenant de la transformation de Hankel :

$$\left| J_m(r\eta)\, r \frac{\partial F_m}{\partial r} - F_m\, r\eta\, J'_m(r\eta) \right|_0^R, \qquad \text{avec} \quad F_m = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} e^{-ut}\, F\, d\theta\, dt.$$

Nous supposons F et $\frac{\partial F}{\partial r}$ tels que pour $r = 0$, l'expression soit nulle. Il reste sa valeur pour $r = R$.

Dans le cas de l'onde du type (E) :

$$F(t, R, \theta, z) = 0.$$

Choisissons $\eta = \lambda_p$ racines de $J_m(R\eta) = 0$.

Nous avons pour solution un développement du type (6.8) :

$$\begin{aligned} F(t, r, \theta, z) &= 0 \qquad \text{pour} \quad 0 < t < \frac{z}{\gamma}, \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_m e^{im\theta} e^{-\frac{kz}{2\gamma}} F_{0,m}\left(t - \frac{z}{\gamma}, r, m\right) \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \frac{2}{R^2} \sum_m \sum_p e^{im\theta} \frac{J_m(\lambda_p r)}{J_m'^2(R\lambda_p)} \\ &\quad \times \int_{\frac{z}{\gamma}}^{t} e^{-\frac{\xi}{2t}} F_{0,m}(t-\xi, \lambda_p, m) \psi\left(\omega, \frac{z}{\gamma}, \xi\right) d\xi \qquad \text{pour} \quad 0 < \frac{z}{\gamma} < t, \end{aligned}$$

$$F_{0,m} = \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} F_0(t, r, \theta)\, d\theta \qquad \text{et} \qquad \omega^2 = \gamma^2 \lambda_p^2 - \frac{k^2}{4}.$$

Dans le cas de l'onde (H) la condition à la limite étant $\frac{\partial F}{\partial r} = 0$ nous prenons $\eta = \nu_p$ racines de $J'_m(\eta R) = 0$ et nous avons un développement du type (6.9) avec $h = 0$.

Enfin au lieu d'un cylindre, nous pourrions avoir un domaine compris entre deux cylindres coaxiaux, de rayon a et b. Nous ferions alors la transformation

$$f_m(t, \eta, m, z) = \int_0^{2\pi} \int_a^b r F(t, r, \theta, z) T_m(\eta, r, a) e^{-im\theta}\, dr\, d\theta,$$

avec

$$T_m(\eta, r, a) = J_m(\eta r) Y_m(\eta a) - J_m(\eta a) Y_m(\eta r),$$

Y_m, fonction de Bessel de deuxième espèce. Pour le cas des ondes (E), $F = 0$ pour $r = a$ et $r = b$; η est choisi de telle sorte que

$$T_m(\eta, b, a) = 0.$$

Si ξ_p sont les racines de cette équation, la solution est donnée par un développement du type

$$F(t, r, \theta, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_m \sum_p \frac{2\xi_p^2 J_m(\xi_p b) f_m(t, \xi_p, m, z)}{J_m^2(a\xi_p) - J_m^2(\xi_p b)} T_m(\xi_p, r, a) e^{im\theta}.$$

Considérons maintenant le cas de la propagation des ondes électromagnétiques lorsque la paroi n'est pas infiniment conductrice. F ou $\frac{\partial F}{\partial r}$ ne sont pas nuls sur la paroi; nous n'avons pas de types d'ondes séparés et nous devons considérer directement les équations de Maxwell.

3. Équations de Maxwell. — Soient les équations

$$\operatorname{rot}\vec{E} + \mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = 0,$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} - \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \sigma\vec{E} = \vec{J}.$$

Soient (z, ρ, θ) les coordonnées d'espace d'un point, H_1, H_2, H_3 les composantes de $\vec{H}$ dans ce système de coordonnées et de même E_1, E_2, E_3 celles de $\vec{E}$ et J_1, J_2, J_3 celles de $\vec{J}$.

Dans ce système les équations de Maxwell non homogènes s'écrivent

$$\mu\frac{\partial H_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho E_3) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_2}{\partial\theta} = 0, \tag{1}$$

$$\mu\frac{\partial H_2}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_1}{\partial\theta} - \frac{\partial E_3}{\partial z} = 0, \tag{2}$$

$$\mu\frac{\partial H_3}{\partial t} + \frac{\partial E_2}{\partial z} - \frac{\partial E_1}{\partial\rho} = 0, \tag{3}$$

$$-\varepsilon\frac{\partial E_1}{\partial t} - \sigma E_1 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho H_3) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_2}{\partial\theta} = J_1, \tag{4}$$

$$-\varepsilon\frac{\partial E_2}{\partial t} - \sigma E_2 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_1}{\partial\theta} - \frac{\partial H_3}{\partial z} = J_2, \tag{5}$$

$$-\varepsilon\frac{\partial E_3}{\partial t} - \sigma E_3 + \frac{\partial H_2}{\partial z} - \frac{\partial H_1}{\partial\rho} = J_3. \tag{6}$$

Faisons une transformation double de Laplace par rapport à t et z.

Posons

$$h_n = h_n(u, v, \rho, \theta) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ut-vz}\,H_n(t, z, \rho, \theta)\,dt\,dz \underset{zt}{\subset} H_n(t, z, \rho, \theta),$$

$$H'_n = H'_n(u, 0, \rho, \theta) \underset{t}{\subset} [H_n(t, z, \rho, \theta)]_{z=0},$$

$$H''_n = H''_n(0, v, \rho, \theta) \underset{z}{\subset} [H_n(t, z, \rho, \theta)]_{t=0},$$

$n = 1, 2, 3$. Et de même pour $\vec{E}$ et $\vec{J}$.

ε, μ, σ étant supposées constantes dans le temps et dans l'espace le système se transforme en

$$(1') \qquad \mu u h_1 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho e_3) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial e_2}{\partial\theta} = \mu \overset{''}{H}_1,$$

$$(2') \qquad \mu u h_2 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial e_1}{\partial\theta} - v e_3 = \mu \overset{''}{H}_2 - \overset{'}{E}_3,$$

$$(3') \qquad \mu u h_3 + v e_2 - \frac{\partial e_1}{\partial\rho} = \mu \overset{''}{H}_3 + \overset{'}{E}_2,$$

$$(4') \qquad -(\varepsilon u + \sigma) e_1 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho h_3) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial h_2}{\partial\theta} = -\varepsilon \overset{''}{E}_1 + j_1;$$

$$(5') \qquad -(\varepsilon u + \sigma) e_2 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial h_1}{\partial\theta} - v h_3 = -\varepsilon \overset{''}{E}_2 - \overset{'}{H}_3 + j_2,$$

$$(6') \qquad -(\varepsilon u + \sigma) e_3 + v h_2 - \frac{\partial h_1}{\partial\rho} = -\varepsilon \overset{''}{E}_3 + \overset{'}{H}_2 + j_3,$$

et l'on pose comme dans le paragraphe précédent :

$$k = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{1}{\tau} \qquad \text{et} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

(2') et (6') forment un système de deux équations algébriques linéaires les inconnues étant e_3 et h_2; de même (3') et (5') avec e_2 et h_3.

