Mémorial des sciences mathématiques

D. Dugué

Arithmétique des lois de probabilités

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 137 (1957)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1957__137__1_0>

D. DUGUÉ

ARITHMÉTIQUE DES LOIS DE PROBABILITÉS

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Directeur : H. VILLAT

FASCICULE CXXXVII

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
Quai des Grands-Augustins, 55

1957

ARITHMÉTIQUE
DES LOIS DE PROBABILITÉS

Par D. DUGUÉ.

INTRODUCTION.

Étant données deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes dont les lois de probabilités totales sont $F_{X_1}(x)$ et $F_{X_2}(x)$ la loi de probabilité totale de la somme $Z = X_1 + X_2$ sera donnée par le produit de composition

$$F_Z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{X_1}(x-u)\, dF_{X_2}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{X_2}(x-u)\, dF_{X_1}(u).$$

En appelant fonction caractéristique $\varphi_X(t)$ de la variable X, l'intégrale de Fourier

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, dF_X(x).$$

On voit que

$$\begin{aligned}\varphi_Z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, dF_Z(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, d_x \int_{-\infty}^{+\infty} F_{X_1}(x-u)\, dF_{X_2}(u) \\ &= \int_{u=-\infty}^{+\infty} \int_{x=-\infty}^{+\infty} e^{it[u+(x-u)]}\, dF_{X_2}(u)\, d_x F_{X_1}(x-u) \\ &= \varphi_{X_1}(t)\, \varphi_{X_2}(t).\end{aligned}$$

Donc :

Théorème. — *Si deux variables aléatoires* X_1 *et* X_2 *sont indépendantes, la fonction caractéristique de leur somme* Z *est le produit des fonctions caractéristiques de* X_1 *et* X_2.

Dans ce cas X_1 et X_2 sont dites composantes de Z.

Il n'est pas vrai que, réciproquement, si X_1 et X_2 sont tels que

$$\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t)\,\varphi_{X_2}(t),$$

X_1 et X_2 sont obligatoirement indépendantes (*voir* M. Girault [1], chap. I).

On aura simplement dans ce cas

$$F_{X_1+X_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{X_1}(x-u)\,dF_{X_2}(u).$$

La transformation de Fourier fait donc correspondre au produit de composition de F_1 par F_2 (noté $F_1^\star F_2$) le produit des fonctions caractéristiques.

Le problème de l'arithmétique des lois de probabilités consiste à rechercher, étant donnée une loi de probabilité totale $F_Z(z)$, toutes les lois de probabilités de X_1 et X_2 telles que $F_Z = F_{X_1}^\star F_{X_2}$; ce qui revient étant donnée la fonction caractéristique $\varphi_Z(t)$ à rechercher toutes les fonctions caractéristiques $\varphi_{X_1}(t)$ et $\varphi_{X_2}(t)$, telles que $\varphi_Z(t) = \varphi_{X_1}(t)\,\varphi_{X_2}(t)$ (ce que l'on appelle rechercher les diviseurs de $\varphi_Z(t)$ ou les diviseurs de la loi initiale).

En particulier, si une telle décomposition est possible, à la variable Z, on peut associer deux variables X_1 et X_2 qui sont ses composantes.

Notation. — On posera $\log\varphi_Z(t) = \psi_Z(t)$; ψ sera dite seconde fonction caractéristique. On a $\psi_Z(t) = \psi_{X_1}(t) + \psi_{X_2}(t)$ dans les mêmes conditions.

Sauf notation contraire on supposera t réel. $F_X(x) = \text{Prob}(X < x)$ est une fonction continue à gauche $F(x) = F(x-0)$.

CHAPITRE I.

Propriétés de la fonction caractéristique.

Donnons tout d'abord la formule de réciprocité de Fourier :

THÉORÈME I.1. — *Si $\varphi(t)$ est la fonction caractéristique de la loi* *de probabilité totale* $F(x)$, *on a* (*avec* $x \geqq y$)

$$\text{(I.1)} \qquad \frac{F(x+0)+F(x-0)}{2} - \frac{F(y+0)+F(y-0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \lim_{T=+\infty} \int_{-T}^{+T} \frac{e^{-ity}-e^{-itx}}{it} \varphi(t)\,dt.$$

En effet, le théorème de Fubini s'appliquant ici, on a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{+T} \frac{e^{-ity}-e^{-itx}}{it}\varphi(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dF(u)\int_{-T}^{+T} \frac{e^{it(u-y)}-e^{it(u-x)}}{it}\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dF(u)\int_{0}^{T}\left(\frac{\sin t(u-y)}{t} - \frac{\sin t(u-x)}{t}\right)dt. \end{aligned}$$

Quand T augmente indéfiniment, la seconde intégrale tend :

— vers zéro, si $u > x$ ou $u < y$;

— vers π si $y < u < x$;

— vers $\frac{\pi}{2}$ si $u = x$ ou y;

et les deux premières limites sont atteintes uniformément si u est intérieur à un intervalle fermé compris dans les domaines indiqués. Il en résulte immédiatement l'égalité (I.1) et celle qu'on en déduit si $F(x)$ est continue en x ou y. Cette égalité détermine entièrement F en posant $F(-\infty) = 0$. On en déduit :

Corollaire. — *Si* $F(x)$ *est dérivable et si les conditions de passage à la limite après dérivation sous le signe d'intégration sont remplies, on a*

$$F'(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T=+\infty} \int_{-T}^{+T} e^{-itx} \varphi(t)\,dt.$$

Remarque. — Ces conditions sont remplies en particulier si $|\varphi(t)|$ est intégrable entre $-\infty$ et $-\infty$.

Théorème I.2. — *Si* $\varphi(t)$ *est une fonction indéfiniment dérivable et si la série* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} t^n$ *converge dans un cercle de rayon* R, *la fonction* $\varphi(t)$ *est analytique dans la bande* $-R < \mathfrak{I}t < +R$.

Ce théorème très important en arithmétique des lois de probabilité se trouve dans P, Lévy [1], p. 40.

Posons

$$\mathcal{R}(t) = \frac{\varphi(t)+\varphi(-t)}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos tx \, dF(x).$$

Si $\varphi(t)$ est indéfiniment dérivable, il en est de même de $\mathcal{R}(t)$ dont les dérivées à l'origine d'ordre impair sont nulles par raison de symétrie. On aura donc

$$-\mathcal{R}''(0) = \lim_{t=0} 2\frac{1-\mathrm{R}(t)}{t^2} = \lim_{t=0}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\frac{(1-\cos tx)}{t^2}\, dF(x).$$

On a donc pour t assez grand

$$-\mathcal{R}''(0)+\varepsilon > \int_{-\frac{1}{t}}^{+\frac{1}{t}} 2\frac{(1-\cos tx)}{t^2}\, dF(x)$$

$$> \int_{-\frac{1}{t}}^{+\frac{1}{t}} \left(x^2 - \frac{t^2x^4}{12}\right) dF(x) > \frac{11}{12}\int_{-\frac{1}{t}}^{+\frac{1}{t}} x^2\, dF(x).$$

On en déduit l'existence de $E(x^2) = M_2$. Par une majoration analogue on déduira de l'existence de $\mathcal{R}^{(2n)}(0)$ celle de M_{2n}. Donc l'existence de la suite infinie des dérivées de $\varphi(t)$ entraîne l'existence des moments de tous ordres. De l'existence de ces moments on déduit immédiatement que

$$\varphi^{(p)}(0) = (i)^p\, M_p.$$

On a donc

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, dF(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{it}{1\,!}x + \ldots + \frac{(it)^n}{n\,!}x^n + \frac{(it)^{n+1}}{(n+1)\,!}x^{n+1}e^{i\theta tx}\right) dF(x),$$

avec $0 \leqq \theta \leqq 1$,

$$= 1 + \frac{iM_1}{1\,!}t + \ldots + \frac{(i)^n M_n}{n\,!}t^n + \frac{(it)^{n+1}}{(n+1)\,!}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\theta tx}x^{n+1}\, dF(x)$$

$$= 1 + \frac{\varphi'(0)}{1\,!}t + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n\,!}t^n + \mathcal{R}_{n+1}.$$

On a

$$\mathcal{R}_{n+1} < \frac{t^{n+1}}{(n+1)\,!}\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{n+1}\, dF(x).$$

En particulier, si $n+1$ est pair et égal à $2p$,

$$|\mathcal{R}_{2p}| < \frac{t^{2p}}{(2p)!}|\varphi^{(2p)}(0)|$$

qui tend vers zéro d'après les hypothèses du théorème si $|t|$ est inférieur au rayon de convergence de la série.

Il en résulte l'analyticité de $\varphi(t)$ à l'intérieur du cercle de convergence de la série. Remplaçons t par $i\mathrm{Y}$ dans la série

$$1 - \frac{\mathrm{M}_1\mathrm{Y}}{1!} + \frac{\mathrm{M}_2}{2!}\mathrm{Y}^2 + \ldots + \frac{(-1)^n\mathrm{M}_n\mathrm{Y}^n}{n!} + \ldots$$

converge si $|\mathrm{Y}| < \mathrm{R}$. Or

$$1 - \frac{\mathrm{M}_1\mathrm{Y}}{1!} + \frac{\mathrm{M}_2\mathrm{Y}^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^n\mathrm{M}_n}{n!}\mathrm{Y}^n + \ldots = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathrm{Y}x}\,d\mathrm{F}(x).$$

Donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mathrm{X}x-\mathrm{Y}x}\,d\mathrm{F}(x)$ existe et représente une fonction analytique si $|\mathrm{Y}| < \mathrm{R}$. Cette fonction est égale à $\varphi(\mathrm{X}+i\mathrm{Y})$. Le théorème est établi.

Remarque. — 1° La démonstration montre que $\varphi(\mathrm{X}+i\mathrm{Y})$ est analytique dans la bande définie par $\alpha < \mathrm{Y} < \beta$ telle que pour ces valeurs de Y, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathrm{Y}x}\,d\mathrm{F}(x)$ est convergente.

2° Le cercle de convergence de la série représentant $\varphi(\mathrm{X}+i\mathrm{Y})$ passant par un point singulier de la fonction et ce point ne pouvant être intérieur à la bande $-\mathrm{R} < \mathcal{I}t < +\mathrm{R}$, il en résulte que ce point est sur l'axe imaginaire pur. C'est le point singulier le plus voisin de l'origine.

Théorème 1.3. — *Une fonction caractéristique est toujours égale à la somme de sa série de Fourier prise dans un certain intervalle (la convergence est uniforme).*

Pour que la série de Fourier d'une fonction $\varphi(t)$ converge vers $\varphi(t)$, il faut et il suffit que

$$\mathrm{A} = \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(p+\frac{1}{2}\right)u}{u}\left[\varphi(t) - \frac{\varphi(t+u)+\varphi(t-u)}{2}\right]du$$

tende vers zéro quand p augmente indéfiniment (l'intervalle où la fonction est développée en série de Fourier est ici $0, 2\pi$; un changement d'échelle très simple montrera aisément que le résultat est général). Ici

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\mathrm{F}(x).$$

Il faut donc établir que

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(p+\frac{1}{2}\right)u}{u}\, du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}(1-\cos ux)\, d\mathrm{F}(x) \quad \text{tend vers zéro.}$$

La permutation des intégrales est encore possible $\Big[$le reste de l'intégrale majoré par $\mathrm{K}[1-\mathrm{F}(\mathrm{M})+\mathrm{F}(-\mathrm{M})]$, K étant constante$\Big]$. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, d\mathrm{F}(x) \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(p+\frac{1}{2}\right)u}{u}(1-\cos ux)\, du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, d\mathrm{F}(x) \left[\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(p+\frac{1}{2}\right)u}{u}\, du - \frac{1}{2} \right. \\
&\qquad \times \left\{ \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(p+x+\frac{1}{2}\right)u}{u}\, du \right. \\
&\qquad \left.\left. + \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(p-x+\frac{1}{2}\right)u}{u}\, du \right\} \right].
\end{aligned}$$

Prenons M assez grand pour que $1-\mathrm{F}(\mathrm{M})+\mathrm{F}(-\mathrm{M})$ soit inférieur à ε. Puis prenons $p-\mathrm{M}+\frac{1}{2}$ assez grand pour que, x étant compris entre $-\mathrm{M}$ et $+\mathrm{M}$, la somme

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(p+x+\frac{1}{2}\right)u}{u}\, du + \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(p-x+\frac{1}{2}\right)u}{u}\, du$$

soit voisine à ε' près de sa limite, soit

$$2\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du = \pi.$$

En dehors de ces conditions, en particulier si x est extérieur à l'intervalle $-M, +M$ la parenthèse facteur de $e^{itx}\,dF(x)$ est bornée par un nombre B indépendant de x.

On a donc

$$|A| < B[1 - F(M) + F(-M)] + [F(M) - F(-M)]\varepsilon' < B\varepsilon + \varepsilon'.$$

Le théorème I.3 est établi (si t était égale à l'une des valeurs frontières de l'intervalle où est calculée la série de Fourier (ici $+\pi$ ou $-\pi$) la valeur $\varphi(t)$ devrait être remplacée par $\frac{\varphi(+\pi)+\varphi(-\pi)}{2}$ (*voir* Dugué [1]).

THÉORÈME I.4. — *Si la fonction caractéristique* $\varphi(X+iY)$ *est analytique dans la bande* $a < Y < b$, *la fonction réelle* $\log\varphi(iY)$ *est une fonction convexe de* Y *pour* $a < Y < b$.

Ce théorème est un théorème analogue au théorème de M. Hadamard, dit théorème des trois cercles (*voir* Dugué [2]).

