

GÉRARD COUCHET

**Mouvements plans d'un fluide en présence  
d'un profil mobile**

*Mémoires des sciences mathématiques*, fascicule 135 (1956)

[http://www.numdam.org/item?id=MSM\\_1956\\_\\_135\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSM_1956__135__1_0)

© Gauthier-Villars, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémoires des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# MÉMORIAL

DES

# SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,  
 DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COIMBRE, CRACOVIE, KIEW,  
 MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),  
 DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

**Henri VILLAT**

Membre de l'Institut,  
 Professeur à la Sorbonne,  
 Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE CXXXV

Mouvements plans d'un fluide  
 en présence d'un profil mobile

Par M. Gérard COUCHET

Maitre de Conférences  
 à la Faculté des Sciences de l'Université de Montpellier



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

1956



© 1956 by Gauthier-Villars.

**Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés  
pour tous pays.**

---

# MOUVEMENTS PLANS D'UN FLUIDE

## EN PRÉSENCE D'UN PROFIL MOBILE

Par M. Gérard COUCHET,

Maître de Conférences  
à la Faculté des Sciences de l'Université de Montpellier.

---

### PRÉFACE.

Le présent fascicule a pour objet l'exposé d'une partie importante de la Mécanique plane des fluides parfaits incompressibles : l'étude du mouvement d'un fluide troublé par le déplacement donné d'un profil.

Cette question semble avoir intéressé les aérodynamiciens dès 1924 ; à cette époque le travail de Birnbaum sur l'aile battante ouvre la longue liste des publications relatives au problème de la vitesse critique de l'aile dans lequel la principale difficulté concerne le calcul des forces aérodynamiques.

En raison de l'importance pratique de ce problème, il était nécessaire d'obtenir assez rapidement des résultats immédiatement utilisables, aussi les travaux concernant un cas très particulier (profil réduit à un segment de droite et incidence très faible) ont été très nombreux et occupent une place énorme dans la littérature du non stationnaire ; mais l'orientation trop particulière de ces travaux rendait difficile l'utilisation des résultats obtenus en vue de recherches moins spécialisées.

Cependant, les mathématiciens ne perdaient pas de vue le pro-

blème général et, s'appuyant sur toute une série de Mémoires qui se situent entre la théorie de l'Impulse de Lord Kelvin et les publications de M. Villat sur les tourbillons : Glauert [7], Jones [11], Rosa Morriss [15], J. Pérès [14], Wagner [20] obtenaient d'intéressants résultats dans l'étude des forces aérodynamiques qui agissent sur un profil en mouvement dans un fluide parfait incompressible (1).

C'est en utilisant largement ces derniers travaux et en particulier ceux de M. J. Pérès (dont j'ai conservé les notations) que j'ai pu traiter le problème du profil anguleux, mettre en évidence une classe étendue de mouvements non stationnaires à circulation constante et en faire l'étude.

On trouvera dans ce travail la majeure partie des questions qui concernent le problème général; mais en raison du caractère de la publication, j'ai cru devoir reprendre certaines notions classiques, pensant qu'une initiation de ce genre pourrait rendre des services; pour certains problèmes, au contraire, je me suis contenté d'indiquer la méthode, renvoyant, pour la solution, aux Mémoires originaux.

L'ensemble comprend cinq chapitres : le premier est consacré aux généralités; dans le deuxième, qui traite des mouvements à circulation nulle, on verra qu'il est possible de réduire considérablement les expressions des efforts aérodynamiques par un choix convenable d'axes liés au profil. Le troisième chapitre concerne les mouvements non stationnaires à circulation constante et se termine par une généralisation des résultats obtenus par M. J. Pérès dans l'étude d'un courant quelconque en présence d'un obstacle fixe.

Le quatrième chapitre est relatif au mouvement d'un profil en présence de tourbillons et j'ai estimé nécessaire de revenir, à ce sujet, sur la question de l'existence de ces singularités dans le fluide et de sa compatibilité avec l'absence de force extérieure, car c'est de cette étude que découle la condition de liberté des tourbillons. Certains auteurs définissent l'action du courant sur un tourbillon comme la résultante des pressions exercées par le fluide sur une circonférence entourant la singularité; sans nous arrêter à ceux qui font un calcul inexact, nous remarquerons qu'il n'est pas possible de partir d'une telle définition puisque le résultat ainsi obtenu change quand on remplace la circonférence par une autre courbe fermée. Le lecteur

---

(1) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie à la fin de l'Ouvrage.

pourra voir que le résultat de ce calcul, que nous avons été conduit à faire pour une circonférence, est différent de celui que l'on obtiendrait, par exemple, pour une ellipse : il a donc fallu remonter aux théorèmes généraux pour éviter les contradictions.

Le cinquième chapitre contient une revue très succincte des travaux expérimentaux et des théories approchées ; certains des résultats obtenus nécessitent des approximations de caractères différents : celles qui concernent les mouvements infiniment voisins de mouvements à circulation constante sont comparables à celles que l'on fait, dans les traités de Mécanique rationnelle, quand on étudie les petits mouvements ; d'autres ont un caractère plus expérimental. A ce propos je crois devoir souligner que les quatre premiers chapitres ne contiennent aucune approximation : les théories exposées le sont d'une manière rationnelle et il me paraît utile de faire quelques réflexions à ce sujet.

En Mécanique rationnelle on crée une réalité fictive en utilisant des êtres de raison qui sont soumis une fois pour toutes à des hypothèses ayant un caractère physique ; mais on opère ensuite par déduction, absolument comme en Géométrie et c'est pourquoi cette forme de Mécanique a bien sa place en Mathématiques. Dans ce cas l'expérience permet de juger *a posteriori* de la valeur de la schématisation utilisée.