Soit $A = v^2 - \frac{u}{\gamma^2}(u+k) = v^2 - \frac{1}{\gamma^2}\left(u + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{k^2}{4\gamma^2}$ le déterminant commun à ces deux systèmes ; on en déduit

$$(7) \qquad A e_3 = \mu u \frac{\partial h_1}{\partial\rho} + \frac{v}{\rho}\frac{\partial e_1}{\partial\theta} + v \overset{'}{E}_3 + \mu u \overset{'}{H}_2 - \frac{u}{\gamma^2}\overset{''}{E}_3 - v\mu \overset{''}{H}_2 + \mu u j_3$$

et des équations analogues pour e_2, h_2, h_3,

En portant ces valeurs dans (1') et (4'), nous obtenons, pour déterminer e_1 et h_1, deux équations séparées analogues

$$(8) \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial h_1}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 h_1}{\partial\theta^2} + A h_1 = \varphi(u, v, \rho, \theta).$$

Ces deuxièmes membres (φ pour h_1 et ψ pour e_1) sont fonctions linéaires des transformées des composantes des champs au temps $t=0$, des composantes E_2, E_3, H_2, H_3 des champs dans le plan $z=0$, et des composantes du vecteur distribution de courant $\vec{J}$ et de leurs dérivées par rapport à ρ et θ.

Si ε, μ et σ dépendent de ρ et θ, l'équation (7) et celles qui sont analogues ne sont pas modifiées ; mais (8) et celle donnant e_1, ne se séparent plus.

Nous devons trouver une solution régulière dans tout le tube, et en particulier pour $r = 0$. Faisons la transformation

$$h_{1,m,p}(u, v, \eta, m) = \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-im\theta} r \, J_m(\eta r) \, h_1(u, v, r, \theta) \, dr \, d\theta,$$

(8) se transforme en une équation algébrique

$$(9)\quad (A - \eta^2) h_{1,m,p}(u, v, \eta, m) = -\left| J_m(\eta r) \, r \frac{\partial h_{1,m}}{\partial r} - h_{1,m} \, r \eta \, J'_m(\eta r) \right|_0^R + \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-im\theta} r \, J_m(\eta r) \, \varphi_m(u, v, r, \theta) \, dr \, d\theta,$$

avec

$$h_{1,m}(u, v, r, m) = \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} h_1(u, v, r, \theta) \, d\theta.$$

Si pour $r = 0$,

$$h_{1,m} = o(r^{-m}) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial h_{1,m}}{\partial r} = o(r^{-m-1}),$$

la partie intégrée est nulle pour $r = 0$; il ne reste que sa valeur pour $r = R$.

En général nous connaîtrons pour $r = R$: $\dfrac{\partial H_1}{\partial r}$ et E_1. Si nous connaissons E_1 et E_3 pour $r = R$, (7) nous donnera $\dfrac{\partial H_1}{\partial r}$.

Donc pour l'équation (8), nous prendrons $\eta = \nu_p$ racines de $J'_m(\eta R) = 0$. Pour l'équation analogue donnant e_1 nous prendrons $\eta = \lambda_p$ racines de $J_m(\eta R) = 0$. Nous obtenons ainsi

$$(10)\qquad h_{1,m,p}(u, v, \nu_p, m) = \frac{G(u, v, \nu_p, m)}{A - \nu_p^2}$$

et

$$(11)\qquad e_{1,m,p}(u, v, \lambda_p, m) = \frac{F(u, v, \lambda_p, m)}{A - \lambda_p^2}$$

$h_{1,m,p}(u, v, \nu_p, m)$ doit être une transformée de Laplace. Donc elle doit être une fonction holomorphe de v pour u fixe, $\mathrm{R}u > 0$, et $\mathrm{R}v > 0$.

Un seul pôle est dans le domaine considéré :

$$v = \beta_p = \sqrt{\frac{u(u+k)}{\gamma^2} + \nu_p^2}, \qquad \mathrm{R}\beta_p > 0.$$

Le résidu en ce point doit être nul; nous devons donc avoir la relation

$$G(u, \beta_p, \nu_p, m) = 0.$$

De même pour e_1, posant

$$(12) \qquad v = \alpha_p = \sqrt{\frac{u(u+k)}{\gamma^2} + \lambda_p^2}, \qquad R\alpha_p > 0,$$

on doit avoir

$$F(u, \alpha_p \lambda_p, m) = 0.$$

Ces deux relations nous permettent d'éliminer une partie des données qui étaient surabondantes.

Supposons $\vec{E}$ et $\vec{H}$ connus pour $t = 0$ et pour simplifier les calculs nous les supposerons nuls et de même pour $\vec{J}$ (pour le calcul complet, *voir* [10], p. 76). Nous avons alors

$$G(u, v, \nu_p, m) = -\frac{\partial h_{1,m}}{\partial \rho}(u, v, R, m) R J_m(\nu_p R) + \int_0^R r J_m(\nu_p r)\, \varphi_m(u, v, r, m)\, dr$$

avec

$$\varphi_m = \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} \varphi(u, v, r, \theta)\, d\theta$$

et

$$\varphi(u, v, r, \theta) = -\frac{v}{\mu u}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r E'_3\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial E'_2}{\partial \theta}\right] - \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r H'_2\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial H'_3}{\partial \theta}\right],$$

$$F(u, v, \lambda_p, m) = -R\lambda_p J_{m+1}(\lambda_p R)\, e_{1,m}(u, v, R, m) + \int_0^R r J_m(\lambda_p r)\, \psi_m(u, v, r, m)\, dr,$$

avec

$$\psi(u, v, r, \theta) = -\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r E'_2\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial E'_3}{\partial \theta}\right] + \frac{v}{\varepsilon(u+k)}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r H'_3\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial H'_2}{\partial \theta}\right].$$

Les relations d'holomorphie sont donc

$$(13) \quad -\frac{\partial h_{1,m}}{\partial \rho}(u, \beta_p, R, m) R J_m(\nu_p R) + \int_0^R r J_m(\nu_p r)\, \varphi_m(u, \beta_p, r, m)\, dr = 0,$$

$$(14) \quad -R\lambda_p J_{m+1}(\lambda_p R)\, e_{1,m}(u, \alpha_p, R, m) + \int_0^R r J_m(\lambda_p r)\, \psi_m(u, \alpha_p, r, m)\, dr = 0.$$

Nous allons considérer deux cas :

1° on connaît E_2 et E_3 pour $z = 0$ et E_1 et E_3 pour $r = R$;

2° on connaît E_2, E_3, H_2, H_3 pour $z = 0$.

Dans le premier cas, de la donnée de E_1 et E_3 pour $r = R$ on déduit $\frac{\partial H_1}{\partial r}$ pour $r = R$. Une combinaison linéaire de l'équation (10) et de la relation (12) permet d'éliminer H'_2 et H'_3. Nous obtenons donc $h_{1,m,p}$ en fonction des données. Nous procédons de même avec (11) et (13) et obtenons $e_{1,m,p}$.

Nous faisons l'inversion de la transformation de Laplace à l'aide des formulaires et nous obtenons H_1 sous forme d'une série du type (6.9) et E_1 sous forme d'une série du type (6.8).

Les autres composantes se déduisent de (7) et des équations analogues. Pour des raisons d'holomorphie, le second membre doit être nul pour $v = \alpha_0 = \sqrt{\frac{u(u+k)}{\gamma^2}}$, $\mathcal{R}\alpha_0 > 0$, valeur qui annule A.

Les quatre relations ainsi obtenues se réduisent à deux lorsqu'on remarque que $\alpha_0^2 = \varepsilon(u+k)\mu u$, et nous permettent de calculer et d'éliminer H'_2 et H'_3. Nous déduisons alors e_2, e_3, h_2, h_3 en fonction des données et des valeurs de e_1 et h_1 calculées précédemment.

D'où par inversion de la transformation de Laplace, nous obtenons les quatre composantes.