On a

$$|\varphi(X+iY)| < \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{iXx-Yx}|\,dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Yx}\,dF(x) = \varphi(iY)$$

$$\text{pour} \quad a < Y < b.$$

Prenons Y_1 et Y_3 compris entre a et b ($Y_1 < Y_3$), la fonction $e^{i\alpha(X+iY)}\varphi(X+iY)$ (α réel) sera analytique dans la bande comprise entre les parallèles à l'axe réel passant par Y_1 et Y_3. Le maximum du module sera atteint sur le contour, donc au point iY_1 ou iY_3 d'après l'inégalité précédente. Prenons α tel que

$$e^{-\alpha Y_1}\varphi(iY_1) = e^{-\alpha Y_3}\varphi(iY_3).$$

On a

$$\alpha = \frac{\log\varphi(iY_3) - \log\varphi(iY_1)}{Y_3 - Y_1}.$$

Il en résulte si $Y_1 < Y_2 < Y_3$ que

$$e^{-\alpha Y_2}\varphi(iY_2) \leqq e^{-\alpha Y_3}\varphi(iY_3),$$

avec la valeur de α ainsi déterminée, ce qui entraîne

$$\frac{\log\varphi(iY_3) - \log\varphi(iY_1)}{Y_3 - Y_1} \leqq \frac{\log\varphi(iY_3) - \log\varphi(iY_2)}{Y_3 - Y_2}$$

et établit le théorème. L'égalité entraîne que $\varphi(iY) = e^{\alpha Y}$ et, par suite, $\varphi(X+iY) = e^{-i\alpha(X+iY)}$. La variable aléatoire prend la valeur $-\alpha$ avec la probabilité unité.

Si donc la fonction caractéristique $\varphi(t)$ est analytique, $\psi(t)$ l'étant aussi il en résulte que $\psi(it)$ est une fonction convexe de t, pour t réel et $a < t < b$. On pose parfois, dans ce cas,

$$\psi(it) = c_1 t + \frac{c_2}{2!} t^2 + \ldots + \frac{c_n}{n!} t^n + \ldots,$$

c_1, c_2, c_n sont les semi-invariants ou cumulants selon la terminologie de Sir R. A. Fisher [1]. Si $it = 1$ fait partie de la bande d'analyticité, on a

$$c_2 + \frac{c_3}{1!} + \ldots + \frac{c_n}{(n-2)!} + \ldots \geqq 0.$$

Remarque. — Le raisonnement fait sur la convexité peut s'étendre à toute fonction analytique telle que le maximum de son module sur une parallèle à l'axe réel soit atteint sur l'axe imaginaire pur. On en déduit comme cas particulier le fait que

$$\sqrt[n]{\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n \, dF(x)}$$

est une fonction croissante de n (*voir*, par exemple, Dugué [2]).

Enfin nous donnerons le théorème suivant :

THÉORÈME 1.5. — *Si une suite de fonctions caractéristiques $\varphi_n(t)$ tend vers une limite $\varphi(t)$ quel que soit t, $\mathcal{R}\,\varphi(t)$ étant continue au voisinage de $t = 0$, $\varphi(t)$ est une fonction caractéristique.*

M. Paul Lévy a donné le premier énoncé concernant ce théorème dans Lévy [2] (p. 197-200) la condition $\mathcal{R}\varphi(t)$ *continue en* $t = 0$ *étant remplacée par $\varphi_n(t)$ tend uniformément vers $\varphi(t)$ dans un intervalle arbitrairement petit entourant l'origine.* V. Glivenko avait ensuite donné un résultat analogue dans V. Glivenko [1]. Cramer [1] a remplacé cette condition par $\varphi(t)$ continue à l'origine. Dugué a donné la condition $\mathcal{R}\,\varphi(t)$ continue en $t = 0$ dans (Dugué [3]).

La démonstration utilise le fait qu'un ensemble infini de lois de probabilité est compact (au sens de M. Fréchet). La condition imposée à $\mathcal{R}\,\varphi(t)$ d'être continue en $t = 0$ entraîne que cet ensemble est compact en soi (les éléments limites sont des lois de probabilité). D'une suite infinie de lois de probabilités dont les fonctions caractéristiques tendent vers $\varphi(t)$ [$\mathcal{R}\varphi(t)$ continue en $t=0$], on peut donc extraire une suite partielle convergeant vers une loi limite. En vertu du théorème direct (*voir*, en particulier, P. Lévy [1], p. 48), les fonctions caractéristiques des lois de probabilité de cette suite partielle vont tendre vers la fonction caractéristique de la loi limite qui va être égale à $\varphi(t)$, ce qui établit le théorème I.5.

Remarquons enfin pour terminer ce chapitre qu'une fonction caractéristique entière est au moins d'ordre 1 : elle est effectivement d'ordre 1 si la variable aléatoire est bornée.

La remarque 2° du théorème I.2 montre que le point singulier *le plus proche de l'origine* est sur l'axe imaginaire pur, mais on peut construire des fonctions caractéristiques méromorphes ayant des pôles aux points $-x_0+iy_0$ et $+x_0+iy_0$ sans que le point iy_0 soit un pôle (*voir* Dugué [4] et Lukacs [2]).

Enfin si une fonction caractéristique est d'ordre 1, l'exposant de convergence de ses zéros est aussi d'ordre 1 (sinon en ajoutant une constante à la variable aléatoire on obtiendrait une fonction caractéristique d'ordre inférieur à 1).

CHAPITRE II.

CONDITIONS NÉCESSAIRES OU SUFFISANTES POUR QU'UNE FONCTION SOIT CARACTÉRISTIQUE.

Il ne semble guère possible (ce qui est très gênant pour le problème de l'arithmétique des lois de probabilité) de mettre sous une forme plus maniable la condition exprimée par le théorème I.1. Nous donnerons dans ce chapitre deux conditions nécessaires et suffisantes : celles de Mathias Bochner, et celle de Khintchine tout en remarquant qu'elles sont aussi difficiles à appliquer que la formule d'inversion de Fourier. Ensuite nous donnerons des conditions suffisantes ainsi que des propriétés de la fonction caractéristique.

On voit aisément qu'une fonction caractéristique doit être :

a. continue; *b*. hermitienne; *c*. égale à 1 pour $t=0$ et inférieure ou égale à 1 en module pour $t\neq 0$.

Avant d'établir le théorème de Mathias Bochner, donnons le lemme suivant :

Lemme A. — *Si $\varphi(t)$ est continue et telle que l'on ait uniformément en x et x_0*

$$F(x)-F(x_0)=\lim_{T=\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+T}\frac{e^{-itx_0}-e^{-itx}}{it}\varphi(t)\,dt,$$

avec $F(x)$ *non décroissante telle que*

$$F(+\infty)-F(-\infty)=1,$$

on a

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\,dF(x).$$

Ce lemme est la réciproque du théorème I.1.

1° Nous l'établirons tout d'abord dans le cas où $\varphi(t)$ est nul en dehors de l'intervalle $-T$, $+T$. On a donc dans ce cas

$$F(x)-F(x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{+T}\frac{e^{-itx_0}-e^{-itx}}{it}\varphi(t)\,dt.$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\,dF(x)&=\lim_{M=+\infty}\int_{-M}^{+M}e^{itx}\,dF(x)\\&=\lim_{M=+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{+M}e^{itx}\,d_x\int_{T}^{+T}\frac{e^{-iux_0}-e^{-iux}}{iu}\varphi(u)\,du\\&=\lim_{M+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{+M}e^{itx}\,dx\int_{-T}^{+T}e^{-iux}\varphi(u)\,du.\\&=\lim_{M=+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{+T}\varphi(u)\,du\int_{-M}^{+M}e^{i(t-u)x}\,dx\\&=\lim_{M=+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{+T}\frac{\sin M(t-u)}{(t-u)}\varphi(u)\,du.\end{aligned}$$

Cette égalité entraîne que la somme de la série de Fourier de la fonction $\varphi(t)$ prise dans l'intervalle $-T$, $+T$ converge vers $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\,dF(x)$. Or $\varphi(t)$ étant continue, la somme de cette série (supposée convergente) ne peut être que $\varphi(t)$ en vertu du théorème de Fejer; on a donc dans ce cas

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, d\mathrm{F}(x).$$

2° Considérons la loi de probabilité de Khintchine

$$\mathrm{K}_\mathrm{T}(x) = \int_{-\infty}^{x\mathrm{T}} \frac{1}{\pi}\, \frac{1-\cos u}{u^2}\, du$$

dont la fonction caractéristique est

$$k_\mathrm{T}(t) = 1 - \frac{|t|}{\mathrm{T}} \qquad \text{si} \quad |t| \leqq \mathrm{T},$$

et zéro si t est extérieur à cet intervalle. Considérons la fonction non décroissante

$$\mathrm{H}_\mathrm{T}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{F}(x-y)\, d\mathrm{K}_\mathrm{T}(y).$$

On a

$$\mathrm{H}_\mathrm{T}(+\infty) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{H}_\mathrm{T}(-\infty) = 0.$$

Montrons que

$$\varphi(t) k_\mathrm{T}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, d\mathrm{H}_\mathrm{T}(x).$$

En vertu du résultat précédent, il suffira d'établir que

$$\mathrm{H}_\mathrm{T}(x) - \mathrm{H}_\mathrm{T}(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\mathrm{T}}^{+\mathrm{T}} \frac{e^{-itx_0} - e^{-itx}}{it}\, \varphi(t)\, k_\mathrm{T}(t)\, dt,$$

puisque $\varphi(t) k_\mathrm{T}(t)$ est nul en dehors de l'intervalle $-\mathrm{T}$, $+\mathrm{T}$.

Cela revient à montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\mathrm{F}(x-y) - \mathrm{F}(x_0-y)]\, d\mathrm{K}_\mathrm{T}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\mathrm{T}}^{+\mathrm{T}} \frac{e^{-itx_0} - e^{-itx}}{it}\, \varphi(t) k_\mathrm{T}(t)\, dt,$$

avec

$$\mathrm{F}(x-y) - \mathrm{F}(x_0-y) = \lim_{\mathrm{M}=\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\mathrm{M}}^{+\mathrm{M}} \frac{e^{-it(x_0-y)} - e^{-it(x-y)}}{it}\, \varphi(t)\, dt$$

et

$$d\mathrm{K}_\mathrm{T}(y) = \frac{1}{2\pi}\, dy \int_{-\mathrm{T}}^{+\mathrm{T}} e^{-iuy}\, k_\mathrm{T}(u)\, du.$$

Puisque

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\mathrm{M}}^{+\mathrm{M}} \frac{e^{-itx_0} - e^{-itx}}{it}\, \varphi(t)\, dt$$

tend uniformément en x et x_0 vers $F(x) - F(x_0)$ et que

$$K_T(+\infty) - K_T(-\infty) = 1,$$

on voit facilement que l'on peut trouver deux nombres N_1 et M_1 tels que l'ensemble des inégalités $N > N_1$ et $M > M_1$ entraîne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [F(x-y) - F(x_0-y)]\, dK_T(y)$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-N}^{+N} dy \int_{-M}^{+M} \frac{e^{-it(x_0-y)} - e^{-it(x-y)}}{it} \varphi(t)\, dt \int_{-T}^{+T} e^{-iuy} k_T(u)\, du + \frac{\varepsilon}{2},$$

ε étant arbitrairement petit. Il en résulte que dans les mêmes conditions on a

$$-\frac{\varepsilon}{2} + \int_{-\infty}^{+\infty} [F(x-y) - F(x_0-y)]\, dK_T(y)$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-M}^{+M} \frac{e^{-itx_0} - e^{-itx}}{it} \varphi(t)\, dt \int_{-T}^{+T} k_T(u)\, du \int_{-N}^{+N} e^{iy(t-u)}\, dy$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{+M} \frac{e^{-itx_0} - e^{-itx}}{it} \varphi(t)\, dt \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{+T} \frac{\sin N(t-u)}{(t-u)} k_T(u)\, du.$$

Quand N augmente indéfiniment, $\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{+T} \frac{\sin N(t-u)}{t-u} k_T(u)\, du$ tend vers $k_T(t)$ uniformément dans l'intervalle $-M, +M$.

On peut donc trouver $N_2 > N_1$ tel que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{+M} \frac{e^{-itx_0} - e^{-itx}}{it} \varphi(t)\, dt \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{+T} \frac{\sin N(t-u)}{t-u} k_T(u)\, du$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{+M} \frac{e^{-itx_0} - e^{-itx}}{it} \varphi(t)\, k_T(t)\, dt + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc il en résulte que pour $M > M_1$, avec ε arbitrairement petit,

$$-\varepsilon + \int_{-\infty}^{+\infty} [F(x-y) - F(x_0-y)]\, dK_T(y)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{+M} \frac{e^{-itx_0} - e^{-itx}}{it} \varphi(t)\, k_T(t)\, dt.$$

Comme $k_T(t) = 0$ pour $|t| > T$ la formule est établie.

3° L'égalité que nous venons d'établir entraîne, nous l'avons vu, que

$$\varphi(t) k_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, dH_T(x).$$

Quand T augmente indéfiniment, $k_T(t)$ tend vers un. $H_T(x)$ loi de probabilité de la variable aléatoire somme de la variable ayant $F(x)$ pour loi de probabilité et d'une variable tendant en probabilité vers zéro va tendre vers $F(x)$, sauf peut-être aux points de discontinuité de cette fonction. D'après le théorème direct invoqué à propos de la démonstration du théorème I.5, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, dH_T(x)$ tend donc vers $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, dF(x)$.

On a donc à la limite

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, dF(x)$$

et le lemme A est établi.

Ce résultat va nous permettre d'établir le théorème de Mathias Bochner :

THÉORÈME II.1 (Mathias Bochner). — *Pour qu'une fonction $\varphi(t)$ soit caractéristique, il est nécessaire et suffisant que $\varphi(0) = 1$, que $\varphi(t)$ soit continue et que $\varphi(t)$ soit définie positive.*

La démonstration que nous allons donner est celle donnée par M. Loève [1] légèrement modifiée.