Il est bien évident que l'étude de ces êtres idéalisés est souvent insuffisante pour arriver à des résultats pratiques, aussi, succède à la première, une autre forme de la Mécanique où l'on essaye de serrer de plus près la réalité en introduisant, au début de chaque question, de nouvelles hypothèses. Il en résulte une complication inévitable de la partie mathématique et l'on ne peut arriver à une solution qu'au prix de nouvelles hypothèses, simplificatrices celles-ci, faites le plus souvent en cours de calcul, et dont la justification n'est pas toujours évidente. Quand on soumet les résultats à l'expérience, il est très difficile de faire la part de la schématisation et celle des simplifications mathématiques introduites ; il en résulte de sérieuses difficultés quand on est obligé de rechercher des améliorations.

L'utilité de ces deux aspects de la Mécanique ne fait aucun doute et si la première ne permet qu'assez rarement de traiter les questions pratiques, elle sert toujours de base à la deuxième dont l'utilité se manifeste dans les applications. Cependant la part de la Mécanique

rationnelle doit être assez grande et l'étude des problèmes idéalisés assez poussée avant de soumettre les questions à de nouvelles hypothèses; c'est bien ce qui se passe pour la Mécanique du solide, par exemple, mais il n'en est pas ainsi en Mécanique des fluides où la partie rationnelle est un peu trop réduite. Il est certain que cela vient, en très grande partie, de la difficulté des problèmes mathématiques que pose cette partie de la Mécanique; nous croyons cependant qu'il y aurait intérêt à revenir sur certaines questions et à essayer de pousser un peu plus loin leur étude théorique avant d'introduire des hypothèses plus compliquées pour se livrer ensuite à des simplifications plus ou moins justifiées.

Il est bon de remarquer aussi que les études théoriques permettent quelquefois de mettre en évidence des phénomènes qu'il serait bien difficile de déceler autrement; deux exemples simples permettront de bien préciser : sans la Mécanique rationnelle du solide, il aurait été bien difficile de découvrir les propriétés du gyroscope qui ont donné tant d'applications; c'est la Mécanique rationnelle des fluides qui a permis de mettre en évidence la loi simple régissant les mouvements non stationnaires à circulation constante d'un profil à pointe dont les applications pratiques peuvent ne pas être négligeables. Dans les deux cas, la théorie mathématique a conduit à l'observation de phénomènes nouveaux.

Surtout je ne voudrais pas que l'on donne à ce qui précède un sens exagéré, ce que l'on peut appeler la Mécanique pratique des fluides est absolument indispensable au progrès matériel; beaucoup de chercheurs la cultivent et obtiennent, d'ailleurs, de très beaux résultats, mais si certains problèmes présentent de grosses difficultés c'est, peut-être, parce que la part de la Mécanique rationnelle n'a pas toujours été suffisante. Il est certain que les recherches, dans ce domaine, sont plus longues, plus pénibles et quelquefois bien décevantes, mais nous les croyons indispensables et si la lecture de ces quelques lignes pouvait grossir le nombre, au demeurant assez restreint, des mathématiciens qui s'occupent de Mécanique rationnelle, je suis sûr que les progrès théoriques ne tarderaient pas et les applications pratiques qui en résulteraient suivraient assez rapidement.

M. H. Villat a bien voulu accueillir cet exposé dans le *Mémorial*

*des Sciences mathématiques*; qu'il veuille bien trouver ici l'expression de mes respectueux remerciements.

Les résultats que j'ai obtenus en Mécanique des fluides doivent beaucoup à M. J. Pérès qui n'a cessé de s'intéresser à mes travaux et de me prodiguer ses inestimables conseils; je suis heureux de lui exprimer ici toute ma gratitude.

M. Raymond Siestrunck a bien voulu, avec son amabilité coutumière, accepter de relire les épreuves; qu'il en soit bien cordialement remercié.

Montpellier, le 10 juin 1953.

## CHAPITRE I.

### GÉNÉRALITÉS.

#### 1. — Les équations.

**1. Fluide parfait.** — Dans tous les traités de Mécanique rationnelle on montre que les mouvements d'un fluide parfait sont soumis à l'équation

$$\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p = \vec{F} - \vec{J},$$

où  $\rho$  désigne la densité du fluide en un point M,  $p$  la pression en ce point,  $\vec{J}$  l'accélération de la particule fluide qui passe en M et  $\vec{F}$  la force par unité de masse du fluide.

Dans les problèmes que nous étudions dans ce fascicule, la force  $\vec{F}$  est nulle et nous supposons de plus le mouvement plan; les vitesses des diverses particules fluides sont alors parallèles à un même plan P et les mouvements fluides dans deux plans parallèles à P se déduisent l'un de l'autre par une translation perpendiculaire à ces plans. Nous étudierons donc le mouvement dans le plan P que nous rapporterons à deux axes rectangulaires fixes  $ox, oy$ .

En désignant par  $J_x, J_y$  les composantes de  $\vec{J}$  sur ces deux axes nous aurons

$$(1) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -J_x, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -J_y.$$



soit, en utilisant les composantes  $u$ ,  $v$  de la vitesse d'une particule fluide,

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{du}{dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}, \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dv}{dt} = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t}.$$

**2. Fluide incompressible.** — C'est un fluide dont la densité est constante; les composantes  $u$ ,  $v$  de la vitesse sont liées par certaines relations que nous allons établir. La compatibilité des deux dernières relations donne d'abord

$$(2) \quad u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \zeta \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0,$$

avec

$$\zeta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

(en conservant  $\rho$  on obtiendrait l'équation des fluides parfaits en mouvements plans).

Pour obtenir une deuxième relation, considérons la masse fluide renfermée dans un cylindre ayant pour section droite une courbe fermée ( $c$ ) du plan P et dont la hauteur est égale à l'unité de longueur. La variation de la masse fluide considérée pendant le temps  $\Delta t$  sera

$$\Delta t \cdot \rho \int (\alpha u + \beta v) ds = \Delta t \cdot \rho \iint_{\mathcal{A}} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\sigma,$$

$\alpha$ ,  $\beta$  étant les composantes de la normale à ( $c$ ) orientée vers l'extérieur,  $ds$  l'élément d'arc de ( $c$ ),  $\mathcal{A}$  l'aire limitée par ( $c$ ),  $d\sigma$  l'élément d'aire du plan P.