Pour effectuer ces calculs, nous avons à déterminer les originales des fonctions

$$f_1(u, v) = \frac{1}{u\sqrt{\left(u+\frac{k}{2}\right)^2+\omega^2}\left(v+\sqrt{\left(u+\frac{k}{2}\right)^2+\omega^2}\right)}$$

et

$$f_2(u, v) = \frac{1}{u\left(v+\sqrt{\left(u+\frac{k}{2}\right)^2+\omega^2}\right)}.$$

Nous avons désigné les fonctions originales de f_1 et f_2 par

$$\mathcal{J}_0\left(t, z, \omega, \frac{k}{2}\right) = \int_z^t e^{-\frac{k\tau}{2}} J_0(\omega\sqrt{\tau^2 - z^2})\,d\tau$$

pour $t > z > 0$ et 0 pour $z > t > 0$,

$$\mathcal{J}_1\left(t, z, \omega, \frac{k}{2}\right) = e^{-\frac{kz}{2}} - \omega z\int_z^t e^{-\frac{k\tau}{2}} \frac{J_1(\omega\sqrt{\tau^2 - z^2})}{\sqrt{\tau^2 - z^2}}\,d\tau$$

pour $t > z > 0$ et 0 pour $z > t > 0$.

Les propriétés de ces fonctions ([10], p. 30), et celles du produit de composition, permettent de vérifier que la solution trouvée répond bien au problème. Mais nous sommes dans le cas où les développements utilisés ne peuvent pas être dérivés terme à terme. Nous devrons écrire

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_{1,m}}{\partial r}\right)-\frac{m^2}{r^2}E_{1,m}$$
$$=\frac{2}{R^2}\sum_p \frac{J_m(\lambda_p r)}{J^2_{m+1}(\lambda_p R)}\left[-\lambda_p^2 E_{1,m,p}(t,\,z,\,\lambda_p)+E_{1,m}(t,\,z,\,R)R\lambda_p J_{m+1}(\lambda_p R)\right]$$

et

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H_{1,m}}{\partial r}\right)-\frac{m^2}{r^2}H_{1,m}$$
$$=\frac{2}{R^2}\sum_p \frac{J_m(\nu_p r)}{J^2_m(\nu_p R)}\,\frac{\nu_p^2}{\nu_p^2-\dfrac{m^2}{R^2}}\left[-\nu_p^2 H_{1,m,p}+RJ_m(\nu_p R)\left[\frac{\partial H_{1,m}}{\partial r}\right]_{r=R}\right].$$

L'étude du développement asymptotique pour $u\to\infty$ des images $\mathcal{J}_0$ et $\mathcal{J}_1$ permet d'en étudier le développement asymptotique et celui de la solution pour $t\to\frac{z}{\gamma}$, donc au voisinage du front d'onde. Nous remarquerions sur les solutions (*voir* [10]) que les termes contenant les données dans le plan $z=0$, sont nuls pour $t<\frac{z}{\gamma}$, alors n'interviennent que les données sur les parois $r=R$. Nous avons bien encore un phénomène de propagation avec la vitesse γ et une atténuation. Nous avons en outre superposition de deux types d'onde comme le laissait prévoir l'étude physique.

Dans le deuxième cas, les données déterminent complètement φ et ψ. Donc les relations (12) et (13) nous donnent

$$\frac{\partial h_{1,m}}{\partial r}(u,\,\beta_p,\,R,\,m)\qquad\text{et}\qquad e_{1,m}(u,\,\alpha_p,\,R,\,m).$$

Nous connaissons donc les fonctions holomorphes $\frac{\partial h_{1,m}}{\partial\rho}(u,\,v,\,R,\,m)$ et $e_{1,m}(u,\,v,\,R,\,m)$ en une infinité de points : $v=\beta_p$ pour la première et $v=\alpha_p$ pour la deuxième. L'étude faite pour la détermination d'une transformée de Laplace connue en une infinité de points remplissant certaines conditions ([10], p. 12 et suiv.) rappelées ici (p. 47) nous permet de déduire E_1 et $\frac{\partial H_1}{\partial r}$ pour $r=R$. Nous sommes alors ramenés au problème précédent. Donc de cette manière nous pouvons déduire la propagation d'ondes électromagnétiques dans un cylindre à paroi non parfaitement conductrice de la connaissance du champ tangentiel à l'extrémité $z = 0$.

Au sujet des équations de Maxwell signalons aussi l'application de Van der Pol [32] (p. 361) qui en cherche les solutions, les coordonnées étant x, y, z, t et variant de $-\infty$ à $+\infty$. Une transformation de Laplace bilatérale par rapport à ces quatre variables transforme ce système différentiel en un système de six équations algébriques linéaires, d'où l'on tire aisément les inconnues.

4. Équation de Vasilach. — Nous appelons ainsi l'équation

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right]+\mu^2\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}-\lambda^2 F = g(x, y, z),$$

λ et μ, paramètres réels. Un cas particulier de cette équation : $\mu = 1$ et $\lambda = 0$, a été étudié par d'autres méthodes par Sobolev au sujet d'un problème de Physique mathématique.

Vasilach, généralisant l'équation considérée par Sobolev, en étudie [33] le problème de Cauchy, c'est-à-dire en cherche les solutions qui satisfont pour $t = 0$ aux conditions

$$F(x, y, z, 0) = F_0(x, y, z) \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{t=0} = F_1(x, y, z).$$

Une transformation de Laplace par rapport à t sur $(0, \infty)$ permet d'introduire naturellement les données. Une transformation de Fourier par rapport à x, y, z transforme l'équation en une équation algébrique dont on détermine aisément la solution.

Si

$$\mathcal{F}_{x,y,z}[F(x,y,z,t)] = \Phi(v, w, s, t) \underset{t}{\supset} \varphi(v, w, s, u),$$
$$\mathcal{F}_{x,y,z}[G(x, y, z)] = \Gamma(v, w, s),$$
$$\mathcal{F}_{x,y,z}[F_0(x, y, z]) = \Phi_0(v, w, s) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}_{x,y,z}[F_1(x, y, z]) = \Phi_1(v, w, s),$$

on a en définitive

$$[u^2(v^2+w^2+s^2)+s^2\mu^2+\lambda^2]\,\varphi = [u\Phi_0+\Phi_1](v^2+w^2+s^2)-\frac{\Gamma}{u}.$$

D'où

$$\varphi = \frac{\psi(u, v, w, s)}{u[u^2(v^2+w^2+s^2)+s^2\mu^2+\lambda^2]}.$$

Pour $\mathrm{R}u > 0$, φ n'a pas de pôle et est une fonction holomorphe de u. Nous faisons d'abord l'inversion par rapport à u puis celle de la transformation de Fourier.

Vasilach donne la solution dans le cas général et pour les cas particuliers $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$.

APPENDICE I.

Convergence des intégrales multiples.

Nous porterons ici notre attention sur le cas des intégrales « définies singulières » au sens de Cauchy (Résumé des leçons données à l'École Polytechnique sur le Calcul infinitésimal, *Œuvres complètes*, 2e série, t. IV, p. 145) ou « intégrales infinies » (Bromwich, *Séries divergentes*), c'est-à-dire sur les intégrales dont le domaine d'intégration est illimité ou celles dont la fonction à intégrer devient infinie en un ou plusieurs points du domaine d'intégration ou de sa frontière.

1. Domaine illimité. — 1° *Définition.* — Soit D le domaine illimité, F(P) la fonction de points à intégrer; on suppose F(P) définie, continue et bornée dans D, $d\omega$ l'élément d'aire. Soit D_i une suite de domaines intérieurs à D, qu'on peut supposer tels que $D_j \supset D_i$ si $j > i$ et C_i la famille de courbes les limitant, satisfaisant à toutes les conditions de régularité souhaitables.

On définit $I_1 = \int_D F(P)\, d\omega$ comme la limite de $\int_{D_i} F(P)\, d\omega$ quand $i \to \infty$, c'est-à-dire quand C_i s'éloigne indéfiniment, quel que soit le choix des C_i.