1° La condition est nécessaire [résultat évident pour $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(t)$ continue]. D'autre part,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} \varphi(u_i - u_j) Z_i \overline{Z}_j &= \sum_{i,j=1}^{n} \int e^{i(u_i - u_j)x} Z_i \overline{Z}_j \, dF(x) \\
&= \int \left[\sum_{i,j=1}^{n} e^{iu_i x} Z_i \, e^{-iu_j x} \overline{Z}_j \right] dF(x) \\
&= \int \left[\sum_{i=1}^{n} e^{iu_i x} Z_i \right] \left[\sum_{j=1}^{n} e^{-iu_j x} \overline{Z}_j \right] dF(x) \\
&= \int \left| \sum_{i=1}^{n} e^{iu_i x} Z_i \right|^2 dF(x) > 0.
\end{aligned}$$

Si $\varphi(t)$ est caractéristique, $\varphi(t)$ est donc définie positive.

La condition est suffisante. En effet, considérons l'expression

$$f_Z(x) = \frac{1}{2\pi Z}\int_0^t \int_0^Z \varphi(u-v)\, e^{-iux} e^{ivx}\, du\, dv.$$

D'après la definition de l'intégrale de Riemann cette fonction, limite d'expressions positives d'après la propriété de $\varphi(t)$ d'être définie positive, sera positive.

Après un changement de variables, on a

$$f_Z(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-Z}^{+Z} e^{-itx}\left(1-\frac{|t|}{Z}\right)\varphi(t)\, dt$$

ou en posant

$$\int_0^x f_Z(u)\, du = G_Z(x)$$

[$G_Z(x)$ sera non décroissante]

$$G_Z(x) - G_Z(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-Z}^{+Z} \frac{e^{-itx_0} - e^{-itx}}{it}\varphi(t)\left(1-\frac{|t|}{Z}\right) dt.$$

Considérons la fonction $\gamma_Z(t)$ égale a $\varphi(t)\left(1-\frac{|t|}{Z}\right)$ pour $|t| < Z$ et nulle en dehors de cet intervalle; d'après le 1° du lemme A, il suffira pour établir que $\gamma_Z(t)$ est égale à $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, dG_Z(x)$ de montrer que

$$G_Z(+\infty) - G_Z(-\infty) = 1.$$

Or

$$G_Z(x) - G_Z(-x) = \frac{1}{\pi}\int_{-Z}^{+Z} \frac{\sin tx}{t}\varphi(t)\left(1-\frac{|t|}{Z}\right) dt,$$

$G_Z(x) - G_Z(-x)$ étant non décroissant tend évidemment vers une limite. D'après l'égalité, cette limite est la somme pour $t = 0$ de la série de Fourier de la fonction $\varphi(t)\left(1-\frac{|t|}{Z}\right)$ prise dans l'intervalle $-Z$, $+Z$.

Comme $\varphi(t)\left(1-\frac{|t|}{Z}\right)$ est continue et égale a 1 pour $t = 0$, on en déduit que

$$\lim_{x=+\infty} G_Z(x) - G_Z(-x) = 1,$$

$\gamma_Z(t)$ étant une fonction caractéristique et sa limite $\varphi(t)$ quand Z tend vers l'infini étant continue en $t=0$, il en résulte d'après le théorème I.5 que $\varphi(t)$ est caractéristique.

THÉORÈME II.2. — *Pour que $\varphi(t)$ soit caractéristique, il est nécessaire et suffisant que l'on ait $\varphi(t)$ égale à la limite uniforme en t dans tout intervalle fini d'expressions de la forme*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t+u)\overline{g(u)}\,du, \qquad \text{avec} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |g(u)|^2\,du = 1.$$

Ce théorème est dû à Khintchine. La démonstration que nous donnons est celle de M. Girault [1] en ce qui concerne la condition nécessaire.

1° La condition est nécessaire : *a*. Soit $F(x)$ une loi absolument continue telle que

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy,$$

avec $\sqrt{f(y)}$ sommable. Posons

$$\sqrt{f(y)} = h(y) \qquad \text{et} \qquad H(x) = \int_{-\infty}^{x} h(y)\,dy,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} h(y)\,e^{iyt}\,dy = g(t).$$

On aura presque partout

$$dH(y) = h(y)\,dy.$$

Montrons que

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} f(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t+u)\overline{g(u)}\,du.$$

En effet, prenons

$$g(t+u)\overline{g(u)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(y)\,e^{iy(t+u)}\,dy \int_{-\infty}^{+\infty} h(z)\,e^{-izu}\,dz.$$

Les conditions d'intégration sous le signe $\int$ étant remplies, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t+u)\overline{g(u)}\,du$$
$$= \lim_{M=\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(y)\,h(z)\,e^{iyt}\,\frac{\sin M(y-z)}{y-z}\,dy\,dz.$$

Posons $y - z = s$. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t+u)\overline{g(u)}\,du = \lim_{M=\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(y)\,e^{iyt}\,dy \int_{-\infty}^{+\infty} h(y-s)\frac{\sin Ms}{s}\,ds$$

$$= \lim_{M=\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(y)\,e^{iyt}\,d\int_{-\infty}^{+\infty} H(y-s)\frac{\sin Ms}{s}\,ds;$$

H étant une fonction monotone, le théorème de Jordan sur les séries de Fourier peut s'appliquer ainsi que le théorème de Lebesgue de convergence des intégrales.

On a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t+u)\overline{g(u)}\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} h(y)\,e^{iyt}\,dH(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(y)\,e^{iyt}\,dy = \varphi(t).$$

On a

$$\varphi(0) = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(u)|^2\,du.$$

b. Si $F(x)$ ne répond pas aux conditions imposées, la théorie des fonctions montre qu'elle peut être approchée arbitrairement près par des lois de probabilités répondant aux conditions imposées. Il en résulte que $\int e^{itx}\,dF(x)$ est la limite atteinte uniformément dans tout intervalle fini de fonctions caractéristiques de la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t+u)\,\overline{g(u)}\,du.$$

Cela établit que la condition est nécessaire.

2° La condition est suffisante : *a*. Soit

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t+u)\,\overline{g(u)}\,du, \qquad \text{avec} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |g(u)|^2\,du = 1.$$

On a évidemment $f(0) = 1$; $f(t)$ est continue. En effet,

$$|f(t+h) - f(t)| \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} |[g(t+h+u) - g(t+u)]\,\overline{g(u)}|\,du$$

$$\leqq \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t+h+u) - g(t+u)|^2\,du\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |g(u+h) - g(u)|^2\,du\right]^{\frac{1}{2}},$$

$g(u)$ étant de carré sommable de $-\infty$ à $+\infty$, il en résulte (*voir*, par exemple, TITCHSMARSH, *The theory of functions*, chap. XII), que $f(t+h)-f(t)$ tend vers zéro avec h.

$f(t)$ est définie positive. En effet,

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} f(t_i-t_j)Z_i\overline{Z}_j &= \sum_{i,j=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t_i-t_j+u)\overline{g(u)}\,Z_i\overline{Z}_j\,du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{i,j=1}^{n} g(t_i+u)\overline{g(t_j+u)}\,Z_i\overline{Z}_j\right]du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{i,j=1}^{n} g(t_i+u)\,Z_i\right|^2 du > 0.\end{aligned}$$

En vertu du théorème II.1, $f(t)$ est donc une fonction caractéristique.

b. Si $f(t)$ est limite uniforme dans tout intervalle (en particulier dans un intervalle contenant l'origine) d'expression de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t+u)\overline{g(u)}\,du$, $f(t)$ est dans les mêmes conditions limite de fonction caractéristique. En vertu du théorème I.5, c'est donc une fonction caractéristique. Et le théorème II.2 est établi.

THÉORÈME II.3. — *Toute fonction réelle, symétrique, continue, convexe, positive et égale à* 1 *pour* $t=0$ *et à* a $(0\leqq a\leqq 1)$ *pour* $t=\infty$ *est une fonction caractéristique.*

Ce théorème est dû à Pólya [1].

En effet, soit $\varphi(t)$ une telle fonction. Elle a une dérivée à droite $\varphi'_D(t)$ telle que $\varphi'_D(+\infty)=0$. D'autre part, $\varphi(+\infty)=a$, avec $0\leqq a\leqq 1$. Posons

$$(1-a)\,h(t)+a=\varphi(t).$$

Si l'on établit que $h(t)$ est fonction caractéristique de la loi de probabilité $\mathrm{H}(x)$, on aura établi par là même que $\varphi(t)$ est fonction de la loi $(1-a)\mathrm{H}(x)+a\,\mathcal{H}(x)$ [avec $\mathcal{H}(x)=0$ pour $x\leqq 0$ et $\mathcal{H}(x)=1$ pour $x>0$]. $h(t)$ a les mêmes propriétés que $\varphi(t)$, mais $h(+\infty)=0$. Considérons

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\mathrm{T}}^{+\mathrm{T}} e^{-itx}h(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\mathrm{T}}\cos tx\,h(t)\,dt &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin tx}{x}\,h(t)\right]_0^1 \\ &- \frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\sin tx}{x}\,h'_D(t)\,dt.\end{aligned}$$

Quand T augmente indéfiniment $\frac{\sin Tx}{x} h(T)$ tend vers zéro et l'intégrale $-\frac{1}{\pi}\int_0^T \frac{\sin tx}{x} h'_D(t)\,dt$ est une série alternée de termes décroissants $[h'_D(t)$ négatif croît de $h'_D(0)$ à $0]$ en module et tendant vers zéro. Le premier terme $-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{x}} \frac{\sin tx}{x} h'_D(t)\,dt$ est positif. Donc $\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{+T} e^{-itx} h(t)\,dt$ tend vers une limite $f(x)$ positive, quand T augmente indéfiniment. Il en résulte que la fonction

$$H(x) - H(x_0) = \lim_{T=\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{+T} \frac{e^{-itx_0} - e^{-itx}}{it} h(t)\,dt$$

est non décroissante en x; $h(t)$ étant continue en $t=0$ avec $h(0)=1$, monotone de $t=0$ à $t=+\infty$ on démontre aisément que $H(+\infty) - H(-\infty) = 1$ et, par conséquent, en vertu du lemme A, $h(t)$ est une fonction caractéristique, ce qui établit le théorème.

Conséquences. — 1° Les fonctions $e^{-|t|^\alpha}$ avec $0 \leqq \alpha \leqq 1$ sont toutes caractéristiques. De même le théorème II.3 montre immédiatement que la fonction $k_T(t)$ du lemme A est caractéristique.

2° D'autre part, ces fonctions donnent lieu à ce que l'on appelle le phénomène de Khintchine : deux fonctions caractéristiques (non analytiques bien entendu) peuvent coïncider sur un intervalle comprenant l'origine sans coïncider sur tout l'axe des t. Le fait qu'elles soient convexes est en effet compatible avec cette exigence. On a également :

Théoreme II.4. — *Toute fonction égale à* 1 *pour* $t=0$, *inférieure à* 1 *pour* $t \neq 0$ *réelle, symétrique, positive, continue convexe dans l'intervalle* 0, h *et périodique de période* $2h$ *est une fonction caractéristique* (*voir* D. Dugué et M. Girault).

On pourra comme pour le théorème II.3 supposer nulle l'ordonnée minimum de cette fonction $\varphi_1(t)$. Considérons la fonction $\varphi_2(t)$ égale à $\varphi_1(t)$ entre $-h$ et $+h$ et nulle en dehors de cet intervalle. Cette fonction est caractéristique d'après le théorème II.3. On a, d'après ce que nous avons vu à propos de ce théorème,

$$0 \leq \lim_{T=\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{+T} e^{-itx} \varphi_2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \times \int_{-h}^{+h} e^{-itx} \varphi_1(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-h}^{+h} \cos tx\, \varphi_1(t)\, dt.$$

En particulier, pour toutes les valeurs de x de la forme $\frac{2\pi}{2h} n$, on a

$$A_n = \int_{-h}^{+h} \cos \frac{2\pi}{2h} nt\, \varphi_1(t)\, dt \geqq 0.$$

Or les quantités $\frac{A_n}{h}$ sont les coefficients de Fourier de $\varphi_1(t)$ pris entre $-h$ et $+h$ pour les cosinus; ceux relatifs aux sinus dans le même intervalle sont nuls à cause de la parité de $\varphi_1(t)$. D'après le théorème I.3, $\varphi_1(t)$ est égale à la somme de sa série de Fourier prise dans un certain intervalle et comme $\varphi_1(t)$ est périodique on a, quel que soit t,

$$\varphi_1(t) = \frac{A_0}{2h} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{h} \cos \frac{2\pi}{2h} nt, \qquad A_n \geqq 0;$$

$\varphi_1(t)$ est donc une fonction caractéristique de la loi discontinue prenant la valeur $\pm \frac{\pi}{h} n$ avec la probabilité $\frac{A_n}{2h}$.

Théorème II.5. — *Les seules fonctions caractéristiques entières d'ordre fini ayant une valeur exceptionnelle de Borel sont au plus d'ordre 2. Les seules fonctions caractéristiques entières d'ordre fini de la forme $e^{P(t)}$ [$P(t)$ étant un polynome] sont les fonctions de la forme e^{imt} et e^{-at^2+imt} (c'est-à-dire celles de variables certaines ou gaussiennes).*

La démonstration de ce théorème du à M. Marcienkiewicz se trouve dans Dugué [2]. Elle est fondée sur le fait que les seules fonctions de la forme $e^{P(t)}$ satisfaisant à la condition que le maximum du module de $e^{P(X+iY)}$ pour $Y = \text{const.}$ ait lieu sur l'axe imaginaire que sont les fonctions où $P(t)$ a un degré inférieur ou égal à 2.

Théorème II.6. — *Si une fonction caractéristique est périodique et de période réelle, la loi de probabilité est une loi de treillis contenant l'origine.*

La démonstration donnée par M. Girault [1] et par Lukacs [1] utilise le théorème I.4 pour la première partie.