Comme cette variation doit être nulle,

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

nous obtenons ainsi la deuxième relation.

**3. Fluide irrotationnel.** — Le mouvement plan d'un fluide parfait incompressible satisfait aux équations (2) et (3); parmi ces mouvements, les plus simples sont ceux qui correspondent à la solution évidente de l'équation (2)

$$\zeta = 0.$$

On montre d'ailleurs que si le fluide est initialement en repos ces mouvements sont seuls possibles (1).

Ces mouvements sont dits irrotationnels et satisfont au système

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Les relations précédentes montrent que  $u - iv$  est une fonction analytique de  $z = x + iy$ ; nous pouvons donc écrire

$$u - iv = \frac{df}{dz}$$

puisque toute fonction analytique admet une primitive.

Bien entendu, l'adjonction d'une fonction arbitraire du temps à  $f$  (qui dépend en général de  $z$  et  $t$ ) sera sans importance.

En distinguant, dans  $f$ , la partie réelle  $\varphi$  et la partie imaginaire  $\psi$ , nous aurons les relations

$$u - iv = \frac{df}{dz} = \frac{d(\varphi + i\psi)}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} - i \frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

qui montrent que  $\varphi$  est le potentiel réel des vitesses.  $f(z)$  sera appelé potentiel complexe des vitesses et les équations (1) pourront s'écrire

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2) + \frac{\partial u}{\partial t}, \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (u^2 + v^2) + \frac{\partial v}{\partial t},$$

c'est-à-dire, en désignant par  $\vec{V}$  le vecteur vitesse,

$$\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p = -\frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} V^2 - \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}.$$

L'existence du potentiel  $\varphi$  des vitesses permet d'écrire

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \overrightarrow{\text{grad}} \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

de sorte que la pression s'exprime par

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{1}{2} V^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial t} + C(t).$$

---

(1) Voir, par exemple, H. VILLAT [19], p. 10.

En utilisant le potentiel complexe, on a la relation

$$(5) \quad \frac{p}{\rho} = -\frac{1}{2} \frac{df}{dz} \frac{\overline{df}}{dz} - \frac{d\varphi}{dt} + C(t),$$

où  $\frac{\overline{df}}{dz}$  est la quantité conjuguée de  $\frac{df}{dz}$  <sup>(1)</sup> et  $C(t)$  une fonction arbitraire du temps.

Il convient de noter que l'intégrale (°)

$$\int_c u dx + v dy = \alpha \int_c df = \int_c d\varphi$$

que l'on appelle la circulation le long de la courbe ( $c$ ) est nulle pour toute courbe fermée qui, par déformation, peut être réduite à un point sans rencontrer de singularités ou sans sortir du domaine de définition de  $f(z)$ .

**4. Fluide contenant des tourbillons.** — On peut admettre, pour la vitesse complexe, l'existence de singularités fixes ou mobiles; elle conduit à des potentiels plus généraux qui permettent, dans bien des cas, de mieux schématiser la réalité physique.

Il est indispensable de remarquer qu'en de tels points les relations (1) ne sont plus vérifiées; nous verrons au chapitre IV le genre de difficulté qui en résulte.

On utilise fréquemment le potentiel

$$-\frac{i\Gamma}{2\pi} \log(z - z_0)$$

qui donne la vitesse complexe

$$u - iv = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z - z_0}.$$

C'est le tourbillon ponctuel d'affixe  $z_0$  et d'intensité constante  $\Gamma$  ( $z_0$  est en général une fonction du temps).

Le potentiel n'est plus uniforme autour du point d'affixe  $z_0$  et la pression serait elle-même multiforme si  $\Gamma$  n'était pas une constante.

<sup>(1)</sup> Dans tout ce qui suit, nous utilisons cette notation.

<sup>(2)</sup>  $\alpha$  et  $\varphi$  désignerons, par la suite, les parties réelle et imaginaire de l'expression qu'ils précèdent.

5. **Fluide contenant un obstacle.** — Dans tout ce qui suit, nous désignerons par  $Ox, Oy$  deux axes rectangulaires liés au contour ( $c$ ) de l'obstacle que nous appellerons aussi profil.  $O_1x_1, O_1y_1$  seront deux axes rectangulaire fixes. Le mouvement du profil sera caractérisé par les composantes  $l, m$  sur  $Ox, Oy$  de la vitesse du point  $O$  et par la rotation instantanée  $\omega$ ,

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \quad \theta = \widehat{O_1x_1, Ox}.$$

Nous désignerons toujours par  $f(z, t)$  le potentiel des vitesses *absolues* qui s'exprime en fonction de l'affixe  $z$  de la particule fluide *dans le système mobile* et du temps  $t$ .

Cherchons les conditions que doit remplir ce potentiel pour que le mouvement fluide qui en dérive soit compatible avec l'existence du profil.

L'affixe de la vitesse absolue d'une particule fluide est

$$u + iv = \frac{df}{dz}$$

et la différence

$$u + iv - (l + im + i\omega z) = \frac{df}{dz} - (l + im + i\omega z)$$

donne la vitesse de la particule fluide relative au profil.

En exprimant que le long de ( $c$ ) cette vitesse relative est tangente au profil, on obtient la condition

$$\mathcal{I} \left[ \frac{df}{dz} - (l - im - i\omega \bar{z}) \right] dz = 0$$

ou

$$\mathcal{I}[df - (l - im - i\omega \bar{z}) dz] = 0,$$

qui par intégration donne

$$(6) \quad \psi = -mx + ly - \frac{\omega}{2}(x^2 + y^2)$$

en négligeant une fonction additive du temps sans importance pratique dans les calculs. En supposant le fluide en repos à l'infini, la fonction  $f(z, t)$ , analytique en  $z$ , sera caractérisée, à chaque instant, par les conditions suivantes :

- 1° Elle est définie à l'extérieur de ( $c$ );

2° Sa dérivée est régulière dans le même domaine, y compris le point à l'infini où elle s'annule;

3° Sa partie imaginaire  $\psi$  prend sur  $(c)$  les valeurs données par la relation (6).