D'après le critère de convergence de Cauchy, une condition nécessaire et suffisante pour que cette limite existe est que $\int_{D_j - D_i} F(P)\, d\omega$ tende vers zéro quand $i \to \infty$, $j > i$. On démontre que I_1 ne converge que si elle converge absolument.

Dans le cas de l'absolue convergence et du domaine $Q(0, \infty; 0, \infty)$ si en outre $\int_0^\infty F(x, y)\, dx$ et $\int_0^\infty F(x, y)\, dy$ convergent absolument pour tout $y > 0$ ou $x > 0$, alors l'intégrale double est égale aux intégrales répétées.

Remarque. — Si l'intégrale est prise au sens de Lebesgue, si $F(x, y)$ est sommable sur le premier quadrant Q, les intégrales simples par rapport à x et à y existent sauf peut-être sur un ensemble de mesure nulle, et, d'après le théorème de Fubini, l'intégrale double est égale aux intégrales répétées. C'est là que réside, pour cette étude, le principal avantage de l'utilisation de l'intégrale de Lebesgue.

2° *Définition.* — Ne considérer que des intégrales absolument convergentes risque de restreindre considérablement le champ des applications. Si l'intégrale ne converge pas pour toute famille de courbes C_i, elle peut converger pour une famille particulière. Nous supposons que le domaine d'intégration est le premier quadrant Q et nous définissons

$$I_2 = \int_0^\infty \int_0^\infty F(x, y)\, dx\, dy = \lim \int_0^X \int_0^Y F(x, y)\, dx\, dy$$

quand X et Y tendent vers l'infini indépendamment et simultanément.

C'est la généralisation de la convergence des séries doubles au sens de Prinsgheim. Si I_2 existe, nous dirons que $F(x, y)$ est intégrable au sens de Hardy ou, plus simplement, est intégrable.

Il est évident que l'existence de I_1 entraîne celle de I_2, mais la réciproque est inexacte.

D'après le critère de convergence de Cauchy, pour que I_2 existe il est nécessaire et suffisant que $\int_{D_{XY}} F(x, y)\, dx\, dy \to 0$ quand X et Y tendent vers l'infini, D_{XY} représentant le domaine compris entre les rectangles R_{XY} : $(0, X;\ 0, Y)$ et $R_{X+h, Y+k}$, h et $k > 0$.

Alors que pour les intégrales simples si $\int_0^\infty F(x)\, dx$ converge, $\int_0^X F\, dx$ est bornée en valeur absolue pour tout $X > 0$, il n'en est plus de même pour les intégrales doubles.

Si I_2 existe et si ses sections $I(X, Y) = \int_0^X \int_0^Y F(x, y)\, dx\, dy$ sont bornées en valeur absolue, on dit que la convergence est bornée,

$$\left| \int_0^X \int_0^Y F(x, y)\, dx\, dy \right| < \int_0^\infty \int_0^\infty | F(x, y)\, dx\, dy |,$$

donc la convergence absolue entraîne la convergence bornée.

Si la fonction dépend de un ou plusieurs paramètres :

$$f(X, Y; s, t) = \int_0^X \int_0^Y F(x, y; s, t)\, dx\, dy,$$

si $f(s, t) = \lim\limits_{X, Y \to \infty} f(X, Y; s, t)$ existe pour tout $(s, t) \in D$ nous dirons que la convergence est uniforme pour $(s, t) \in D$; si en outre : $|f(X, Y; s, t| < M$, M indépendant de s et t, alors la convergence est uniforme et bornée.

3° *Définition.* — Nous pouvons avoir des fonctions $F(x, y)$ telles que I_2 n'existe pas. Nous généraliserons alors les procédés de sommation des intégrales divergentes à une variable.

Nous disons que $F(x, y)$ *est intégrable*-A, c'est-à-dire par la sommation d'Abel, si

$$A = \lim_{u=v=0} A(u, v), \qquad \text{avec} \quad A(u, v) = \int_0^\infty \int_0^\infty F(x, y)\, e^{-ux-vy}\, dx\, dy$$

existe et est finie. La convergence est prise au sens de Hardy.

Vignaux [34] démontre que si $F(x, y)$ est intégrable, la convergence étant bornée, alors

$$A = \lim_{X, Y \to \infty} \int_0^X \int_0^Y F(x, y)\, dx\, dy$$

(c'est la condition de permanence de cette sommabilité). Pour la convergence non bornée, la condition de permanence n'est vérifiée que si l'on impose certaines conditions à $F(x, y)$ (Magnaradze [21]).

Nous disons que $F(x, y)$ est intégrable-(C; α, β), $\alpha, \beta > -1$, c'est-à-dire par la sommation de Cesàro si

$$I_{\alpha,\beta} = \lim_{X, Y \to \infty} I_{\alpha,\beta}(X, Y) = \lim_{X, Y \to \infty} \int_0^X \int_0^Y F(x, y) \left(1 - \frac{x}{X}\right)^\alpha \left(1 - \frac{y}{Y}\right)^\beta dx\, dy$$

existe et est finie.

Comme pour la sommation précédente la condition de permanence est vérifiée si la convergence de $\int_0^\infty \int_0^\infty F(x, y)\, dx\, dy$ est bornée (Pistoïa [24 b] pour le cas $\alpha = \beta$, Timan [30] pour le cas général), Timan étudie le cas de la convergence non bornée et compare ces deux modes de sommation.

Notons que la sommation de Cesàro peut s'exprimer à l'aide du produit de composition superficiel :

$$\frac{F(x, y) \overset{x}{\underset{0}{\bigstar}} \overset{y}{\underset{0}{\bigstar}} x^{\alpha} y^{\beta}}{x^{\alpha} y^{\beta}} = \int_0^X \int_0^Y F(u, v)\left(1-\frac{u}{x}\right)^{\alpha}\left(1-\frac{v}{y}\right)^{\beta} du\, dv = I_{\alpha,\beta}(x, y).$$

2. La fonction à intégrer devient infini. — A une variable nous avions pour calculer la valeur d'une intégrale impropre

$$\lim\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\, dx + \int_{c+\varepsilon'}^{b} f(x)\, dx\right],$$

ε et ε' tendant vers zéro indépendamment, c point où $f(x)$ devient infini. Si cette limite n'existe pas, nous utilisons :

— la valeur principale de Cauchy : en faisant $\varepsilon = \varepsilon'$. On note

$$\text{V.P.} \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{*b} f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon=0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} + \int_{c+\varepsilon}^{b}\right]$$

(la notation avec astérisque est celle de Tricomi et sera avantageuse pour les intégrales multiples) ;

— la partie finie d'Hadamard :

$$\text{P.F.} \int_a^b g(x)(b-x)^{\lambda-1}\, dx = \lim_{\varepsilon=0}\left[\int_a^{b-\varepsilon} g(x)(b-x)^{\lambda-1}\, dx - P(\varepsilon)\, \varepsilon^{\lambda-2}\right],$$

$P(\varepsilon)$, fonction entière déterminée de façon que la limite existe, $\lambda < 0$ non entier ;

— l'intégrale de Riesz :

$$I^{\alpha} g(b) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b g(x)(b-x)^{\alpha-1}\, dx$$

convergente pour $\alpha > 0$ et qu'on prolonge analytiquement pour $\alpha > -n$, si $g(x)$ a des dérivées continues jusqu'à l'ordre n ; ce prolongement se fait en intégrant par parties. La présence de $\Gamma(\alpha)$ permet de donner un sens pour $\alpha = 0$ ou un entier négatif, ce qui ne pouvait se faire dans la partie finie.

A deux ou n variables nous retrouverons les mêmes procédés. Mais un problème se pose ; c'est celui du changement d'ordre des intégrations.