Donnons enfin des propriétés qui permettent de classer les lois de probabilités à partir de la fonction caractéristique :

1° Si la loi est discontinue, $\varphi(t)$ est presque périodique au sens de H. Bohr;

2° Si la loi est absolument continue, $\varphi(t)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{t}$;

3° Si la loi est singulière (répartition d'une probabilité positive dans un ensemble de mesure nulle), $\varphi(t)$ a en général une plus grande limite non nulle quand t augmente indéfiniment.

Signalons, se rattachant à ces questions générales, un problème posé par M. Van Danzig.

Trouver toutes les fonctions caractéristiques $\varphi(t)$ telles que $\frac{1}{\varphi(it)}$ soit caractéristique.

Dans cette classe de fonction on trouve la fonction caractéristique de la loi normale (Gauss-Laplace) $e^{-\frac{t^2}{2}}$, la fonction $\cos t$; en effet,

$$\frac{1}{\cos it} = \frac{1}{ch\, t} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \dfrac{t^2}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}}$$

est une fonction caractéristique, et plus généralement toute fonction caractéristique entière paire d'ordre égal à 1 et dont les zéros sont sur l'axe réel; ces fonctions sont de la forme $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{a_n^2}\right)$. Il serait intéressant de savoir s'il y en a d'autres. Les résultats que nous venons d'indiquer montrent qu'il y a peu de moyens pratiques de s'assurer qu'une fonction est caractéristique.

En fait les fonctions caractéristiques en dehors des trois conditions énoncées au début de ce chapitre peuvent présenter toutes les variétés apparentes possibles.

Il existe des fonctions caractéristiques entières, des fonctions caractéristiques holomorphes dans une bande, des fonctions caractéristiques qui ne sont définies que sur l'axe réel. On peut construire une fonction caractéristique qui n'est dérivable nulle part sur l'axe réel.

Les deux exemples donnés par Titchmarsh (*The theory of function*, p. 351) de fonctions continues non dérivables sont des fonctions caractéristiques. Ce sont :

1°
$$\varphi(t) = \frac{1}{\sum b^n} \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi t),$$

avec $0 < b < 1$, $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, a impair (exemple dû à Weierstrass). Le théorème I.5 prouve qu'elle est caractéristique.

2°
$$\varphi(t) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$$

où $f_n(t)$ est égale à la distance entre t et le nombre le plus proche de la forme $\frac{m}{10^n}$, m étant entier. Cet exemple est dû à Van der Waerden. Le théorème II.4 prouve immédiatement qu'elle est caractéristique.

Signalons aussi comme se rattachant à ce chapitre un problème que j'ai posé en 1939 dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Trouver tous les couples de fonctions caractéristiques φ_1 et φ_2 tels que l'on ait

$$\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \varphi_1 \varphi_2.$$

On a une solution en posant

$$\varphi_1 = \frac{1}{1 + it}, \qquad \varphi_2 = \frac{1}{1 - it}.$$

Y en a-t-il d'autres ?

CHAPITRE III.

Théorèmes de Lévy Cramer. Lois indéfiniment divisibles.

Nous allons étudier maintenant la décomposition d'une variable aléatoire Z en une somme X + Y de deux variables *indépendantes* que nous appelons composantes de la somme. Posons

$$M_{X,p} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p \, dF_X(x).$$

THÉORÈME III.1. — *Si* X *est une composante de* Z, *on a quel que soit* p, $M_{X,p} < KM_{Z,p}$, K *étant une constante indépendante de* p *en choisissant convenablement l'origine de* X *et de* Y.

En effet, on a, si $Z = X + Y$,

$$\text{Prob}[Z > x] \geqq \text{Prob}[X > x,\ Y > 0] = \text{Prob}[X > x]\,\text{Prob}[Y > 0]$$

à cause de l'indépendance supposée de X et de Y. Donc

$$1 - F_Z(x) \geqq [1 - F_X(x)][1 - F_Y(0)].$$

De même,

$$F_Z(x) \geqq F_X(x)\,F_Y(0).$$

Supposons tout d'abord

$$1 - F_Y(0) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad F_Y(0) \neq 0.$$

L'écriture adoptée suppose $F_Z(x)$ et $F_X(x)$ continue en x. Une modification très simple donne le cas général. On a

$$M_{Z,p} = \lim_{A=\infty} \int_0^A x^p\, dF_Z(x) + \lim_{B=\infty} \int_{-B}^0 (-x)^p\, dF_Z(x).$$

Posons

$$1 - F_Z(x) = G_Z(x) \qquad \text{et} \qquad 1 - F_X(x) = G_X(x),$$

$$\int_0^A x^p\, dF_Z(x) = [-x^p\, G_Z(x)]_0^A + p\int_0^A x^{p-1}\, G_Z(x)\, dx.$$

$M_{Z,p}$ existant il en résulte que $A^p\, G_Z(A)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{A}$, ainsi que $A^p\, G_X(A)$, puisque l'on a

$$G_Z(x) \geqq [1 - F_Y(0)]\, G_X(x).$$

On a, de même,

$$p\int_0^A x^{p-1}\, G_Z(x)\, dx \geqq [1 - F_Y(0)]p\int_0^A x^{p-1}\, G_X(x)\, dx.$$

D'une inégalité analogue pour la deuxième intégrale, on déduit

$$M_{Z,p} \geqq [1 - F_Y(0)]\int_0^{+\infty} x^p\, dF_X(x) + F_Y(0)\int_{-\infty}^0 |x|^p\, dF_X(x).$$

En posant $\frac{1}{K}$ égal au plus petit des deux nombres $1 - F_y(0)$ et $F_y(0)$, on a établi le théorème III.1. Il n'y aurait de difficulté que si le plus petit de ces nombres était nul.

Dans ce cas on déplacerait l'origine des variables aléatoires. On pourra toujours trouver une valeur a telle que

$$1 - F_Y(a) \neq 0, \qquad \text{avec} \quad F_Y(a) \neq 0$$

et le même raisonnement que ci-dessus montrerait que pour l'origine choisie.

$$KM_{Z,p} > M_{X,p}.$$

On peut d'une manière plus précise montrer que

THÉORÈME III.2. — *Si* $M_{Z,2p}$ *existe et si* $\mathcal{R}\varphi_Z(t)$ *a une dérivée d'ordre* $2p+1$ *pour* $t=0$, $M_{X,2p}$ *existe et* $\mathcal{R}\varphi_X(t)$ *a une dérivée d'ordre* $2p+1$ *pour* $t=0$ (*voir* D. Dugué [3]).

Tout d'abord établissons le résultat suivant :

LEMME. — *Si* $M_{2p} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p}\, dF(x)$ *existe et si l'on pose*

$$\int_{-\infty}^{x} u^{2p}\, dF(u) = g(x),$$

les deux conditions

$$\textit{existence de} \quad \mathcal{R}\varphi^{(2p+1)}(0) \qquad \textit{et} \qquad \lim_{t=\infty} t[M_{2p} - g(t) + g(-t)] = 0$$

sont équivalentes.

Si M_{2p} existe, on a

$$(-1)^p\, \varphi^{(2p)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} x^{2p}\, dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, dg(x),$$

$\varphi^{(2p)}(t)$ étant hermitienne, il en résulte que si elle existe $\mathcal{R}\varphi^{(2p+1)}(0)$ est nulle. On a

$$t(1-\sin 1)[M_{2p} - g(t) + g(-t)] < t^2 \int_0^{\frac{1}{t}} du \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}(1 - e^{iux})\, dg(x)$$

$$= (-1)^p t^2 \int_0^{\frac{1}{t}} \mathcal{R}[\varphi^{(2p)}(0) - \varphi^{(2p)}(u)]\, du.$$

Si $\mathcal{R}\varphi^{(2p+1)}(0)=0$, le second membre de l'inégalité peut être rendu arbitrairement petit avec $\frac{1}{t}$ donc le premier aussi. Pour établir que $\mathcal{R}\varphi^{(2p+1)}(0)=0$ si $t[M_{2p}-g(t)+g(-t)]$ tend vers zéro avec $\frac{1}{t}$, on remarquera que

$$(-1)^{p+1}\mathcal{R}\varphi^{(2p+1)}(0)=\lim_{t=\infty} t\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\cos\frac{x}{t}\right)dg(x)$$
$$<\frac{1}{2t}\int_{-t}^{+t}x^2\,dg(x)+2t[M_{2p}-g(t)+g(-t)].$$

Il est connu que si $t[M_{2p}-g(t)+g(-t)]$ tend vers zéro,

$$\frac{1}{2t}\int_{-t}^{+t}x^2\,dg(x) \quad \text{tend vers zéro}$$

(*voir* le travail cité). Par suite, le second membre tend vers zéro dans ces conditions et, par suite, le premier aussi. Le lemme est donc établi. Montrons maintenant avec les notations des théorèmes III.1 et III.2 que si $t[M_{Z,2p}-g_Z(t)+g_Z(-t)]$ tend vers zéro avec $\frac{1}{t}$, il en est de même de $t[M_{X,2p}-g_X(t)+g_X(-t)]$.

On a

$$M_{Z,2p}-g_Z(t)+g_Z(-t)$$
$$=\int_{t}^{+\infty}x^{2p}\,dF_Z(x)+\int_{-\infty}^{-t}x^{2p}\,dF_Z(x)$$
$$=t^{2p}G_Z(t)+2p\int_{t}^{+\infty}x^{2p-1}G_Z(x)\,dx+t^{2p}F_Z(-t)-2p\int_{-\infty}^{-t}x^{2p-1}F_Z(x)\,dx.$$

En appelant toujours comme pour le théorème III.1, $\frac{1}{K}$ le plus petit des nombres $1-F_Y(0)$ et $F_Y(0)$ et en ayant pris une origine telle que ce plus petit nombre ne soit pas nul, on a

$$K[M_{Z,2p}-g_Z(t)+g_Z(-t)]\geqq t^{2p}G_X(t)+2p\int_{t}^{+\infty}x^{2p-1}G_X(x)\,dx$$
$$+t^{2p}F_X(-t)-2p\int_{-\infty}^{-t}x^{2p-1}F_X(x)\,dx$$
$$=M_{X,2p}-g_X(t)+g_X(-t).$$

Donc si $t[M_{Z,2p}-g_Z(t)+g_Z(-t)]$ tend vers zéro avec $\frac{1}{t}$, il en est de même de $t[M_{X,2p}-g_X(t)+g_X(-t)]$.

On peut maintenant démontrer le théorème III.2.

Si $\mathcal{R}\varphi_Z^{(2p+1)}(0)$ existe, le lemme montre que $t[M_{Z,2p} - g_Z(t) + g_Z(-t)]$ tend vers zéro avec $\frac{1}{t}$. Cela entraîne que $t[M_{X,2p} - g_X(t) + g_X(-t)]$ tende vers zéro et, d'après le lemme, cela entraîne que $\mathcal{R}\varphi_X^{(2p+1)}(0)$ existe.

Les théorèmes III.1 et III.2 montrent en quelque sorte que la « régularité » autour de l'origine de la fonction caractéristique d'une composante d'une variable aléatoire est au moins égale à la régularité de la fonction caractéristique de cette variable.

Nous établissons maintenant :

THÉORÈME III.3. — *Si $\varphi_Z(t)$ est une fonction holomorphe dans une bande parallèle à l'axe réel, $\varphi_X(t)$ est holomorphe au moins dans la même bande* (*voir* P. Lévy [1] ou Dugué [2]).

En effet, si $\varphi_Z(t)$ (avec $t = u + iv$) est holomorphe pour

$$a < v < b \qquad (ab \leqq 0),$$

il en résulte que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-vx} e^{iux}\, dF_Z(x)$$

existe pour $a < v < b$. Or, d'après nos notations,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-vz}\, dF_Z(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v(x+y)}\, dF_X(x)\, dF_Y(y)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-vx}\, dF_X(x) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-vy}\, dF_Y(y).\end{aligned}$$

Donc chacune des intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-vx}\, dF_X(x) \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-vy}\, dF_Y(y)$$

est convergente pour $a < v < b$ et, d'après le théorème I.4 (remarque 1°), $\varphi_X(t)$ et $\varphi_Y(t)$ sont holomorphes au moins dans la bande $a < v < b$.

COROLLAIRE. — *Si $\varphi_Z(t)$ est une fonction entière, il en est de même de $\varphi_X(t)$.*

Cela va nous conduire au théorème III.4.