On sait <sup>(1)</sup> que la fonction analytique de  $Z$

$$(7) \quad -\frac{1}{\pi} \int_c \left( \frac{d\zeta}{\zeta - Z} - \frac{d\zeta}{2\zeta} \right) \Phi(\zeta)$$

prend sur la circonférence  $(C)$  centrée à l'origine des valeurs dont

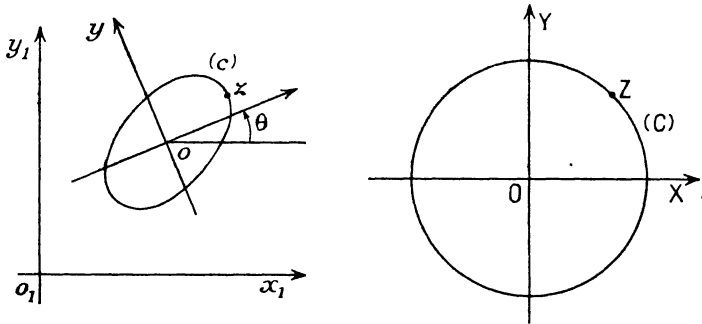


Fig. 1.

les parties imaginaires sont  $\Phi(\zeta)$  au point d'affixe  $\zeta$ ; pour se ramener à ce cas, il suffit d'utiliser une transformation conforme

$$z = H(Z)$$

qui fait passer du profil  $(c)$  à la circonférence  $(C)$  (*fig. 1*).

Avant d'aborder le calcul du potentiel, nous donnerons quelques indications sur la transformation qui permet de passer d'une circonférence à un profil.

## II. — La transformation d'une circonférence en un profil.

**1. La formule de transformation.** — Nous utiliserons une fonction  $H(Z)$  holomorphe à l'extérieur du cercle  $(C) : |Z| = a$ , définie sur ce cercle et admettant le point à l'infini comme pôle simple.

(1) Voir J. PÉRÈS [14], p. 162.

La transformation

$$z = H(Z)$$

fera correspondre à la circonférence (C) un profil (c); à l'extérieur de (C) correspondra l'extérieur de (c) et les points à l'infini des deux plans seront homologues.

A l'extérieur de (C) et sur (C) on utilisera un développement de Laurent de la forme

$$z = a_{-1}Z + a_0 + \frac{a_1}{Z} + \dots + \frac{a_n}{Z^n} + \dots$$

que l'on pourra, grâce à une similitude, réduire à

$$(8) \quad z = Z + \frac{a_1}{Z} + \dots + \frac{a_n}{Z^n} + \dots$$

L'origine du plan des  $z$ , point indépendant des axes de coordonnées, est appelé : centre du profil.

2. Aire du profil. — On peut l'écrire

$$\alpha = \frac{1}{2} \int x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_C \bar{z} dz.$$

Si  $H(Z)$  n'a que des points singuliers intérieurs à (C), elle prend la forme :

$$\alpha = \frac{1}{2} \int_C \left[ \bar{Z} + \frac{\bar{a}_1}{Z} + \dots + \frac{\bar{a}_n}{Z^n} + \dots \right] \left[ 1 - \frac{a_1}{Z^2} - \dots - \frac{na_n}{Z^{n+1}} + \dots \right] dZ,$$

et comme sur (C)

$$Z \cdot \bar{Z} = a^2,$$

il vient

$$\alpha = \frac{1}{2} \int_C \left[ \frac{a^2}{Z} + \frac{\bar{a}_1 Z}{a^2} + \dots + \bar{a}_n \left( \frac{Z}{a^2} \right)^n + \dots \right] \left[ 1 - \frac{a_1}{Z} - \dots - \frac{na_n}{Z^{n+1}} - \dots \right] dZ.$$

Les deux séries précédentes étant absolument convergentes dans une couronne circulaire de centre O et contenant (C),

$$\alpha = \pi \left[ a^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{na_n \bar{a}_n}{(a^2)^n} \right].$$

Cette formule s'écrit plus simplement

$$\alpha = -\pi \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{na_n \bar{a}_n}{(a^2)^n}$$

si l'on admet que  $a_0 = 0$  et  $a_{-1} = 1$ .

**3. Centre de gravité de l'aire intérieure au profil (c).** — Son affixe s'écrit

$$\zeta = \frac{1}{2\alpha i} \int_c z \bar{z} dz$$

et dans les mêmes conditions qu'au numéro précédent, nous aurons

$$\zeta = \frac{1}{2\alpha i} \int_c \left( Z + \frac{a_1}{Z} + \dots + \frac{a_n}{Z^n} + \dots \right) \left[ \frac{a^2}{Z} + \frac{a_1}{a^2} Z + \dots + \bar{a}_n \left( \frac{a^2}{Z} \right)^n + \dots \right] dz.$$

Le produit des deux séries qui figurent sous le signe  $\int$  peut s'écrire

$$\dots + A_n Z^n + \dots + A_1 Z + A_0 + \frac{A_{-1}}{Z} + \dots + \frac{A_{-n}}{Z^n} + \dots,$$

avec

$$A_{-p} = (a^2)^p \bar{A}_p.$$

et

$$A_p = \frac{1}{(a^2)^p} \sum_{\lambda=-1}^{\infty} \frac{a_\lambda \bar{a}_{p+\lambda}}{(a^2)^\lambda} \quad (p \geq 0).$$

L'expression de  $\zeta$  devient alors

$$\zeta = \frac{\pi}{\alpha} \left[ A_{-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n A_n \right]$$

ou encore

$$\zeta = -\frac{\pi}{\alpha} \sum_{n=-1}^{\infty} n a_n A_n = -\frac{\pi}{\alpha} \sum_{n=-1}^{\infty} n \frac{a_n \bar{A}_{-n}}{(a^2)^n}.$$

**4. Profil présentant une pointe.** — Dans ce cas, la dérivée de  $H(Z)$  s'annule en un point  $Z_p$  de la circonférence (C); on peut toujours, par une rotation, amener ce point sur l'axe réel et prendre

$$Z_p = a.$$

L'axe réel du plan de  $(z)$  est appelé, dans ce cas, le premier axe du profil et on a

$$\frac{dH}{dZ} = (Z - a)^{k-1} H_1(Z)$$

( $k$  étant compris entre 1 et 2 et  $H_1(a) \neq 0$ ).