1° *Valeur principale.* — Calculant l'intégrale

$$\text{V. P.}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{dx\,dy}{(y-mx)(y-nx)}$$

qui n'est pas définie pour $x=y=0$, Hardy (*Proc. London Math. Soc.*, 2e série, t. 7, 1908, p. 181-208) montre qu'il n'est pas toujours possible de changer l'ordre des intégrations. Nous avons en effet

$$\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{*1}f(x,y)\,dy=\frac{1}{2(m-n)}\int_{1}^{*1}\log\left(\frac{1-mx}{1+mx}\,\frac{1+nx}{1-nx}\right)^2\frac{dx}{x},$$

$$\int_{-1}^{1}dy\int_{-1}^{*1}f(x,y)\,dx=\frac{1}{2(m-n)}\int_{-1}^{*1}\log\left(\frac{y+m}{y-m}\,\frac{y-n}{y+n}\right)^2\frac{dy}{y}.$$

La première intégrale par le changement de variable $x=\frac{1}{y}$ se ramène à

$$-\left[\int_{1}^{\infty}+\int_{-\infty}^{-1}\right]\log\left(\frac{y+m}{y-m}\,\frac{y-n}{y+n}\right)^2\frac{dy}{y}$$

et

$$\Delta=\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{*1}f(x,y)\,dy-\int_{-1}^{1}dy\int_{-1}^{*1}f(x,y)\,dx$$

$$=-\frac{1}{2(m-n)}\int_{-\infty}^{\infty}\log\left(\frac{y+m}{y-m}\,\frac{y-n}{y+n}\right)^2\frac{dy}{y}$$

$$\Delta\begin{cases}=-\dfrac{2\pi^2}{m-n} & \text{si } mn<0 \quad \left(\begin{matrix}y=mx \text{ et } y=nx \text{ ne sont pas}\\ \text{dans le même quadrant}\end{matrix}\right),\\[2ex] =0 & \text{si } mn>0 \quad \left(\begin{matrix}\text{les deux droites sont}\\ \text{dans le même quadrant}\end{matrix}\right).\end{cases}$$

Si l'un des côtés du rectangle passe par o on trouve $\frac{\Delta}{2}$; si o est un sommet on trouve $\frac{\Delta}{4}$ et pour $m+n=0$ l'intégrale est divergente.

Cet exemple nous permet de comprendre la généralisation qu'en a faite Hardy. Nous nous bornerons à en énoncer le résultat : si la fonction $f(x,y)=\frac{g(x,y)}{\lambda(x,y)\,\mu(x,y)}$ est telle que $g(x,y)$ soit continue ainsi que ses dérivées premières et deuxièmes, et si les courbes $\lambda(x,y)=0$ et $\mu(x,y)=0$ se coupent une seule fois et simplement en (α,β) à l'intérieur du domaine, alors

$$\int_{a}^{A}dx\int_{b}^{*B}F(x,y)\,dy=\int_{b}^{B}dy\int_{a}^{*A}F(x,y)\,dx+\Delta,$$

où

$$\Delta = \frac{2\pi g(\alpha, \beta)}{\dfrac{D(\lambda, \mu)}{D(\alpha, \beta)}} \quad \text{ou o,}$$

selon les positions relatives des axes et des tangentes aux courbes au point (α, β).

Si les courbes λ et μ sont des parallèles aux axes, on a

$$f(x, y) = \frac{g(x, y)}{(x-\alpha)(y-\beta)},$$

$g(x, y)$ étant continue ainsi que ses dérivées premières et deuxièmes $\Delta = 0$ et l'on peut changer l'ordre des intégrations (un exemple où l'on ne peut changer l'ordre des intégrations avait été donné par CAUCHY, *Œuvres*, 1re série, t. I).

Une étude analogue a été faite par Poincaré dans le cas $y = x$, $y = \beta$ comme courbes singulières (*Leçons de Mécanique céleste*, t. 3, 1910, p. 253). Toujours dans ce même cas, mais en utilisant l'intégrale de Lebesgue. Tricomi donne une démonstration fort élégante avec des hypothèses plus larges (*Rend. del. Acc. Naz. dei Lincei*, 1955, p. 3 à 7).

2° *Partie finie.* — Cette généralisation est due à Hadamard lui-même et a été reprise par J. Gilly (*Revue Scientifique*, juin-décembre 1945 : *Transformation de Laplace-Carson*).

Par définition, nous poserons

$$\sqrt{\iint_D \frac{A(x, y)}{G(x, y)}\, dx\, dy} = \lim_{\varepsilon \to 0}[I(\varepsilon) - C(\varepsilon)\varepsilon^{1-\lambda}].$$

$G(x, y) > 0$ non nul sauf sur un arc T de la frontière du domaine D, λ non entier > 1, $A(x, y)$ continue non nul sur T, A et G ayant des dérivées continues jusqu'à un ordre $> \lambda$.

$I(\varepsilon)$ est l'intégrale prise sur la portion de D comprise entre T et la courbe $L(\varepsilon)$ lieu des points à une distance ε de T. $C(\varepsilon)$ choisie de telle sorte que la limite existe.

Si le contour T présente un point singulier, il pourra y avoir quelques difficultés; nous modifierons alors la définition. Par exemple

$$\sqrt{\int_0^X \int_0^Y \frac{A(x, y)}{x^{\lambda_1} y^{\lambda_2}}\, dx\, dy} = \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0}\left[I(\varepsilon_1, \varepsilon_2) - \frac{B_1(\varepsilon_1)}{\varepsilon_1^{\lambda_1 - 1}} - \frac{B_2(\varepsilon_2)}{\varepsilon_2^{\lambda_2 - 1}} - \frac{B_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{\varepsilon_1^{\lambda_1 - 1}\, \varepsilon_2^{\lambda_2 - 2}} \right],$$

I étant l'intégrale prise sur le domaine $0 \leqq x \leqq X$ et $0 \leqq y \leqq \varepsilon_2$, $0 \leqq x \leqq \varepsilon_1$ et $\varepsilon_2 \leqq y \leqq Y$.

Cette définition est indépendante du choix des axes et un changement de coordonnées est possible si le jacobien de la transformation ne s'annule pas sur T et si les dérivées existent jusqu'à un ordre $> \lambda$; cela revient en effet à remplacer $L(\varepsilon)$ par une autre courbe $\Lambda(\varepsilon)$.

Toutes les opérations sur les intégrales doubles peuvent s'effectuer en remarquant toutefois que dans les calculs il est inutile de tenir compte des infinis fractionnaires d'ordre $> \lambda$ puisqu'en définitive ils rentreront dans le terme complémentaire.

3° *Intégrale de Riesz.* — La définition précédente ne vaut que pour λ non entier. L'introduction d'une fonction de λ en dénominateur permet de lever cette restriction. Pour la définition, *voir* la transformation de Riesz, p. 62.

APPENDICE II.

Intégrales de Stieltjes a deux variables.

La généralisation de l'intégrale de Stieltjes à deux variables nécessite d'abord la généralisation de la définition de la variation totale d'une fonction sur un domaine.

Soit pour domaine le rectangle R_{ab} et les divisions

$$0 = x_0 \leqq x \leqq \ldots \leqq x_m = a \quad \text{et} \quad 0 = y_0 \leqq y \leqq \ldots \leqq y_n = b.$$

On appelle variation seconde de $\varphi(x, y)$ sur R_{ab} :

$$\overset{(2)}{\Delta} \varphi(x_i, x_j) = \varphi(x_{i+1}, y_{j+1}) - \varphi(x_{i+1}, y_j) - \varphi(x_i, y_{j+1}) + \varphi(x_i, y_j).$$

et variation totale de $\varphi(x, y)$ sur R_{ab} la borne supérieure de

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \overset{(2)}{\Delta} \varphi(x_i, y_j)$$

quand les points varient. On la note $V_\varphi(0, a; 0, b)$.