THÉORÈME III.4. — *Si $\varphi_Z(t)$ est une fonction entière, l'ordre de la fonction entière $\varphi_X(t)$ est inférieur ou égal à l'ordre de $\varphi_Z(t)$.*

Appelons $m_{X,p}$ le $p^{\text{ième}}$ moment de la variable X, c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^p \, dF_X(x).$$

On a

$$m_{X,2p} = M_{X,2p} \qquad \text{et} \qquad |m_{X,2p+1}| \leqq M_{X,2p+1}.$$

D'autre part, d'après la remarque du théorème I.4 $\sqrt[p]{M_{X,p}}$ est une fonction non décroissante. L'ordre de la fonction entière $\varphi_X(t)$ sera égal à ρ_X donnée par la formule (*voir*, par exemple, TITCHMARSH, *Theory of functions*, p. 253)

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log \sqrt[n]{|m_{X,n}|}}{\log n} = 1 - \frac{1}{\rho_X}.$$

On a

$$\frac{\log \sqrt[2p-1]{|m_{X,2p-1}|}}{\log(2p-1)} \leqq \frac{\log \sqrt[2p-1]{M_{X,2p-1}}}{\log(2p-1)} \leqq \frac{\log \sqrt[2p]{M_{X,2p}}}{\log 2p} \qquad (1+\varepsilon)$$

pour p assez grand. Il en résulte que

$$1 - \frac{1}{\rho_X} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log \sqrt[2p]{M_{X,2p}}}{\log 2p}.$$

D'après le théorème III.1, $M_{X,p} < KM_{Z,p}$, K étant indépendant de p. Donc

$$1 - \frac{1}{\rho_X} \leqq 1 - \frac{1}{\rho_Z} \qquad \text{et} \qquad \rho_Z \geqq \rho_X.$$

THÉORÈME III.5 (dit de Lévy-Cramer). — *Si une variable est normale, ses composantes sont normales.*

En effet, dans ce cas,

$$\varphi_Z(t) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}t^2 + imt}$$

D'après le théorème III.4, $\varphi_X(t)$ et $\varphi_Y(t)$ seront des fonctions entières d'ordre inférieur ou égal à 2. $\varphi_Z(t)$ n'ayant pas de zéro, comme $\varphi_X(t)$ et $\varphi_Y(t)$ sont des fonctions entières avec $\varphi_Z(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$, il en résulte que $\varphi_X(t)$ et $\varphi_Y(t)$ n'en ont pas non plus. Donc $\varphi_X(t)$ et $\varphi_Y(t)$ étant d'ordre inférieur ou égal à 2 et n'ayant pas de zéros sont de la forme $e^{A(t)}$, $A(t)$ étant un polynome du second degré au plus et, par conséquent, X et Y sont normales.

Ce théorème comprend comme cas particulier le cas où Z est certain (sa fonction caractéristique est alors e^{imt}), X et Y sont alors certains.

On trouvera dans Dugué [2] une démonstration qui fait du théorème III.5 un cas particulier d'un théorème plus général de convexité.

L'histoire de ce résultat fondamental est assez curieuse. Il est dû à l'intuition de M. Paul Lévy qui avait pressenti sa vérité et indiqué des conséquences très importantes de ce théorème dans le Mémoire P. Lévy [3] (chap. III). La démonstration a été donnée par H. Cramer dans [2].

Remarques sur le théorème III.5. — Une de ses conséquences est que : *si* $|\varphi(t)|$ *est égal pour t réel à* e^{-t^2}, $\varphi(t)$ *est égal à* e^{-t^2+imt}.

En effet, $\varphi(t)\varphi(-t) = |\varphi(t)|^2 = e^{-2t^2}$; $\varphi(t)$ et $\varphi(-t)$ fonctions caractéristiques de variables indépendantes dont la somme est normale, doivent être des fonctions caractéristiques de variables normales.

De même si $|\varphi(t)| = 1$, on a pour des raisons analogues $\varphi(t) = e^{imt}$. En général $|\varphi(t)|$ étant connu, $\varphi(t)$ n'est pas déterminé. M. Paul Lévy fait observer dans Lévy [3] que les 2^n fonctions caractéristiques $\varphi_{X_1}(\pm t)\varphi_{X_2}(\pm t)\ldots\varphi_{X_n}(\pm t)$ sont des fonctions caractéristiques ayant même module.

Les résultats précédents montrent que si X est une composante de Z et si $\varphi_Z(t)$ est analytique au voisinage de l'origine il existe une constante K telle que $K[\varphi_Z(t) + \varphi_Z(-t)]$ soit majorante de $[\varphi_X(t) + \varphi_X(-t)]$ et, d'autre part, on voit aisément que si $\varphi_Z(t)$ est analytique dans la bande $a < \mathcal{I}t < b$ les seuls zéros possibles pour $\varphi_X(t)$ dans cette bande sont les zéros de $\varphi_Z(t)$.

En posant $\varphi_Z(t) = e^{\psi_Z(t)}$, on voit que le rayon du cercle d'analyticité autour de l'origine de $\psi_Z(t)$ est le plus petit des nombres $|a|$, $|b|$ et $|c|$, $|c|$ étant le zéro de $\varphi_Z(t)$ le plus rapproché de l'origine, D'après ce que nous venons de voir $\psi_X(t)$ sera analytique au moins dans ce cercle. Il en résulte l'inégalité suivante entre les cumulants de Z et ceux de X

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{|c_{X,n}|}{n!}} \leqq \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{|c_{Z,n}|}{n!}}.$$

De même, si $\psi_Z(t)$ est une fonction entière [d'après ce que l'on a vu au chapitre II (th. II.5), $\psi_Z(t)$ ne peut être un polynome que si $\psi_Z(t)$ est de degré 2], $\psi_X(t)$ est une fonction entière. Il résulte du théorème I.4 que $\psi_X(it)$ ou $\psi_X(-it)$ est le maximum de la fonction $\mathcal{R}\psi_X(u+it)$ sur un cercle ayant l'origine pour centre et t pour rayon (t est réel positif); de même naturellement pour $\psi_Z(t)$. D'autre part, en ajoutant à X et à Y composantes de Z des quantités certaines m_1 et m_2 on peut s'arranger pour que les origines des variables X et Y soient telles que chacune de ces variables (et, par suite, Z) prennent des valeurs positives et négatives. Dans ces conditions $\mathcal{R}\psi_X(it)$, $\mathcal{R}\psi_Y(it)$ comme $\mathcal{R}\psi_Z(it)$ vont tendre vers $+\infty$ quand t augmente indéfiniment par valeurs positives ou négatives. Il en résulte que pour des valeurs suffisamment grandes de t en valeur absolue on aura

$$\mathcal{R}\psi_X(it) < \mathcal{R}\psi_Z(it).$$

La plus grande des deux valeurs $\mathcal{R}\psi_X(it)$, $\mathcal{R}\psi_X(-it)$ sera donc pour t assez grand inférieure à la plus grande de deux valeurs $\mathcal{R}\psi_Z(it)$ et $\mathcal{R}\psi_Z(-it)$. D'après le théorème Borel-Carathéodory (*voir* TITCHMARSH, *The theory of functions*, p. 174), il en résulte que l'ordre de $\psi_X(it)$ est inférieur ou égal à l'ordre de $\psi_Z(it)$. On a donc également l'inégalité suivante sur les cumulants [l'addition d'une quantité certaine n'a pas modifié l'ordre de $\psi_X(it)$ pas plus que celui de $\psi_Z(it)$]

$$\overline{\lim} \frac{\log|c_{X,n}|}{n \log n} \leqq \overline{\lim} \frac{\log|c_{Z,n}|}{n \log n}.$$

Le théorème de Lévy-Cramer a été étendu par Raikoff au cas des variables de Poisson dont la fonction caractéristique est $e^{\lambda(e^{it}-1)}$.

La loi de probabilité est celle d'une variable aléatoire ne prenant que des valeurs entières positives ou nulles n avec la probabilité $e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$.

Tout d'abord, donnons le :

THÉORÈME III.6. — *Le support de la probabilité d'une somme de deux variables indépendantes contient la somme vectorielle du support des probabilités de chaque variable.*

On appelle support de la probabilité d'une variable, l'ensemble des points où sa fonction de probabilité totale est croissante [x_0 appartient au support de X, si $F(x_0+h) > F(x_0-h)$ quel que soit h positif]. On a

$$\begin{aligned} F_Z(x+2h) - F_Z(x-2h) &= \int F_X(x+2h-y)\,dF_Y(y) \\ &\quad - \int F_X(x-2h-y)\,dF_Y(y) \\ &\geqq [F_X(x-y+h) - F_X(x-y-h)][F_Y(y+h) - F_Y(y-h)]. \end{aligned}$$

Il en résulte que si $x-y$ appartient au support de X et y au support de Y, x appartient au support de $Z = X+Y$, ce qui établit le théorème III.6. On trouvera dans Borel [1] des résultats sur la somme vectorielle de deux ensembles, qui pour les ensembles de mesure nulle sont liés à la raréfaction de ces ensembles.

THÉORÈME III.7 (dit de Raikoff). — *Si la somme de deux variables indépendantes est une variable de Poisson, chacune d'entre elles est une variable de Poisson.*

En effet, d'après le théorème III.6 le support de chacune des composantes ne peut être qu'un ensemble intérieur à $0+h$, $1+h$, ..., $n+h$, ... et un ensemble intérieur à $0-h$, $1-h$, ..., $n-h$, ... Appelons fonction génératrice $G_Z(u)$ (introduite par Laplace) la somme $\sum p_{Z,n} u^n$ ($p_{Z,n}$ étant la probabilité pour que $Z=n$). On a encore

$$G_Z(u) = G_X(u)\,G_Y(u),$$

$$G_X(u) = u^h \sum p_{X,n} u^n \qquad \text{et} \qquad G_Y(u) = u^{-h} \sum p_{Y,n} u^n.$$

Donc $G_Z(u)$ qui est égal dans le cas de la loi de Poisson à $e^{\lambda(Z-1)}$ va être le produit de $\sum p_{X,n} u^n$ par $\sum p_{Y,n} u^n$. Ces deux dernières fonctions sont des fonctions analytiques autour de l'origine (les séries convergent pour $|u| < 1$). D'autre part, $p_{X,n}$ et $p_{Y,n}$ étant positifs ou réels, il en résulte que

$$p_{Y,0}\,p_{X,n} \leqq p_{Z,n} \qquad \text{et} \qquad p_{X,0}\,p_{Y,n} \leqq p_{Z,n} \quad \text{quel que soit } n.$$

Donc $\frac{1}{u^h} G_X(u)$ et $u^h G_Y(u)$ sont des fonctions entières d'ordre inférieur ou égal à 1. Il en résulte que ni $\frac{G_X(u)}{u^h}$, ni $u^h G_Y(u)$ n'ont de zéros. Donc ces deux fonctions sont de la forme $e^{\mu_1(Z-1)}$ et $e^{\mu_2(Z-1)}$ (μ_1 et μ_2 positifs avec $\mu_1+\mu_2=\lambda$), ce qui établit le théorème de Raikoff (*voir* Raikoff [1]).

Dans des Mémoires importants (en particulier Lévy [4], *voir* aussi Lévy [1] pour un exposé d'ensemble), M. Paul Lévy a introduit la notion de loi indéfiniment divisible : Ce sont les lois des variables aléatoires prises par un processus stochastique additif (les accroissements sont indépendants) et localement continu (dans ce cas, continuité en probabilité et continuité presque certaine sont équivalentes). Cela revient à dire que si X est une variable ayant cette loi de probabilité, X peut être considéré comme la somme d'un nombre arbitrairement grand de variables aléatoires indépendantes et arbitrairement petites en probabilité, après soustraction d'une quantité certaine. Nous renverrons aux travaux de M. Paul Lévy pour une démonstration complète des résultats qui permettent d'établir la forme nécessaire et suffisante de la fonction caractéristique de X. Ces démonstrations sont fondées sur le théorème central limite (loi limite d'une somme de n variables indépendantes), sur une inégalité très importante de M. Paul Lévy (*voir* P. Lévy [1], p. 136) et sur l'étude des séries à termes aléatoires (en particulier sur le fait qu'une série non convergente et qui n'est pas essentiellement divergente peut être rendue convergente par l'addition d'une série de termes certains; la série initiale est quasi convergente selon l'expression de M. Paul Lévy ou stable au sens de M. Kolmogoroff). Nous indiquerons le schéma de ces démonstrattons :

1° Si X(Z) est un tel processus stochastique on peut construire une fonction certaine $f(Z)$ telle que la réalisation de la fonction aléatoire

$$Y(Z)=X(Z)-f(Z)$$

n'ait presque sûrement que des discontinuités de première espèce (sauts avec limite à gauche et à droite);

2° En écrivant $y(Z)$ pour une réalisation de Y(Z) et en posant

$$y(Z)=y_1(Z)+y_2(Z),$$

avec $y_1(Z)=$ fonction des sauts de $y(Z)$ et $y_2(Z)$ continue, $y_1(Z)$ et $y_2(Z)$ seront la réalisation de deux variables aléatoires $Y_1(Z)$ et $Y_2(Z)$ dont on montre de plus qu'elles sont indépendantes;

3° $Y_2(Z)$ obéira à une loi de Gauss de fonction caractéristique

$$e^{-\frac{\sigma^2(Z)t^2}{2}+im(Z)t}$$

(application du théorème central limite);

4° Pour déterminer $Y_1(Z)$, remarquons qu'il y a une probabilité arbitrairement petite pour qu'il y ait un saut compris entre u et $u+\Delta u$ en un point d'abscisse comprise entre Z et $Z+\Delta Z$. Les accroissements étant indépendants, la somme des sauts compris entre u et $u+\Delta u$ entre o et Z sera égale à une variable de Poisson

$$e^{\lambda(e^{itu}-1)}, \qquad \text{avec} \quad \lambda = \Delta N(u),$$

$\Delta N(u)$ étant le nombre probable de sauts compris entre o et Z et compris entre u et $u+\Delta u$.

Si la somme de ces sauts forme une série aléatoire convergente, la variable $Y_1(Z)$ sera la somme des variables de Poisson $e^{(e^{itu}-1)\Delta N(u)}$ donc $Y_1(Z)$ aura pour fonction caractéristique

$$e^{\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{itu}-1)\,dN(u)}.$$

Comme on a pu, en vertu de 1°, s'arranger pour que Y(Z) soit continue à droite et à gauche, il en résulte que l'on aura $N(+\infty)$ et $N(-\infty)$ bornés. On pourra donc prendre $N(+\infty)=N(-\infty)=0$. Si la somme des sauts forme une série aléatoire quasi convergente, on pourra la rendre convergente par l'addition de termes certains et dans le cas $Y_1(Z)$ aura pour fonction caractéristique

$$e^{\int_{+\infty}^{0}+\int_{0}^{+\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)dN(u)} \qquad \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u^2\,dN(u) \text{ existant}\right).$$

$N(u_1)-N(u_2)$ sera le nombre probable de sauts compris entre u_1 et u_2 (avec $u_1u_2>0$).