L'angle à la pointe vaut  $(2 - k)\pi$  et le profil présente un rebroussement pour  $k = 2$ .

Les opérations du numéro précédent restent légitimes si la série de terme général  $\frac{n\alpha_n}{Z^{n+1}}$  est absolument convergente sur le cercle  $(C)$  : nous nous placerons toujours dans ce cas.

5. **Profil Joukowski.** — C'est celui qui provient du cercle  $(C)$  par la transformation

$$z = Z + \frac{b^2 e^{i\beta}}{Z - Z_0},$$

avec

$$Z_0 = a - b e^{i\beta} \quad (b \text{ et } \beta \text{ réels}).$$

La pointe présente un rebroussement et correspond au point  $P(Z = a)$  (*fig. 2*).

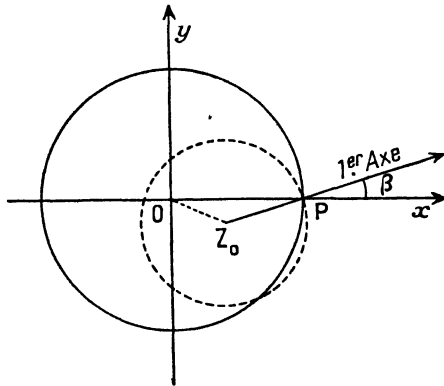


Fig. 2.

On peut sans difficulté calculer les  $\alpha_i$  et  $A_i$  en développant en série

$$\left(1 - \frac{Z_0}{Z}\right)^{-1},$$



mais ici, comme chaque fois que  $H(Z)$  est donnée sous forme finie, on peut opérer directement.

Par exemple,

$$\alpha = \frac{1}{2} \mathcal{J} \int_c \bar{z} dz = \frac{1}{2} \mathcal{J} \int_c \bar{H}(\bar{Z}) \cdot H_z dZ$$

et comme, sur  $(C)$ ,  $Z\bar{Z} = a^2$ , on est ramené à l'intégration d'une fonction analytique sur le cercle  $(C)$ .

Pour obtenir un profil à pointe anguleuse, il suffit de modifier la formule précédente après avoir remarqué qu'elle peut s'écrire

$$z = z_p + \frac{Z \left(1 - \frac{a}{Z}\right)^2}{1 - \frac{Z_0}{Z}},$$

$z_p$  étant l'affixe de la pointe.

La transformation <sup>(1)</sup>

$$z = z_p + \frac{Z \left(1 - \frac{a}{Z}\right)^k}{1 - \frac{Z_0}{Z}} \quad (1 < k < 2)$$

donnera une pointe anguleuse, et l'origine sera le centre du profil si

$$z_p + Z_0 - ka = 0.$$

## CHAPITRE II.

### MOUVEMENT D'UN PROFIL A CIRCULATION NULLE.

**1. Le potentiel.** — Nous avons vu au chapitre I (§ I, n° 5) que le potentiel complexe des vitesses, pour un mouvement du profil caractérisé par les fonctions  $l$ ,  $m$ ,  $\omega$  du temps, est une fonction analytique de  $z$ , régulière à l'infini et dont la partie imaginaire vaut

$$\psi = -mx + ly - \frac{\omega}{2}(x^2 + y^2)$$

en tout point du profil.

---

<sup>(1)</sup> Voir G. COUCHET, *Sur une généralisation du profil Joukowsky (Recherche Aéronautique, 1951, n° 20)*.

La transformation

$$z = H(Z)$$

fait correspondre au profil (*c*) un cercle (C) et à  $\psi$  une fonction  $\Phi$ . Le potentiel est alors donné par la formule (7) du chapitre I.

Ce potentiel comprendra trois termes provenant des coefficients de *l*, *m*,  $\omega$  dans  $\psi$ . Ces termes se calculent facilement en remarquant que sur (C) où  $z \cdot \bar{Z} = a^2$  on a

$$2x = z + \bar{z} = \dots + \frac{a_n}{Z^n} + \dots + \frac{a_1}{Z} + \frac{a_1 + a^2}{Z} + \left(1 + \frac{\bar{a}_1}{a^2}\right) Z + \dots + \frac{\bar{a}_n}{(a^2)^n} Z^n + \dots$$

$$2iy = z - \bar{z} = \dots - \frac{a_n}{Z^n} + \dots + \frac{a_2}{Z^2} + \frac{a_1 - a^2}{Z} + \left(1 - \frac{a_1}{a^2}\right) Z - \dots - \frac{\bar{a}_n}{(a^2)^n} Z^n + \dots$$

$$x^2 + y^2 = z \bar{z} = \dots + A_n Z^n + \dots + A_1 Z + A_0 + \frac{A_{-1}}{Z} + \dots + \frac{A_{-n}}{Z^n} + \dots$$

Ces trois formules proviennent du développement de  $z = H(Z)$  (chap. I, § II, n° 1) et les opérations qui suivent sont valables dans des conditions qui ont été précisées au chapitre I (§ II, n° 4).