Si $\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} F(\xi_i, \eta_j) \overset{(2)}{\Delta} \varphi(x_i, y_j)$, $x_{i-1} < \xi_i < x_i$, $y_{j-1} < \eta_j < y_j$, tend vers une limite quand la plus grande dimension des subdivisions tend vers zéro, cette limite est appelée intégrale de Stieltjes de la fonction $F(x, y)$ pour la fonction déterminante $\varphi(x, y)$ et l'on note

$$I = \int_0^a \int_0^b F(x, y)\, d_x d_y\, \varphi(x, y).$$

Cette définition est celle donnée par Fréchet (*Nouv. Ann. Math.*, 4e série, vol. 10, 1910, p. 241-256).

On voit aisément qu'une condition nécessaire et suffisante de l'existence de I, indépendante du mode de subdivision, est que $F(x, y)$ soit continue et $V_\varphi(0, a; 0, b)$ soit bornée. Une fonction φ telle qu'il en soit ainsi est dite à variation bornée au sens de Vitali et nous écrirons $\varphi \in V$ (les définitions d'une fonction à variation bornée sont nombreuses, *voir* par exemple Adams et Clarkson, *Trans. Amer. math. Soc.*, vol. 35, 1933, p. 824-854; nous ne donnerons que celles qui ont été utilisées dans les travaux sur les transformations intégrales). Si $\varphi \in V$ et en outre si $\varphi(x_0, y)$ est, pour tout x_0, à variation bornée comme fonction de y et de même pour la fonction de x : $\varphi(x, y_0)$, alors $\varphi(x, y) \in H$, c'est-à-dire est à variation bornée au sens de Hardy.

Un cas particulier est celui où $\varphi(x, y) \in V$ et $\varphi(x, 0) = 0 = \varphi(0, y)$, alors $\varphi \in V_0$ par définition; $V_0 \subset H$ et $V_0 \subset V$. Nous pourrons toujours nous ramener à ce cas, en posant

$$\psi(x, y) = \varphi(x, y) - \varphi(x, 0) - \varphi(0, y) + \varphi(0, 0).$$

Alors $V_\varphi(0, a; 0, b) = V_\psi(0, a; 0, b)$ et les deux intégrales

$$\int_0^a \int_0^b F(x, y)\, d_x d_y \varphi(x, y) \qquad \text{et} \qquad \int_0^a \int_0^b F(x, y)\, d_x d_y \psi(x, y)$$

existent en même temps et ont la même valeur.

Comme exemple de fonctions appartenant à V_0 nous avons celles dont la dérivée seconde $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y}$ existe et est continue et l'intégrale est alors une intégrale de Riemann ou de Lebesgue :

$$\int_0^a \int_0^b F(x, y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y}\, dx\, dy.$$

Une fonction qui n'est pas dérivable mais satisfait à une condition du type de Lipschitz :

$$\Delta\varphi(x, y) \leqq Q\,|x_{i+1} - x_i|.|y_{j+1} - y_j| \quad \text{appartient à V.}$$

Une fonction absolument continue au sens de Carathéodory, c'est-à-dire qu'on peut représenter par une intégrale

$$\varphi(x, y) = \int_a^x \int_b^y F(u, v)\, du\, dv + \int_a^x G(u)\, du + \int_b^y H(v)\, dv + C$$

appartient à H.

Nous utiliserons surtout la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^a \int_0^b F(x, y)\, d_x\, d_y \varphi(x, y) = F(a, b)\varphi(a, b) &- \int_0^a \varphi(x, b) \frac{\partial F}{\partial x}(x, b)\, dx \\ &- \int_0^b \varphi(a, y) \frac{\partial F}{\partial y}(a, y)\, dy \\ &+ \int_0^a \int_0^b \varphi(x, y) \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\, dx\, dy,\end{aligned}$$

valable pour $\varphi \in V_0$ et F absolument continue.

Supposons $F(x, y) = f(x) g(y)$, f et g continues dans R_{ab} et $\varphi(x, y) \in V_0$, donc à variation bornée comme fonction de x ou de y seul. Alors

$$\int_0^b g(y)\, d_y \varphi(x, y) \qquad \text{et} \qquad \int_0^a f(x)\, d_x \varphi(x, y)$$

sont à variation bornée et

$$\begin{aligned}\int_0^a \int_0^b f(x) g(y)\, d_x\, d_y \varphi(x, y) &= \int_0^a f(x)\, d_x \left[\int_0^b g(y)\, d_y \varphi\right] \\ &= \int_0^b g(y)\, d_y \left[\int_0^a f(x)\, d_x \varphi\right]\end{aligned}$$

chaque intégrale ayant un sens.

Pour les intégrales infinies la définition adoptée est analogue à celles de Hardy. Mais si $\varphi(x, y)$ est définie dans Q et est à variation bornée dans tout rectangle fini, il n'est nullement certain qu'elle soit à variation bornée dans Q. On dira que $\varphi(x, y) \in V$ dans Q, si, en outre, $v(x, y) = V_\varphi(o, x; o, y)$ est bornée dans Q.

Par définition, on dit que $J(F, \varphi) = \int_0^\infty \int_0^\infty F(x, y)\, d_x\, d_y\, \varphi(x, y)$ converge absolument si $\int_0^\infty \int_0^\infty |F(x, y)|\, d_x\, d_y\, \varphi(x, y)$ converge

Posons

$$S(X, Y) = \int_0^X \int_0^Y F(x, y)\, d_x\, d_y\, \varphi(x, y) \qquad \text{et} \qquad S(X, o) = S(o, Y) = o.$$

La variation totale de $S(X, Y)$ est

$$V_S(o, X;\, o, Y) = \int_0^X \int_0^Y |F(x, y)|\, d_x\, d_y\, \varphi(x, y).$$

Donc une condition nécessaire et suffisante pour que $J(F, \varphi)$ converge absolument est que $S(X, Y)$ soit à variation bornée dans Q.

Si la convergence est absolue, nous avons

$$J(F, \varphi) = \lim_{X, Y \to \infty} S(X, Y) = \lim_{X \to \infty} \lim_{Y \to \infty} S(X, Y) = \lim_{Y \to \infty} \lim_{X \to \infty} S(X, Y).$$

Pour les intégrales répétées, nous devons utiliser la définition suivante :

Soit $\theta(x) = \lim\limits_{Y \to \infty} \int_0^Y g(y)\, d_y\, \varphi(x, y)$; si cette fonction existe et est à variation bornée sur (o, X) et si $\lim\limits_{X \to \infty} \int_0^X f(x)\, d_x\, \theta(x)$ existe, cette limite est appelée intégrale répétée. Nous aurons une définition analogue en intégrant d'abord par rapport à x.

Si $f(x)$ et $g(y)$ sont des fonctions continues et bornées, et si $\varphi(x, y) \in V_0$ sur Q, alors les intégrales $\int_0^\infty f(x)\, d_x \varphi$, $\int_0^\infty g(y)\, d_y \varphi$ et $\int_0^\infty \int_0^\infty f(x) g(y)\, d_x\, d_y \varphi$ convergent absolument et l'intégrale double est égale aux intégrales répétées définies ci-dessus.

APPENDICE III.

Opération de composition.

A deux ou n variables, la généralisation du produit de composition peut se faire de diverses manières. Cette généralisation est faite dans [**2***a*] par Amério, et Pistoïa en a étudié la convergence [**24***b*] en liaison avec la sommabilité de Cesàro.