L'ensemble de 1°, 2°, 3°, 4° entraîne le :

THÉORÈME III.8 (Paul Lévy). — *Une loi indéfiniment divisible a pour fonction caractéristique*

$$\varphi(t) = e^{imt-\frac{\sigma^2}{2}t^2+\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{+\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)dN(u)},$$

avec $\int_{-\infty}^{+\infty} u^2\, d\mathrm{N}(u)$ *existant et* $\mathrm{N}(u)$ *non décroissant de* $-\infty$ *à* o *et de* o *à* $+\infty$.

La définition de σ^2 et $\mathrm{N}(u)$ entraîne immédiatement que la représentation indiquée est unique puisque $\mathrm{N}(u_1) - \mathrm{N}(u_2)$ est le nombre probable de sauts ($u_1 u_2 > 0$) compris entre u_1 et u_2 et σ^2 l'écart type de la variable normale représentant la partie fortement continue de processus. On doit à M. Loève (Loève [2]) un procédé pour calculer $\mathrm{N}(u)$ connaissant la fonction caractéristique $\varphi(t)$ de la loi indéfiniment divisible. En posant $\varphi(t) = e^{\psi(t)}$, on a

$$-\frac{\sigma^2}{2} = \lim_{t=\infty} \frac{\psi(t)}{t^2}$$

et

$$\psi(t) - \frac{1}{2}[\psi(t-h) + \psi(t+h)] = \frac{\sigma^2 h^2}{2} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu}(1 - \cos hu)\, d\mathrm{N}(u).$$

L'inversion de l'intégrale de Fourier (lemme II, chap. II) permet de calculer $\int_{-\infty}^{u} (1 - \cos hu)\, d\mathrm{N}(u)$ et, par suite, $\mathrm{N}(u)$.

Remarquons que si $\varphi(t)$ est la fonction caractéristique d'une loi indéfiniment divisible, la formule du théorème III.8 montre que $[\varphi(t)]^\alpha$ est une fonction caractéristique. Réciproquement si quel que soit $\alpha \geqq 0$ $[\varphi(t)]^\alpha$ est une fonction caractéristique, il résulte de la définition même que $\varphi(t)$ est indéfiniment divisible. On peut donc définir une loi de probabilité indéfiniment divisible comme ayant une fonction caractéristique $\varphi(t)$ telle que $[\varphi(t)]^\alpha$ soit caractéristique pour tout $\alpha \geqq 0$. Les deux définitions sont équivalentes. La dernière est celle adoptée par Cramer (Cramer [3]).

Il résulte du théorème III.8 que la somme des deux variables indépendantes ayant une loi indéfiniment divisible est une variable ayant une loi indéfiniment divisible. Si l'on cherche les diviseurs d'une loi indéfiniment divisible dans l'ensemble des lois indéfiniment divisibles, les remarques précédentes montrent que l'on devra avoir si σ^2 et $\mathrm{N}(u)$ sont les caractéristiques de la loi initiale, $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \sigma^2$ et $\mathrm{N}_1 + \mathrm{N}_2 = \mathrm{N}$, N_1 et N_2 étant deux fonctions non décroissantes de u. Nous verrons au chapitre suivant qu'une loi indéfiniment divisible peut avoir d'autres diviseurs que les diviseurs indéfiniment divisibles.

THÉORÈME III.9. — *La fonction caractéristique d'une loi indéfiniment divisible ne peut pas s'annuler dans sa bande d'analyticité (éventuellement réduite à l'axe réel).*

En effet, $[\varphi(t)]^\alpha$ fonction caractéristique d'un diviseur de la loi initiale doit avoir sa singularité la plus proche de l'axe réel sur l'axe imaginaire; si α n'est pas entier, cette singularité sera, si $\varphi(t)$ a des zéros dans la bande d'analyticité, le zéro de $\varphi(t)$ le plus proche de l'axe réel qui n'est pas sur l'axe imaginaire. Donc dans le cas où $\varphi(t)$ a une bande de largeur positive cette bande ne peut contenir de zéro. Si la bande était réduite à l'axe réel on établirait le résultat en remarquant que $\lim\limits_{\alpha=0}[\varphi(t)]^\alpha$ doit être une fonction caractéristique en vertu du théorème I.5. Cette limite ne peut prendre que les valeurs 1 ou 0, elle est donc égale à la constante 1 et, par suite, $\varphi(t)$ fonction caractéristique d'une loi indéfiniment divisible ne peut s'annuler sur l'axe réel même si elle n'a pas de bande d'analyticité. Ce théorème a été en partie établi par Lukacs (Lukacs [2]) qui de plus donne un exemple de loi indéfiniment divisible ayant des zéros sur la frontière de la bande d'analyticité.

Montrons que si une fonction caractéristique φ_Z n'a pas de diviseurs indécomposables (en appelant indécomposable une fonction caractéristique qui ne peut être décomposée en produit de deux fonctions caractéristiques que si l'une de ces dernières est de la forme e^{imt}), elle est indéfiniment divisible. En effet, s'il n'en était pas ainsi il devrait exister un nombre positif δ tel que dans toute décomposition de la variable aléatoire Z, l'une des composantes au moins (après éventuellement soustraction d'une quantité certaine) ait obligatoirement une distance à la variable certainement égale à 0, supérieure à δ. Ce fait est incompatible avec l'hypothèse que chaque composante est décomposable. En effet, il entraînerait en posant

$$\varphi_Z(t) = e^{\psi_Z} = e^{\psi_1(t)+\ldots+\psi_p(t)}$$

que l'on ait quel que soit p, la plus grande des quantités $-\mathcal{R}\,\psi_p(t)$ pour $t \neq 0$ supérieure à $\alpha > 0$. La limite d'une fonction caractéristique diviseur de $\varphi_Z(t)$ étant elle-même une fonction diviseur de $\varphi_Z(t)$, il en résulte que cette limite devrait être atteinte par un diviseur $e^{\psi(t)}$. Or $e^{\psi(t)}$ ayant lui-même un diviseur par hypothèse, on aurait

$$e^{\psi(t)} = e^{\psi_A(t)+\psi_B(t)}$$

avec $-\mathcal{R}\psi_A(t)$ et $-\mathcal{R}\psi_B(t)$ inférieurs à α, ce qui établit la contradiction. Ce résultat entraîne le théorème suivant de Khintchine (Khintchine [1]) :

THÉORÈME III.10. — *Une fonction caractéristique est le produit d'une fonction caractéristique indéfiniment divisible par un produit de fonctions caractéristiques indécomposables.*

En effet, soit $\varphi(t)$ et $\varphi_1(t)$ un de ses diviseurs indécomposables (en supposant qu'il en existe au moins un). On a donc

$$\varphi(t) = \varphi_1(t)g_1(t).$$

Si $g_1(t)$ n'a pas de diviseurs indécomposables, $g_1(t)$ est indéfiniment divisible comme on vient de le voir. Sinon on recommence l'opération; $g_1(t)$ sera alors le produit de $\varphi_2(t)$ indécomposable par $g_2(t)$; cette opération ne peut se poursuivre indéfiniment. Si, après avoir ainsi épuisé de proche en proche les diviseurs indécomposables de $\varphi(t)$, puis de $g_1(t)$, de $g_2(t)$, ..., on obtient une suite $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., telle que

$$\prod_1^\infty \varphi_1(t) = \varphi(t);$$

$\varphi(t)$ sera décomposé en un produit de fonctions caractéristiques indécomposables. Sinon $\dfrac{\varphi(t)}{\prod_1^\infty \varphi_i(t)}$ n'aura pas de facteurs indécomposables. Ce sera donc une fonction caractéristique indéfiniment divisible. Le théorème est donc établi.

Remarque. — 1° La décomposition n'est pas forcément unique. Nous en verrons des exemples au chapitre suivant.

2° Il peut se faire que l'on ait $\varphi(t) = \prod_1^\infty \varphi_i(t)$ sans que $\varphi(t)$ soit indéfiniment divisible. Une loi non indéfiniment divisible peut être décomposable en une somme infinie de lois indépendantes (mais toutes ces lois ne sont pas infiniment petites en probabilité).

Exemple de lois indéfiniment divisibles. — Tout d'abord une variable aléatoire indéfiniment divisible ne peut être bornée sans être certaine (car sa fonction caractéristique aurait des zéros). Si sa fonction caractéristique est entière, elle est d'ordre 1 (quantité certaine), d'ordre 2 (quantité gaussienne) ou infini. M. Paul Lévy a donné les exemples suivants de lois indéfiniment divisibles (*voir* P. Lévy [1]) :

Lois stables. — Ce sont des lois de probabilités telles que si X_1 et X_2 sont deux variables indépendantes dépendant d'une telle loi et c_1 et c_2 deux constantes positives quelconques, la somme $\frac{c_1 X_1 + c_2 X_2}{c}$ dépende de la même loi, c étant une constante fonction de c_1 et c_2.

Cette définition permet d'établir aisément que la loi est indéfiniment divisible et, en étudiant les propriétés de $N(u)$, on voit que sa fonction caractéristique est de la forme $e^{\psi(t)}$, avec

$$\psi(t) = \left(-C_0 + i\frac{t}{|t|}C_1\right)|t|^{\alpha},$$

avec

$$C_0 > 0, \qquad \alpha \leqq 2, \qquad \left|C_1 \cos\frac{\pi\alpha}{2}\right| \leqq C_0 \sin\frac{\pi\alpha}{2};$$

$\alpha = 2$ donne le cas de la loi de Laplace-Gauss.

On trouve comme cas particulier les lois

$$e^{-C|t|^{\alpha}} \qquad (\alpha \leqq 2).$$

Nous avions déjà trouvé le cas de $\alpha \leqq 1$ au chapitre II, théorème II.3; $\alpha = 1$ correspond à la loi de Cauchy.

Lois semi-stables. — Ce sont des lois dont la seconde fonction caractéristique satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\psi(qt) = q^{\alpha}\psi(t),$$

q étant une constante.

M. Paul Lévy a trouvé la forme générale de ces lois

$$\psi(t) = mit + \int_0^{+\infty} (\cos tu - 1)\, dn_1(u) + i \sin tu\, dn_2(u),$$

où $un_1(u)$ et $un_2(u)$ sont des fonctions périodiques de $\log u$, la seconde ayant sa valeur moyenne nulle et où, en outre,

$$n_1(u) + n_2(u) \qquad \text{et} \qquad n_2(u) - n_1(u) \qquad (u > 0)$$

sont non décroissantes.

Lois quasi stables. — Ce sont des lois telles que X_1 et X_2 étant indépendantes et obéissant à cette loi, $\frac{C_1 X_1 + C_2 X_2}{C}$ soit égale à une variable obéissant à la même loi augmentée d'une constante, C_1 et C_2 étant deux constantes quelconques. C'est donc une généralisation des lois stables. M. Paul Lévy a établi que si $C \neq C_1 + C_2$ la loi quasi stable est égale à la loi d'une variable obéissant à une loi stable augmentée d'une constante et si $C = C_1 + C_2$, on a

$$\psi(t) = mit - C\left(\frac{\pi}{2}|t| + \beta it \log|t|\right) \qquad (C > 0, |\beta| \leqq 1),$$

$\varphi(t)$ étant une fonction caractéristique et $\lambda > 0$. $[e^{\lambda[\varphi(t)-1]}$ est une fonction caractéristique de lois indéfiniment divisibles (B. de Finetti). On s'en assurera en développant en séries $e^{\lambda\varphi(t)}$. Le même procédé montre que $\frac{\left(1-\frac{1}{K}\right)^{\lambda}}{\left[1-\frac{\varphi(t)}{K}\right]^{\lambda}}$ est la fonction caractéristique d'une loi indéfiniment divisible si $K > 1$ et $\lambda > 0$.

M. Paul Lévy (P. Lévy [1]) a donné la propriété suivante des lois indéfiniment divisibles, qui est très importante mais est plutôt un théorème d'analyse aléatoire que d'arithmétique des lois de probabilité :

Pour qu'une loi puisse être limite de lois de variables aléatoires $\frac{S_n}{\lambda_n}$, *où* S_n *est la* n^{ieme} *somme d'une série à termes aléatoires indépendants et* λ_n *une suite de quantités certaines tendant vers l'infini avec* $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$ *tendant vers un, il est nécessaire et suffisant que cette loi soit indéfiniment divisible avec* $n(u)$ *pour* $u < 0$ *et* $-n(u)$ *pour* $u > 0$ *fonction convexe de* $\log|u|$.

M. Loève (Loève [3]) a généralisé ce résultat.

Dans le même ordre d'idées on trouvera dans Doeblin [1] une étude des éléments limites du groupe des puissances $\varphi^n(t)$ (n entier positif) d'une loi de probabilité. Ajoutons que dans P. Lévy [1] on trouve une extension de ces résultats au cas d'une variable à plus d'une dimension.

CHAPITRE IV.

Lois indécomposables.

Il est très difficile de donner des théorèmes généraux dans ce domaine. Ce chapitre sera essentiellement consacré à l'exposé de différents cas particuliers concernant la divisibilité.

Tout d'abord :

Lemme. — *Si une des composantes d'une variable aléatoire est absolument continue, cette variable est absolument continue.*

En effet, si l'on a

$$Z = X + Y, \qquad \text{avec} \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\, du,$$

on a

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(x-y)\, dF_Y(y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dF_Y(y) \int_{-\infty}^{x-y} f_X(u)\, du = \int_{-\infty}^{x} dv \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(v-y)\, dF_Y(y). \end{aligned}$$

En particulier, si $f_X(u)$ est positif quel que soit u, il en est de même de $f_Z(u)$.

Par conséquent pour qu'une variable ait une composante gaussienne, il est nécessaire que sa loi de probabilité soit absolument continue et ait partout une densité positive.