Le coefficient de *l* sera

$$- \frac{1}{2\pi} \int_c \left( \frac{d^2 \zeta}{\zeta - Z} - \frac{d^2 \zeta}{2\zeta} \right) \left[ + \dots + \frac{a_n}{\zeta^n} + \dots + \frac{a_1 + a^2}{\zeta} + \left(1 + \frac{\bar{a}_1}{a^2}\right) \zeta + \dots \right],$$

c'est-à-dire

$$z - Z - \frac{a^2}{Z}.$$

On trouvera de même pour les coefficients de *m* et  $\omega$

$$\begin{aligned} & -i \left( z - Z + \frac{a^2}{Z} \right), \\ & -i \left( \frac{A_{-1}}{Z} + \dots + \frac{A_{-n}}{Z^n} + \dots \right). \end{aligned}$$

La fonction potentiel, ainsi calculée, sera donc

$$(1) \quad G(Z) = l \left( z - Z - \frac{a^2}{Z} \right) - im \left( z - Z + \frac{a^2}{Z} \right) - i\omega \left( \frac{A_{-1}}{Z} + \dots + \frac{A_{-n}}{Z^n} + \dots \right)$$

que l'on pourra exprimer à l'aide de *Z* par

$$\begin{aligned} G(Z) = l \left[ \frac{a_1 - a^2}{Z} + \frac{a^2}{Z^2} + \dots + \frac{a_n}{Z^n} + \dots \right] & - im \left( \frac{a_1 + a^2}{Z} + \frac{a^2}{Z^2} + \dots + \frac{a_n}{Z^n} + \dots \right) \\ & - i\omega \left( \frac{A_{-1}}{Z} + \dots + \frac{A_{-n}}{Z^n} + \dots \right) \end{aligned}$$

ou à l'aide de  $z$  par

$$g(z) = l \left( \frac{a_1 - a^2}{z} + \dots \right) - im \left( \frac{a_1 + a^2}{z} + \dots \right) - i\omega \left( \frac{A_{-1}}{z} + \dots \right).$$

[Pour obtenir la dernière forme, on utilisera le développement

$$Z = z - \frac{a_1}{z} + \dots$$

qui se déduit de ceux qui figurent au chapitre I (§ II, n° 4).] On peut vérifier que la fonction  $G(Z)$  ainsi trouvée vérifie bien les trois conditions mentionnées au chapitre I (§ I, n° 5).

La circulation autour du profil (chap. I, § I, n° 3) est nulle,

$$\mathcal{A} \int_c dG = 0.$$

*Exemple.* — En prenant

$$z = Z + \frac{b^2}{Z} \quad (b \text{ réel}),$$

on obtient un profil elliptique dont les axes sont  $Ox$ ,  $Oy$ .

Le potentiel est alors

$$l \frac{b^2 - a^2}{Z} - im \frac{b^2 + a^2}{Z} - i\omega \frac{a^2 b^2}{Z^2}.$$

Pour  $b = a$ , on obtient le segment de droite (profil de la plaque)

$$y' = 0, \quad -2a \leq x \leq 2a$$

qui correspond au potentiel

$$- \frac{2ima^2}{Z} - i\omega \frac{a^4}{Z^2}.$$

*Remarque.* — Dans le cas où  $H(Z)$  est donnée sous une forme finie, on peut calculer le potentiel en utilisant les trois fonctions

$$\begin{aligned} 2x &= H(Z) + \bar{H}(\bar{Z}), \\ 2iy &= H(Z) - \bar{H}(\bar{Z}), \\ x^2 + y^2 &= H(Z) \cdot \bar{H}(\bar{Z}), \end{aligned}$$

qui s'expriment sur  $(C)$  à l'aide de  $Z$  en raison de la relation

$$Z\bar{Z} = a^2.$$

2. **Les efforts.** — La pression en un point du fluide est donnée par la formule (5) du chapitre I qui utilise un potentiel en axes fixes. Quand les axes sont liés au profil, la dérivée  $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$  qui était prise en un point fixe doit être remplacée par

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - (l - \omega y) \frac{\partial\varphi}{\partial x} - (m + \omega x) \frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

car  $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$  est maintenant prise en un point du plan du profil. La pression s'écrit donc

$$p = -\frac{\rho}{2}(u^2 + v^2) - \rho \left[ \frac{\partial\varphi}{\partial t} - (l - \omega y) \frac{\partial\varphi}{\partial x} - (m + \omega x) \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right] + C(t)$$

et la force élémentaire vaut

$$dF = ip \, dz.$$

En utilisant le potentiel, on peut écrire (1)

$$(u^2 + v^2) d\bar{z} = \frac{df}{dz} df - 2i \frac{df}{dz} d\psi,$$

ce qui permet, compte tenu de la condition aux limites, de réduire l'expression de la force élémentaire à

$$dF = \frac{\rho i}{2} \left( \frac{df}{dz} \right)^2 dz - i\rho d\varphi(l - im - i\omega \bar{z}) + \rho i \frac{\partial\varphi}{\partial t} d\bar{z}.$$

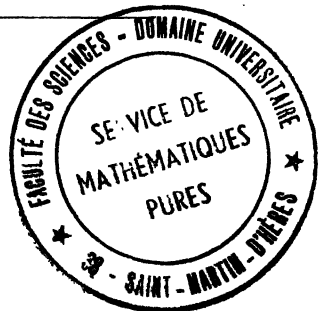
Enfin en introduisant  $df$ ,  $d\bar{f}$ ,  $\frac{\partial\bar{f}}{\partial t}$ , on obtient une formule dans laquelle les intégrations portent sur des différentielles analytiques ou sur des différentielles qui le deviennent en changeant  $i$  en  $-i$ .