Produit de composition superficiel. — Soient deux fonctions F_1 et F_2 définies pour $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, on appelle produit de composition superficiel de ces deux fonctions, la fonction

$$F_1 \overset{\infty}{\underset{-\infty}{\bigstar}} \overset{\infty}{\underset{-\infty}{\bigstar}} F_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\xi, \eta)\, F_2(x-\xi, y-\eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Si F_1 et F_2 sont nulles pour $x < 0$ et $y < 0$, le produit est défini également sur le premier quadrant :

$$F_1 \overset{x}{\underset{0}{\bigstar}} \overset{y}{\underset{0}{\bigstar}} F_2 = \int_0^x \int_0^y F_1(\xi, \eta) F_2(x-\xi, y-\eta)\, d\xi\, d\eta.$$

La sommabilité de Cesàro d'ordre α, $\beta > -1$ et au sens de la convergence bornée peut s'exprimer ainsi :

$F(x, y)$ est intégrable-(C; α, β) si

$$\lim_{x, y \to \infty} \frac{F(x, y) \overset{x}{\underset{0}{\bigstar}} \overset{y}{\underset{0}{\bigstar}} x^\alpha y^\beta}{x^\alpha y^\beta} = I_{\alpha, \beta} \quad \text{existe}$$

et si

$$\left| \frac{F \overset{x}{\underset{0}{\bigstar}} \overset{y}{\underset{0}{\bigstar}} x^\alpha y^\beta}{x^\alpha y^\beta} \right| < M \qquad \text{pour} \quad x > 0, \qquad y > 0,$$

Étudiant les propriétés de cette sommation de Cesàro, Pistoïa démontre que :

Si les fonctions $F(x, y)$ et $G(x, y)$ sont respectivement intégrable-(C; α, α) et (C; β, β) avec $-1 < \alpha < 0$ et $\beta = -(1+\alpha)$, on a

$$(1) \qquad \int_0^\infty du \int_0^\infty (F \bigstar \bigstar G)\, dv$$
$$= \left[\int_0^\infty du \int_0^\infty F(u, v)\, dv\right] \left[\int_0^\infty du \int_0^\infty G(u, v)\, dv\right].$$

La première intégrale du deuxième membre $= I_{0,0}(F) = I_{\alpha,\alpha}(F)$ puisque $\alpha < 0$, de même la deuxième est $I_{0,0}(G) = I_{\beta,\beta}(G)$ puisque $\beta < 0$, d'après le théorème de permanence de la sommation. D'où, on déduit de

$$I_{\alpha+\beta+1,\, \alpha+\beta+1}(F \bigstar \bigstar G) = I_{\alpha,\alpha}(F)\, I_{\beta,\beta}(G) \qquad \text{avec} \quad \alpha + \beta + 1 = 0,$$

la formule (1).

Produit de composition suivant un axe. — Soit $F(x, y)$ définie sur $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$ et $H(t)$ une fonction définie pour $-\infty < t < +\infty$.

On appelle produit de composition de $F(x, y)$ avec $H(t)$ suivant un axe faisant l'angle $\alpha\left(0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ avec l'axe Ox, la fonction

$$H(t) \underset{\alpha}{\star} F(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau) F(x - \tau\cos\alpha, y - \tau\sin\alpha)\, d\tau.$$

Si $F(x, y)$ est nulle pour x et $y < 0$ et de même $H(t)$, nous aurons

$$H(t) \underset{\alpha}{\star} F(x, y) = \int_0^{\min\left(\frac{x}{\cos\alpha}, \frac{y}{\sin\alpha}\right)} H(\tau) F(x - \tau\cos\alpha, y - \tau\sin\alpha)\, d\tau.$$

Cette définition peut servir à définir une sommation analogue à celle de Cesàro. Pistoïa dit que $H(t)$ est intégrable d'ordre (β, ω), $\beta > -\frac{1}{2}$, $0 \leqq \omega \leqq \frac{\pi}{2}$ si

$$\lim_{x, y \to 0} \frac{H(t) \underset{\omega}{\star} (xy)^\beta}{(xy)^\beta} = L_{(\beta, \omega)}(H) \quad \text{existe}$$

et si ses sections sont bornées pour tout x et $y > 0$.

On démontre comme précédemment que si $H(t)$ est intégrable d'ordre (β, ω) $0 > \beta > -\frac{1}{2}$, $0 \leqq \omega \leqq \frac{\pi}{2}$ et si $F(x, y)$ est intégrable-$(C; \gamma, \gamma)$ avec $\gamma = -(\beta + 1)$, alors

$$\int_0^\infty du \int_0^\infty \left(F \underset{\omega}{\star} H\right) dv = \left(\int_0^\infty H(\tau)\, d\tau\right)\left(\int_0^\infty du \int_0^\infty F(u, v)\, dv\right).$$

On peut généraliser ces définitions à n variables. On définit l'opération de composition suivant une variété linéaire à k dimensions $k \leqq n$,

$n = 2$, $k = 1$ correspond à la composition suivant un axe;

$n = k = 2$ correspond à la composition superficielle.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] R. P. Agarwal, *On self-reciproqual functions involving two complex variables* (*Ganita*, vol. 1, n° 1, June 1950, p. 17-25).

[2] L. Amério :

a. Sulla trasformata doppia di Laplace (*Atti della Reale Acc. It. Memorie*, vol. 12, fasc. 14, 1941, p. 707-780).

b. Relazioni tra il metodo della trasformata multipla di Laplace e il metodo di M. Riesz per l'integrazione di equazioni di tipo iperbolico (*Atti della Acc. Naz. dei Lincei Rend.*, 8e série, t. 5, 1948, p. 313-318; 8e série, t. 6, 1949, p. 48-52 et 175-180).

[3] K. P. Batnagar, *Certain theorems on self-reciproqual functions* (*Bull. Soc. Math. Calcutta*, t. 47, 1955, p. 43-52).

[4] D. L. Bernstein, *The double Laplace integral* (*Duke Math. J.*, t. 8, 1941, p. 460-496).

[5] S. Bochner et K. Chandrasekharan, *Fourier transforms*, Princeton, 1949.

[6] S. K. Bose, *Generalised Laplace integral of two variables* (*Ganita*, t. 3, n° 1, 1952, p. 23-35).

[7] Cauchy, *Œuvres*, 1re série, vol. 2, *Mémoires sur le calcul intégral*; 2e série, vol. 7, *Analogie des puissances et des différences*.

[8] Coon et D. L. Bernstein, *Some properties of the double Laplace Transformation* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 74, 1953, p. 135-176).

[9] H. Delange, *Théorèmes taubériens pour les séries multiples de Dirichlet et les intégrales multiples de Laplace* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 3e série, t. 70, 1953, p. 51-103).

[10] H. Delavault, *Application de la transformation de Laplace et de la transformation de Hankel à la détermination de solutions de l'équation de la chaleur et des équations de Maxwell en coordonnées cylindriques*. Préface de H. Villat (*Publ. scient. et tech. Min. Air*, S. D. I. T. Note technique n° 71, décembre 1957; *C. R. Acad. Sc* t. 236, 1953, p. 2484; t. 237, 1953, p. 1067; t. 244, 1957, p. 1146).

[11] P. Delerue, *Calcul symbolique à n variables et fonctions hyperbesséliennes* (*Thèse*, Montpellier, 1951; *C. R. Acad. Sc.*, t. 239, 1949, p. 807 et 916; t. 240, 1950, p. 912 et 1333).

Sur quelques images en calcul symbolique à trois ou n variables (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 76, juillet-août 1952).

Calcul symbolique à deux ou n variables et équations intégrales (*Ann. Soc. Sc. Bruxelles*, 1951).

Sur une généralisation à n variables des polynomes d'Abel-Laguerre (*Ann. Soc. Sc. Bruxelles*, 1952).

[12] G. Doetsch, *L'application de la transformation bidimensionnelle de Laplace dans la théorie des équations aux dérivées partielles* (1^er *Colloque sur les équations aux dérivées partielles*, Louvain, décembre 1953; G. Thone, Liège; Masson, Paris).