Ce lemme se généralise d'une manière vague en disant avec Cramer (Cramer [3]) qu'une variable aléatoire a en général une loi aussi régulière que la plus régulière des lois composantes. Toutefois Raikoff a donné un exemple où les deux lois de distribution sont entières et où la loi de la somme n'est pas régulière à l'origine (Raikoff [2]).

Du fait que le support de la probabilité de la somme contient la somme vectorielle des supports de probabilités des composantes, il en résulte qu'une variable qui prend seulement deux valeurs est indécomposable. Pour qu'une variable aléatoire ne prenant que des valeurs entières en nombre fini soit indécomposable, il faut et il suffit que le polynome qui constitue sa fonction génératrice ne puisse être mis sous forme d'un produit de polynomes à coefficients tous positifs.

On peut donner des exemples de lois de probabilité absolument continues et qui soient indécomposables.

$\varphi(t) = (1 - t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}$ étant la dérivée seconde changée de signe de $e^{-\frac{t^2}{2}}$, sera la fonction caractéristique d'une variable ayant pour probabilité élémentaire $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$ et pour support la droite de $-\infty$ à $+\infty$. D'après ce que l'on vient de voir, cette fonction caractéristique n'aura pas de diviseurs gaussiens (puisque la densité est nulle à l'origine). Cela entraîne qu'elle n'a pas de diviseurs de la forme $(1 - t^2)e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ $(\sigma^2 < 1)$. Les seuls diviseurs possibles sont donc $(1 - t)e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ ou $(1 + t)e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$, à cause des remarques qui suivent le théorème III.5 et ces deux fonctions n'étant pas hermitiennes ne sont pas caractéristiques. Donc la fonction caractéristique $(1 - t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}$ n'a pas de diviseurs. Dans (Cramer [3]), Cramer posait le problème : Donner un exemple de loi indécomposable absolument continue et dont le support appartienne à un intervalle borné. M. Paul Lévy a résolu la question dans une lettre qu'il m'a adressée le 15 avril 1952 (Lévy [5]), de la façon suivante :

Tout d'abord remarquons qu'il est facile de construire n lois de probabilité où la variable est bornée et qui soient sans diviseurs communs. Il suffit que les fonctions caractéristiques (qui sont obligatoirement d'ordre un) n'aient en commun qu'un ensemble de zéros ayant un exposant de convergence inférieur à l'unité (en particulier n'aient aucun zéro en commun). Par conséquent les variables uniformément réparties dans des intervalles de longueur l_n, les l_n étant incommensurables, ayant pour fonction caractéristique $\frac{\sin l_n t}{l_n t}$ sont sans diviseurs communs. Considérons maintenant la loi ayant pour fonction caractéristique

$$\varphi z(t) = p_0 \varphi_0(t) + p_2 e^{i2t} \varphi_2(t) + \ldots + p_{2n} e^{i2nt} \varphi_{2n}(t) \qquad (p_0, \ldots, p_{2n} > 0),$$

$\varphi_0(t), \ldots, \varphi_{2n}(t)$ étant des fonctions caractéristiques sans diviseurs communs et correspondant à des lois absolument continues où la variable est contenue dans l'intervalle o, l_{2k} avec $l_{2k} < 1$. De plus,

$$p_0 + p_2 e^{i2t} + \ldots + p_{2n} e^{i2nt}$$

est choisie parmi les fonctions caractéristiques de lois indécomposables (la variable a pour support les nombres pairs de o à $2n$). Montrons que $\varphi_Z(t)$ est indécomposable. Si Z était égal à la somme de X et de Y indépendants on pourrait s'arranger pour que o fasse partie du support de X et de celui de Y. Le support de X comme celui de Y est donc contenu dans le support de Z.

En posant :

$Z = z + \zeta_z$, avec z : partie entière de Z;
$X = x + \xi_x$, avec x : partie entière de X;
$Y = y + \eta_y$, avec y : partie entière de Y (x et y ne pouvant prendre que des valeurs paires),

on a

$$z = x + y \qquad \text{et} \qquad \zeta_z = \xi_x + \eta_y$$

(en effet si $\xi_x + \eta_y$ était supérieur à 1, Z pourrait prendre des valeurs impaires). La loi de probabilité de z a pour fonction caractéristique

$$p_0 + p_2 e^{i2t} + \ldots + p_{2n} e^{i2nt}.$$

Cette fonction n'ayant, par hypothèse, pas de diviseur, il en résulte que x (ou y) a comme seule valeur possible o avec la probabilité unité. Donc $X = \xi_0$. La fonction caractéristique de X doit donc être diviseur des différentes fonctions caractéristiques des différentes variables ζ, c'est-à-dire $\varphi_0, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n}$. Or ces fonctions ont été choisies sans diviseurs communs. Z est donc indécomposable.

Cette construction est susceptible de généralisation.

Nous allons maintenant donner des exemples où la décomposition d'une fonction caractéristique en produit de facteurs indécomposables n'est pas unique.

M. Paul Lévy (Lévy [6]) a utilisé la double égalité

$$\frac{\sin t}{t} = \cos\frac{t}{2}\,\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} = \frac{\sin\frac{t}{3}}{\frac{t}{3}}\left(\frac{e^{-i\frac{2t}{3}} + 1 + e^{i\frac{2t}{3}}}{3}\right)$$

pour remarquer que la loi de probabilité uniforme comprise entre -1

et $+1$ peut se décomposer d'une part en une somme de deux variables $X_1 + X_2$ dont l'une est indécomposable $\left(\varphi_{X_1}(t) = \cos \frac{t}{2}\right)$ et, d'autre part, en une somme de deux variables X'_1 et X'_2,

$$\varphi_{X'_1}(t) = \frac{\sin \frac{t}{3}}{\frac{t}{3}} \quad \text{et} \quad \varphi_{X'_2}(t) = \frac{e^{-i\frac{2t}{3}} + 1 + e^{i\frac{2t}{3}}}{3},$$

X_1 n'étant composante ni de X'_1 ni de X'_2.

M. Lévy a donné l'exemple suivant :

$$X_1 + X_2 = X'_1 + X'_2,$$

X_1, X_2, X'_1, X'_2 étant des lois indécomposables. Il suffit de prendre les fonctions génératrices suivantes des quatre variables :

$$g_{X_1}(Z) = \frac{1 + Z^2 + Z^4}{3}, \qquad g_{X_2}(Z) = \frac{1 + Z}{2},$$

$$g_{X'_1}(Z) = \frac{1 + Z^3}{2}, \qquad g_{X'_2}(Z) = \frac{1 + Z + Z^2}{3}.$$

On voit aisément en vertu de la remarque suivant le lemme du début de ce chapitre que les quatre fonctions génératrices sont sans diviseur et puisque

$$\frac{1 + Z^2 + Z^4}{3} \frac{1 + Z}{2} = \frac{1 + Z^3}{2} \frac{1 + Z + Z^2}{3},$$

on a bien l'égalité indiquée

D. Dugué (Dugué [5]) a indiqué que le fait suivant pouvait se produire $X + X = X'_1 + X'_2$, X étant indécomposable et X'_1 et X'_2 différent de X. Il suffit de prendre

$$g_X(t) = \frac{1}{35}(1 + 2t + 5t^2 + 12t^3 + 15t^4) = \frac{1}{35}(1 - t + 5t^2)(1 + 3t + 3t^2).$$

On a

$$g_X^2(t) = \frac{1}{7}(1 + 3t + 3t^2)\frac{1}{175}(1 + t + 8t^2 + 17t^3 + 28t^4 + 45t^5 + 75t^6).$$

Il suffit de prendre

$$g_{X'_1}(t) = \frac{1}{7}(1 + 3t + 3t^2)$$

et

$$g_{X'_2}(t) = \frac{1}{175}(1 + t + 8t^2 + 17t^3 + 28t^4 + 45t^5 + 75t^6).$$

On voit facilement que X'_1 et X'_2 sont indécomposables comme X.

Dans le même ordre d'idées signalons la décomposition suivante :

$$e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \cos t = e^{-\frac{\sigma_1^2 t^2}{2}} \left(\frac{\sqrt{2} \cos \frac{t}{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} \right) e^{-\frac{\sigma_2^2 t^2}{2}} \left(\frac{\sqrt{2} \cos \frac{t}{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} \right),$$

avec

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \sigma^2.$$

Si $\sigma_2^2 > \frac{1}{4 \log 2}$, $e^{-\frac{\sigma_2^2 t^2}{2}} \left(\frac{\sqrt{2} \cos \frac{t}{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} \right)$ est une fonction caractéristique, comme $e^{-\frac{\sigma_1^2 t^2}{2}}$ et $\frac{\sqrt{2} \cos \frac{t}{2} + 1}{\sqrt{2} + 1}$. Donc, si σ^2 est supérieur à $\frac{1}{4 \log 2}$, $e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \cos t$ est susceptible d'une autre décomposition que $e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ et $\cos t$ ($\cos t$ indécomposable ne divise aucune des fonctions caractéristiques facteurs du second membre).

Ces faits et ceux qui précèdent s'expriment en disant que la décomposition en produit de facteurs premiers peut ne pas être unique. C'est ce fait qui pour les anneaux algébriques avait donné naissance à la théorie des idéaux. Aucune étude de ce genre n'a encore été tentée pour l'arithmétique des lois de probabilité. Le dernier exemple indiqué montre qu'un produit de facteurs non divisibles par la fonction caractéristique indécomposable $\cos t$ peut être divisible par ce dernier facteur. L'exemple suivant établit une possibilité du même ordre, $\cos t$ étant remplacé par la loi normale $e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ (Sir R. A. Fisher et D. Dugué [1]). Sir R. A. Fisher a appelé ce problème, problème de la déflation.

Soit

$$\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2\alpha^2}} [a \cos 2t + b \cos t - c] \qquad [(a, b, c) > 0].$$

On vérifie que cette expression est la fonction caractéristique d'une variable ayant une densité de probabilité nulle à l'origine (donc n'ayant pas de composante gaussienne) si

$$(e) \qquad a\,e^{-2\alpha^2} + b\,e^{-\frac{\alpha^2}{2}} - c = 0.$$

La somme de deux telles aléatoires aura pour fonction caractéristique

$$\varphi^2(t) = e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}} \left[\frac{a^2}{2} \cos 4t + ab \cos 3t + \frac{b^2 - 4ac}{2} \cos 2t + \ldots \right.$$
$$\left. + b(a - 2c) \cos t + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + c^2 \right].$$

La parenthèse sera fonction caractéristique si $b^2 - 4ac > 0$ et $a > 2c$ [si $a > 2c$, l'équation (e) a une racine en $e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$ inférieure à 1 et le problème est possible]. Dans un très important Mémoire (Lévy [7]) consacré aux exponentielles de polynomes, M. Paul Lévy a étudié des faits analogues pour les lois de Poisson. En particulier, après avoir donné des conditions pour qu'une expression de la forme $e^{P(t)}$ soit une fonction génératrice, $P(t)$ étant un polynome, M. Paul Lévy a pu constater le fait que la somme de deux variables indécomposables convenablement choisies pouvait être décomposée en somme de trois lois de Poisson. C'était un des premiers exemples de loi indéfiniment divisible (comme somme de loi de Poisson) pouvant être décomposée en somme de deux lois indécomposables. Nous renvoyons à cet important Mémoire pour cette étude particulière de la décomposabilité.

D'autres exemples de faits analogues ont été signalés.

Tout d'abord celui de Raikoff. On a

$$\log(\alpha + \beta\, e^{it}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (e^{int} - 1),$$

$\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta > 0$ et $\alpha + \beta = 1$, les a_n étant réels et les deux séries

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a'_n (e^{int} - 1) \quad \text{et} \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} a''_n (e^{int} - 1)$$

étant convergentes avec $a'_n = a_n$ si $a_n \geqq 0$ et 0 si $a_n < 0$ et $a''_n = a_n$ si $a_n < 0$ et 0 si $a_n \geqq 0$.

On a donc

$$\alpha + \beta e^{it} = \frac{e^{\sum_{-\infty}^{+\infty} a'_n (e^{int}-1)}}{e^{\sum_{-\infty}^{+\infty} a''_n (e^{int}-1)}}.$$

Cette égalité montre que la fonction caractéristique indéfiniment divisible $e^{\sum_{-\infty}^{+\infty} a'_n (e^{int}-1)}$ a pour facteur le facteur indécomposable $\alpha + \beta e^{it}$ et le facteur indéfiniment divisible $e^{\sum_{-\infty}^{+\infty} a'' (e^{int}-1)}$

Kintchine a remarqué que

$$\varphi(t) = \frac{1-a}{1-a e^{it}} = \prod_{0}^{\infty} \frac{1+(a e^{it})^{2k}}{1+a^{2k}} = e^{\sum_{1}^{\infty} \frac{a^n}{n} (e^{int}-1)}$$

avec

$$0 < a < 1.$$

La deuxième égalité montre que $\varphi(t)$ est un produit infini de facteurs indécomposables et la troisième égalité que $\varphi(t)$ est une fonction caractéristique de loi indéfiniment divisible.

Le dernier résultat est plus général que le précédent.

H. Cramer dans (Cramer [4]) a donné le résultat suivant qui étudie le cas où la loi indéfiniment divisible est plus générale qu'une somme finie ou dénombrablement infinie de loi de Poisson (cas de Lévy, Raikoff, Khintchine).

S'il existe deux constantes positives k et c telles que la fonction $N(u)$ *qui sert à définir la loi indéfiniment divisible* (th. III, 8) *ait une dérivée presque partout supérieure à k dans au moins un des deux intervalles $-c$, 0 et 0, c la loi a un diviseur qui n'est pas indéfiniment divisible.*

H. Cramer donne la forme du diviseur si l'intervalle est $(0, c)$

$$\varphi(t) = e^{k\int_0^c (e^{itu}-1) a(u)\, du},$$

avec

$$a(u) = \begin{cases} -\alpha & \text{pour } \frac{1}{2} - \alpha < u < \frac{1}{2} + \alpha, \\ 1 & \text{ailleurs sur } 0, c \end{cases}$$

et α positif inférieur à $\frac{1}{2}$ et assez petit.