En désignant par X, Y les composantes de la force sur les axes liés au profil, on obtient

$$\begin{aligned} X - iY = & \frac{i\rho}{2} \int_c \left( \frac{df}{dz} \right)^2 dz - i\rho(l - im) \int_c df - \rho\omega \int_c \bar{z} d\bar{f} + i\rho \int_c \frac{\partial\bar{f}}{\partial t} d\bar{z} \\ & + \rho\alpha \left[ \frac{dl}{dt} - i \frac{dm}{dt} - i\omega(l - im) - \bar{\zeta} \left( \omega^2 + i \frac{d\omega}{dt} \right) \right]. \end{aligned}$$

Des calculs analogues conduisent à l'expression du moment résultant des forces aérodynamiques par rapport à l'origine des axes liés

(1) Voir J. PÉRÈS [14], p. 169.



au profil (1) :

$$\mathcal{M}_0 = \alpha \left[ -\frac{\rho}{2} \int_C \frac{H}{H_z'} \left( \frac{dF}{dZ} \right)^2 dZ + \rho(l - im) \int_C H dF - \frac{\rho}{2} \int_C \frac{\partial F}{\partial t} d(H \cdot H_1) + \rho \alpha (l - im) \omega \zeta \right].$$

Cette expression introduit la fonction

$$H_1(Z) = \bar{H}(\bar{Z}) = \bar{H}\left(\frac{a^2}{Z}\right)$$

régulière à l'intérieur du cercle (C) et, bien entendu, toujours définie sur ce cercle.

En utilisant le potentiel (1) du présent chapitre, on trouve l'affixe de la force

$$\begin{aligned} X + iY &= 2\pi\rho i\omega[(a_1 - a^2)l - (a_1 + a^2)im - i\omega A_{-1}] \\ &\quad + \rho\alpha i\omega(l + im) - \rho\alpha\omega^2\zeta \\ &\quad + 2\pi\rho \left[ (a_1 - a^2) \frac{dl}{dt} - (a_1 + a^2)i \frac{dm}{dt} - i \frac{d\omega}{dt} A_{-1} \right] \\ &\quad + \rho\alpha \left( \frac{dl}{dt} + i \frac{dm}{dt} \right) + \rho\alpha i\zeta \frac{d\omega}{dt} \end{aligned}$$

et l'on voit, en la rapportant aux axes fixes  $O_1x_1, O_1y_1$ , que son expression se met sous la forme d'une dérivée par rapport au temps.

L'affixe, en axes fixes, s'écrit

$$X_1 + iY_1 = (X + iY) e^{i\theta} = -i\rho \frac{d}{dt} [A l + B m + C \omega] e^{i\theta},$$

avec

$$\begin{aligned} A &= 2\pi i(a_1 - a^2) + i\alpha, \\ B &= 2\pi(a_1 + a^2) - \alpha, \\ C &= 2\pi A_{-1} - \alpha\zeta. \end{aligned}$$

Le calcul du moment par rapport au centre du profil se fait de la même manière et donne

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0 &= \pi\rho \mathcal{J} \left[ 2a_1(l - im)^2 - 2i\omega(l - im)A_{-1} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{dl}{dt} - i \frac{dm}{dt} \right) \left( 2A_{-1} - \frac{\alpha\zeta}{\pi} \right) - iP \frac{d\omega}{dt} \right] + \rho\alpha\omega(l\xi + m\eta), \end{aligned}$$

---

(1) Voir G. COUCHET [3], p. 17.

avec

$$\zeta = \xi + i\eta \quad \text{et} \quad P = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n A_{-n}.$$

En utilisant le point fixe  $O_1$  comme origine des moments, on obtient encore  $\mathcal{M}_0$  sous forme d'une dérivée par rapport aux temps, qui fait intervenir les coordonnées  $x_0 y_0$  du centre du profil par rapport aux axes fixes  $O_1 x_1, O_1 y_1$ .

En utilisant, en effet, les relations

$$\mathcal{M}_{0_1} = \mathcal{M}_0 - \mathcal{R} i(x_0 - iy_0)(X_1 + iY_1)$$

et

$$\frac{d}{dt}(x_0 + iy_0) = (l + im) e^{t\theta},$$

on obtient

$$\mathcal{M}_{0_1} = -\rho \frac{d}{dt} \mathcal{R} [(x_0 - iy_0)(Al + Bm + C\omega) e^{t\theta} + Ci(l - im) + \pi P \omega].$$

(On remarquera que  $P$  est réel).

**3. La résultante cinétique et le moment cinétique du fluide.** — Si l'on calcule directement la résultante cinétique d'une portion du fluide qui, à l'instant  $t$ , se trouve à l'intérieur d'un contour ( $\Sigma$ ) et si l'on veut passer à la limite pour embrasser tout le fluide, on est conduit à des intégrales semi-convergentes. Il en est de même pour le moment cinétique. Ces deux notions n'ont pas de sens dans le cas d'un fluide s'étendant à l'infini <sup>(1)</sup>.

Cependant, les formules précédentes mettent en évidence deux quantités qui peuvent jouer le rôle de la résultante cinétique et du moment cinétique du fluide total quand il s'agit de calculer les efforts de ce fluide sur le profil par application des théorèmes généraux de la Mécanique.

Comme il n'y a pas de confusion possible avec des quantités qui n'existent pas nous dirons que

$$i\rho(Al + Bm + C\omega)$$

---

<sup>(1)</sup> On pourra consulter, à ce sujet, un intéressant article de M. J. J. Moreau dans le *Bulletin de la Société française des Mécaniciens* (1<sup>re</sup> année, n° 2, septembre 1951).

est la résultante cinétique du fluide rapportée aux axes liés au profil et que

$$+ \rho \mathcal{R}[(x_0 - iy_0)(Al + Bm + C\omega)e^{i\theta} + Ci(l - im) + \pi P\omega]$$

est le moment cinétique du fluide par rapport au point fixe  $O_1$ .

On calculera les efforts du profil sur le fluide en utilisant les théorèmes généraux et l'on obtiendra les actions du fluide sur le profil en prenant les efforts opposés.

On remarquera que, si l'on admet la formule habituelle du changement d'origine pour le moment cinétique, on peut prendre l'expression

$$\rho \mathcal{R}[Ci(l - im) + \pi P\omega]$$

comme moment cinétique du fluide par rapport à  $O$ .