[13] G. Doetsch et D. Voelker, *Die zweidimensionale Laplace-Transformation*, Bâle, 1950.

[14] S. Fædo, *Sulle trasformate multiple di Laplace* (*Atti della Reale Acc. It. Rend.*, 7^e série, vol. 2, février 1941, p. 722-727).

[15] Hayashi, *Solutions transitoires pour les guides d'ondes à section rectangulaire, circulaire, et circulaire coaxiale* (*J. Inst. électr. Communic. Engers Japon*, t. 38, n° 2, février 1955, p. 97-102) (en japonais, résumé en anglais).

[16] P. Humbert, *Le calcul symbolique à deux variables* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 199, 1934, p. 657; *Ann. Soc. Sc. Bruxelles*, 1936, A, p. 26-43).

[17] P. Humbert et P. Delerue, *Sur une extension à deux variables de la fonction de Mittag-Leffler* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 237, 1953, p. 1059).

[18] J. C. Jæger, *The solution of boundary value problems by a double Laplace transformation* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 46, 1940, p. 687-693).

[19] J. Leray, *Hyperbolic differential equations*, 1953, Princeton, The institute for Advanced Study.

La solution unitaire d'un opérateur différentiel linéaire (*C. R. Acad. Sc.*, t. 245, 1957, p. 2146) (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1957).

Cours professé au Collège de France et ronéotypé : *Sur le problème de Cauchy* (1956-1957-1958).

[20] Mac Lachlan, P. Humbert et L. Poli, *Formulaire pour le calcul symbolique et son supplément* (*Mémorial Sc. math.*, fasc. C et CXIII, 1950).

[21] L. Magnaradze, *Théorème d'Abel pour la transformation double de Laplace* (*Soobščeniya Akad. Nauk. Gruzin. S. S. R.*, 1947, p. 113-119) (en russe).

[22] Mehra, *On Meijer transform of two variables* (*Bull. Soc. Math. Calcutta*, 1956, p. 83-94).

[23] M. Picone, *Nuovi metodi risolutivi per i problemi d'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali e nuova applicazione della trasformata multipla di Laplace nel caso delle equazioni a coefficienti costanti* (*Atti Acc. Sc. Torino*, t. 75, 1940, p. 1-14).

[24] A. Pistoia :

a. Alcuni teoremi tauberiani per la trasformata doppia di Laplace (*Ist. Lombardo Rend. cl. Sc. Math.*, 3^e série, t. 16, n° 85, 1952, p. 170-190).

b. Sul prodotto di composizione, nella teoria della trasformata doppia di Laplace (*Rend. dell Ist. Lombardo*, vol. 87, 1954, p. 627-652).

[25] L. POLI et P. DELERUE, *Le calcul symbolique à deux variables et ses applications* (*Mémorial Sc. math.*, fasc. CXXVII, 1954.)

[26] REED, *The type Mellin of double integral* (*Duke Math. J.*, t. 2, 1944, p. 565-572).

[27] M. RIESZ, *L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy* (*Acta math.*, t. 81, 1949, p. 1-223).

[28] I. N. SNEDDON, *Functional analysis* (*Handbuch der Physik*, Band II, *Matematische methoden*, II, 1955, Berlin).

[29] B. STANKOVIC, *Abbildung gewisser operationen durch die zweidimensionale Laplace-transformation* (*Acad. Serbe Sc.*, publication de l'Institut de Mathématiques, t. II, 1957, p. 1-8).

[30] M. F. TIMAN, *Integral transforms of a function of two variables* (*Soobšč. Akad. Nauk. Gruzin. S. S. R.*, t. 15, 1954, p. 135-142) (en russe).

[31] TITCHMARSH, *Eigenfunction expansions associated with partial differential equations* (*Proc. London Math. Soc.*, 3e série, t. 1, 1951, p. 1-27; t. 3, 1953, p. 80-98 et 153-169; t. 5, 1955, p. 1-21; *Qart. J. Math.*. Oxford, t. 2, 1953, p. 254-266).

[32] VAN DER POL et BREMMER, *Operational calculus based on the two-sided Laplace integral*, Cambridge, 1955.

[33] S. VASILACH, *Sur le problème de Cauchy pour l'équation*

$$\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial t^2} + \mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \lambda^2 u = f(x, y, z)$$

(*Rev. Math. pures et appl.*, Académie de la République populaire roumaine, t. 1, n° 2, 1956).

[34] J. C. VIGNAUX, *Un theorema sugl'integrali doppi Abel-Laplace* (*Rend. Reale Acc. Naz. dei Lincei*, t. 6, n° 17, 1933, p. 1055-1059).

Sur l'extension du théorème de Dirichlet aux intégrales doubles convergentes (*Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, t. 2, 1933).

[35] H. VILLAT :

a. Calcul symbolique à une ou deux variables. Application à la résolution d'équations différentielles et d'équations aux dérivées partielles (Cours professé en Sorbonne en 1952, non publié).

b. Les transformations intégrales et leurs applications à l'Hydrodynamique (Cours professé en Sorbonne en 1953, non publié).

[36] S. K. BOSE, *Bull. Math. Soc. Calcutta*, 1949, p. 173.

N. K. CHAKRABARTY, *Bull. Math. Soc. Calcutta*, t. 46, 1954, p. 220; t. 47, 1955, p. 239; *Ganita*, t. 4, 1953, n° 1, p. 1 et 129.

SRIVASTAVA, *Ann. Soc. Sc. Brnxelles*, t. 67, n° 1, 1953.

Supplément à la bibliographie.

S. Colombo, *Les transformations de Mellin et de Hankel* (C. N. R. S., 1959).

H. Delavault, *Détermination d'une fonction* F(*t*) *dont on connaît la transformée de Laplace en une infinité de points. Application* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 247, 1958, p. 1284).

J. Lavoine, *Transformées de Fourier inverses de fonctions singulières de l'électrodynamique* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 250, 1960, p. 2318).

Calcul symbolique, distributions et pseudo-fonctions (C. N. R. S., 1959).

J. Mikusinski et Ryll-Nadzewski, *Un théorème sur le produit de composition de fonctions de plusieurs variables* (*Studia Mathematica*, t. 13, 1953, p. 62-68).

A. P. Prudnikov, *The solution of a mixed boundary problem in the thermodiffusion theory* (*Dokl. Akad. Nauk. S. S. S. R.*, t. 120, 1957, p. 249).

S. Vasilach, *Un théorème fondamental dans la théorie de la transformation de Laplace à deux variables* (*Lucraribe Sesiunii Generale Stüntifice*, 12 juin 1950, éd. Acad. Rép. Pop. Roumaine, p. 255).

Sur l'existence d'une solution de l'équation intégrale définie par la transformée de Laplace à deux variables indépendantes (*Bull. Scient. Acad. Rép. Pop. Roumaine*, t. 3, n° 2, 1951, p. 209).

Sur quelques formules de la théorie de la transformation de Laplace à deux variables (*Comm. Acad. Rép. Pop. Roumaine*, t. 2, n^os 3-4, 1952, p. 193).

Sur une équation intégrale du type d'Abel à deux variables (*Comm. Acad. Rép. Pop. Roumaine*, t. 3, n^os 3-4, 1953, p. 109).

Sur un calcul opérationnel algébrique pour fonctions de deux variables (*Rev. Math. pures et appl.*, *Acad Rép. Pop. Roumaine*, t. 2, 1957, p. 181-238).

Calcul opérationnel algébrique des distributions à support dans $R_+^n n \geqq 1$ (*Rev. Math. pures et appl.*, *Acad. Rép. Pop. Roumaine*, t. 4, n° 2, 1959, p. 185-219).

TABLE DES MATIÈRES.