On en déduit avec Cramer que si G est la loi initiale indéfiniment divisible ayant $\Phi(t)$ pour fonction caractéristique, comme

$$\Phi(t) = \Phi(t)^{\frac{1}{2}} \Phi(t)^{\frac{1}{4}} \ldots \Phi(t)^{\frac{1}{2^n}} \ldots$$

et que chacun des facteurs est une fonction caractéristique satisfaisant à la condition de l'énoncé, une fonction caractéristique indéfiniment divisible obéissant à l'énoncé a une infinité de facteurs qui ne sont pas indéfiniment divisibles (on voit d'après le Mémoire cité que cette famille de facteurs dépend des paramètres prenant une infinité non dénombrables de valeurs). Toute loi stable non normale entre dans ce type de loi. Il serait intéressant de voir si ce procédé est susceptible de généralisations.

Dans (Dugué [5]) l'auteur indique certaines conséquences du fait qu'en général la décomposition en produit de facteurs indécomposables n'est pas unique, α et β étant deux nombres tels que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, il existe dans certains cas un nombre A^2 inférieur à 1 tel que

$$(1 - \alpha^2 t^2) e^{-\frac{\alpha^2 t^2}{2}}, \quad (1 - \beta^2 t^2) e^{-\frac{\beta^2 t^2}{2}}, \quad (1 - t^2 + \alpha^2 \beta^2 t^4) e^{-\frac{A^2 t^2}{2}}$$

soient des fonctions caractéristiques indécomposables. Leur produit ne divise pourtant pas la fonction caractéristique $(1 - t^2 + \alpha^2\beta^2 t^4) e^{-\frac{t^2}{2}}$ que chacune d'entre elle divise.

De même, les deux facteurs premiers $(1 - \alpha^2 t^2) e^{-\frac{\alpha^2 t^2}{2}}$ et $(1 - t^2 + \alpha^2\beta^2 t^4) e^{-\frac{A^2 t^2}{2}}$ divisent $(1 - t^2 + \alpha^2\beta^2 t^4) e^{-\frac{t^2}{2}}$ qui n'est pas égal à leur produit multiplié par une fonction caractéristique (on n'a pas l'analogie avec l'arithmétique des entiers : un multiple de deux nombres premiers est un multiple de leur produit).

Il serait intéressant de rechercher si ce dernier fait est une conséquence nécessaire du fait que la décomposition n'est pas unique.

Le même Mémoire donne des exemples des faits suivants :

1° Construction d'une fonction $g(t)$ non caractéristique (ici non génératrice) dont toutes les puissances entières le sont. Ce sera

$$g(t) = 1 + 2t - t^2 + 3t^3 + 4t^4.$$

Les puissances entières sont des fonctions génératrices et il n'y a que ces puissances qui le sont. En effet,

$$\begin{aligned} g^2(t) &= 1 + 4t + 2t^2 + 2t^3 + 19t^4 + 6t^5 + 3t^6 + 18t^7 + 9t^8, \\ g^3(t) &= 1 + 6t + 9t^2 + 5t^3 + 36t^4 + 60t^5 + 8t^6 \\ &\quad + 81t^7 + 117t^8 + 27t^9 + 54t^{10} + 81t^{11} + 27t^{12} \end{aligned}$$

sont caractéristiques. L'ensemble des nombres $2p + 3q$ (p et q étant les entiers positifs ou nuls) est constitué par 0 et tous les entiers supérieurs à 1. Il en résulte qu'une puissance entière quelconque de $g(t)$ est génératrice.

D'autre part, $g(t)$ n'a pas de zéro sur l'axe réel positif [sans quoi $g^2(t)$ en aurait, ce qui est impossible, tous les coefficients de $g^2(t)$ étant positifs]. Donc $[g(t)]^\alpha$ (α non entier) n'ayant comme singularité que les zéros de $g(t)$ n'aura aucune singularité sur l'axe réel positif. Ce fait est incompatible avec la possibilité pour $[g(t)]^\alpha$ d'avoir tous ses coefficients positifs à cause du théorème de Pringsheim (*voir* TIRCHMARSH, *The theory of functions*).

Ce fait a été utilisé par G. Darmois (G. Darmois [1]) dans ses études sur la régression.

2° Une conséquence du fait précédent est qu'il existe des fonctions $h(t)$ telles que $[h(t)]^\alpha$ est caractéristique si et seulement si $\alpha \geqq \alpha_0$.

En effet, prenons

$$h(t) = e^{\alpha g(t)} \qquad (\alpha > 0),$$

$h(t)$ va être développable en série, tous les coefficients étant positifs sauf peut-être celui de t^2. Ce dernier coefficient sera positif si et seulement si $\frac{d^2 h}{dt^2}$ est positif, ce qui est réalisé si et seulement si $\alpha \geqq \frac{1}{2}$.

Appelons E l'ensemble des valeurs réelles α telles que $[\varphi(t)]^\alpha$ soit caractéristique. En vertu des propriétés élémentaires des fonctions caractéristiques, E doit être clos par rapport à l'addition (si α_1 et $\alpha_2 \in E$, $\alpha_1 + \alpha_2 \in E$) et fermé. C'est un problème encore non résolu que de savoir si ces deux conditions sont suffisantes. Les exemples ci-dessus donnent des exemples possibles pour E comprenant tous les entiers supérieurs à 1 et E comprenant tous les nombres supérieurs ou égaux à $\frac{1}{2}$. En dehors des généralisations évidentes de ces deux cas, on ne connaît pas d'autres solutions.

Enfin l'exemple suivant dû à Khintchine montre que dans certains cas le « quotient » (au sens où nous avons parlé de diviseurs) d'une loi par une autre peut ne pas être déterminé.

Considérons la fonction caractéristique de Khintchine définie au lemme A précédant le théorème II, 1, $k(t) = 1 - |t|$ si $|t| < 1$ et o si $|t| > 1$ et la fonction périodique $j(t)$ coïncidant avec cette dernière dans l'intervalle $-1, +1$. Cette fonction est caractéristique en vertu du théorème II, 4.

On a

$$\varphi(t) = k^2(t) = k(t)j(t).$$

Le quotient de la fonction caractéristique $\varphi(t)$ par $k(t)$ est donc indéterminé; il peut prendre la valeur $\alpha k(t) + \beta j(t)$ (α, $\beta > 0$ et $\alpha + \beta = 1$). L'ensemble organisé des fonctions caractéristiques ne constitue donc pas un semi-groupe au sens de l'algèbre, puisque l'axiome de simplification n'est pas valable; $\varphi_1\varphi_2 = \varphi_1\varphi_3$ n'entraîne pas $\varphi_2 = \varphi_3$.

Si maintenant on considère d'une manière générale l'anneau des fonctions transformées de Fourier des fonctions à variation bornée, cet anneau ne constitue pas un domaine d'intégrité puisque le fait précédent se traduit par l'existence de diviseurs de zéros.

CHAPITRE V.

Compléments. Produit de variables aléatoires.

L'étude du produit de deux variables aléatoires indépendantes donne des théorèmes sur la décomposition en somme en remplaçant la variable initiale par son logarithme.

Dans cet ordre d'idées, signalons les résultats suivants :

1° Une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de

Dugué (Dugué [6]) qui établit qu'une variable aléatoire normale peut être considérée comme un produit infini de variables aléatoires. Ce résultat utilise la transformation de Mellin;

2° Dans le travail (D. Dugué et Girault [1]), les auteurs établissent qu'une variable aléatoire obéissant à une loi de probabilité de Pólya [c'est-à-dire satisfaisant aux conditions du théorème II.3 et telle que $\lim\limits_{t=\infty} \varphi(t) = 0$] est le produit d'une variable de Khintchine (*voir* lemme A du chapitre II) par une autre variable indépendante; ce résultat est susceptible d'extensions;

3° Dans (Girault [1]), l'auteur établit que la fonction

$$\Phi(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(t)\,du$$

est caractéristique si $\varphi(u)$ l'est aussi. Il montre que la variable aléatoire dont $\Phi(t)$ est la fonction caractéristique est le produit de la variable dont $\varphi(t)$ est la fonction caractéristique pour une variable indépendante et uniformément répartie de 0 à 1, ce qui l'amène à énoncer en utilisant des résultats de Khintchine qu'une variable ayant une loi de type unimodale est toujours le produit de deux variables indépendantes dont l'une est uniformément répartie entre 0 et 1.

Dans le même travail on trouvera des extensions de ce résultat qui a été prolongé par une Note de Hans Loeffel : *Intégration d'un ensemble de fonctions caractéristiques par rapport à un paramètre.*

BIBLIOGRAPHIE.

Borel :

[1] *Éléments de la théorie des ensembles,* Albin Michel.

Cramer (H.) :

[1] *Random variables and probability distributions,* Cambridge University Press, 1937.

[2] *Ueber eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion* (*Math. Z.*, t. 41, 1936, p. 405-414).

[3] *Problems in probability theory* (*Ann. Math. Stat.*, t. 18, n° 2, 1947).

[4] *On the factorization of probability distributions* (*Arkiv Math.*, 1949).

Darmois (G.) :

[1] *Sur la régression. Résultats nouveaux. Problèmes non résolus* (*Colloque sur l'Analyse statistique,* Bruxelles, 1954).

Doeblin (W.) :

[1] *Premiers éléments d'une étude systématique de l'ensemble des puissances d'une loi de probabilité* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 206, 1938, p. 306).

Dugué (D.) :

[1] *Sur l'approximation d'une fonction caractéristique par sa série de Fourier* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 240, 1955, p. 151).

[2] *Analyticité et convexité des fonctions caractéristiques* (*Ann. Inst. H. Poincaré,* t. 12, p. 45).

[3] *Sur les théorèmes limites du Calcul des Probabilités* (*Bull. Inst. Intern. Stat.*, 1956).

[4] *Sur les fonctions méromorphes transformées de Fourier de fonctions monotones* (*C. R. Acad. Sc*, t. 208, 1939. p. 1547).

[5] *Sur certains exemples de décomposition en arithmétique des lois de probabilité* (*Ann. Inst. H. Poincaré,* t. 12, p. 159).

[6] *Sur le produit de variables aléatoires* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 233, 1951, p. 1421).

Dugué et Girault :

[1] *Fonctions convexes de Pólya* (*Publ. Inst. Stat. Univ. Paris,* vol. IV fasc. 1, 1955).

Sir Fisher (R. A.) et Cornish :

[1] *Cumulants* (*Bull. Inst. Intern. Stat.*, 1938).

Sir Fisher (R. A.) et Dugué (D.) :

[1] *Un résultat assez inattendu d'arithmétique des lois de probabilité* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 227, 1948, p. 1205).

DE FINETTI (B.) :

[1] *La funzioni caratteristiche di legge istantanea dotale di valori eccezionali* (*Rend. Accad. Lincei*, série 6, t. 14, 1931, 2e sem., p. 259).

GIRAULT (M.) :

[1] *Les fonctions caractéristiques et leurs transformations* (*Thèse*, 1955 et *Publ. Inst. Stat. Univ. Paris*, 1956).

GLIVENKO :

[1] *Sul thorema limite della teoria delle funzioni caratteristiche* (*Giorn. Ist. ital. Attuari*, t. 7, 1936, p. 160-167).

KHINTCHINE :

[1] *Contribution à l'arithmétique des lois de distribution* (*Bull. Math. Univ. Moscou*, 1937).

KUNETZ (G.) :

[1] *Sur quelques propriétés des fonctions caractéristiques* (*Thèse*, 1937).

LÉVY (P.) :

[1] *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Gauthier-Villars, 1954.

[2] *Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villars.

[3] *Propriétés asymptotiques des sommes des variables aléatoires indépendantes ou enchaînées* (*J. Math. pures et appl.*, 1935, p. 347).

[4] *Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes* (*Ann. Sc. Norm. Pisa*, 1934 et 1935).

[5] Correspondance personnelle, 15 août 1952.

[6] *Sur l'arithmétique des lois de probabilités* (*J. Math. pures et appl.*, 1938).

[7] *Sur les exponentielles de polynomes* (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 1937, p. 231).

LOÈVE (M.) :

[1] *Sur les fonctions aléatoires stationnaires du second ordre* (*Revue Scientifique*, t. 83, 1945).

[2] *On the sets of probability laws and their limit elements*, University of California publications in Statistics.

[3] *Nouvelles classes de lois limites* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, 1945, p. 107-126).

LUKACS :

[1] *On certain periodic characteristic functions* (*Proceedings of the International Congress Amsterdam*, 1954, p. 296).

[2] *Remarks concerning characteristic functions* (*Ann. Math. Stat.*, 1956).

LUCKACS et SZASZ (Otto) :

[1] *On analytic characteristic functions* (*Pacific J. Math.*, décembre 1952).

[2] *Some non negative trigonometric polynomials connected with a problem in probability* (*J. Res. Nat. Bur. Stand.*, février 1952).

[3] *Non negative polynomials and certain rational characteristic functions* (*J. Res. Nat. Bur. Stand.*, mars 1954).

PÓLYA :

[1] *Remarks on characteristic functions,* Proceedings of the Berkeley Symposium.

RAIKOFF :

[1] *On the decomposition of Gauss and Poisson laws* (*Bull. Acad. Sc. U. R. S. S.,* Sc. Math., 1938, p. 91).

[2] *On the composition of analytic distribution functions* (*C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.,* t. 23, 1939, p. 511).

WINTHER (A.) :

[1] *Des distributions symétriques à fonction caractéristique convexé* (*Publications de l'Institut de statistique de l'Université de Paris,* vol. V, 1956, p. 43-45).

TABLE DES MATIÈRES.