**4. Réduction des formes précédentes : axes principaux d'un profil.** — En mettant en évidence le module  $r^2$  et l'argument  $2\varphi$  de  $\alpha_1$ , on obtient

$$i(Al + Bm + C\omega) = (2\pi\alpha^2 - \mathcal{A})(l + im) - 2\pi r^2(l - im)e^{2i\varphi} + iC\omega$$

ou

$$i(Al + Bm + C\omega)e^{-i\varphi} = (2\pi\alpha^2 - \mathcal{A})(l + im)e^{-i\varphi} - 2\pi r^2(l - im)e^{i\varphi} + iCe^{-i\varphi}\omega$$

et en prenant de nouveaux axes faisant un angle  $\varphi$  avec les anciens, il vient :

$$(2) \quad \begin{aligned} i(Al + Bm + C\omega)e^{-i\varphi} \\ = (2\pi\alpha' - \mathcal{A})(\lambda + i\mu) - 2\pi r^2(\lambda - i\mu) + iCe^{-i\varphi}\omega, \end{aligned}$$

ou  $\lambda$  et  $\mu$  désignent les composantes de la vitesse de  $o$  sur les nouveaux axes <sup>(1)</sup>. Posons

$$\begin{aligned} \alpha &= 2\pi(\alpha^2 - r^2) - \mathcal{A}, \\ \beta &= 2\pi(\alpha^2 + r^2) - \mathcal{A}, \\ C_1 + iC_2 &= iCe^{-i\varphi} = (2\pi A_{-1} - \mathcal{A}\zeta)e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}; \end{aligned}$$

---

(<sup>1</sup>) On peut remarquer que cela revient à prendre  $\alpha_1$  réel; si nous ne nous plaçons pas toujours dans de telles conditions, c'est que la condition de circulation constante que nous rencontrerons plus loin s'exprime facilement en utilisant le premier axe du profil.

l'expression du second membre de (2) qui s'écrit

$$\alpha\lambda + i\beta\mu + (C_1 + iC_2)\omega$$

met en évidence le point S de coordonnées

$$p = \frac{C_2}{\beta}, \quad q = -\frac{C_1}{\alpha}$$

et dans le système d'axes déduit du précédent par la translation  $\vec{OS}$  (fig. 3), la forme que nous étudions s'écrira

$$\alpha l + i\beta m,$$

$l$  et  $m$  désignant les composantes de la vitesse de S sur les nouveaux axes.

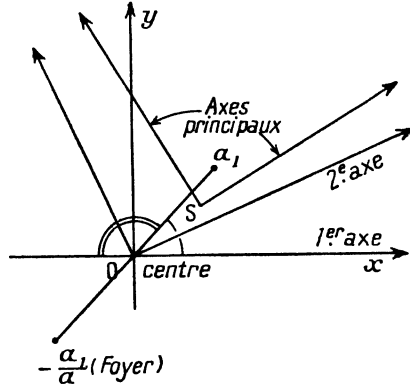


Fig. 3.

La résultante cinétique du fluide devient donc

$$\rho(\alpha l + i\beta m).$$

La forme qui figure dans le moment se réduit de la même manière; on a successivement après la rotation et la translation <sup>(1)</sup>,

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \mathcal{R} \{ (x_0 - iy_0)(-i)[\alpha\lambda + i\beta\mu + (C_1 + iC_2)\omega] e^{i(\theta+\varphi)} \\ \quad + (C_1 + iC_2)(\lambda - i\mu) + \pi P \omega \}, \\ \rho \mathcal{R} \{ [x_0 - iy_0 + (p - iq) e^{-i(\theta+\varphi)}](-i)(\alpha l + i\beta m) e^{i(\theta+\varphi)} \\ \quad + [i(p - iq)(C_1 + iC_2) + \pi P] \omega \}. \end{array} \right.$$

(1) Communication présentée au VIII<sup>e</sup> Congrès International de Mécanique théorique et appliquée (Istanbul, août, 1952) (*La Recherche Aéronautique*, 1953, n° 32).



Comme au numéro précédent, on voit apparaître la somme du moment de la résultante cinétique appliquée en S et d'un terme dépendant seulement de  $\omega$  que l'on peut considérer, sous les mêmes conditions, comme le moment cinétique du fluide par rapport à S.

En résumé, en utilisant les axes d'origine S que nous proposons d'appeler les axes principaux du profil (S étant le pôle de ce profil), la résultante cinétique du fluide a pour composantes sur ces axes

$$\rho\alpha l, \quad \rho\beta m,$$

tandis que le moment cinétique par rapport à S vaut

$$\rho\gamma\omega,$$

avec

$$\gamma = \pi P + \left( \frac{C_1^2}{\alpha} + \frac{C_2^2}{\beta} \right).$$

5. **Calcul de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  en axes principaux.** — Si le profil est rapporté à ses axes principaux la transformation conforme s'écrit

$$z = b_{-1}Z + b_0 + \frac{b_1}{Z} + \dots + \frac{b_n}{Z^n} + \dots,$$

où  $b_0$  est l'affixe du centre du profil tandis que les coefficients  $b_i$  sont reliés aux  $a_i$  par

$$b_k = a_k e^{i\psi} \quad (k \neq 0),$$

$\psi$  étant l'angle du premier axe avec le nouvel axe réel

$$\psi = -\varphi.$$

On a, dans ces conditions,

$$\alpha = 2\pi a^2 - \mathcal{A} - r^2, \quad \beta = 2\pi a^2 - \mathcal{A} + r^2,$$

$r$  étant ici le module de  $b_1$  et  $\gamma$  étant défini par

$$\gamma = \pi P + \frac{C_1^2}{\alpha} + \frac{C_2^2}{\beta},$$

avec

$$C_1 + iC_2 = i[2\pi A_{-1} e^{i\psi} - \mathcal{A}(\zeta - b_0)].$$

Dans le nouveau système,  $\zeta$  est l'affixe du centre de gravité et

les  $A_p$  sont donnés par

$$A_{-p} = -b_0 b_p + \sum_{\lambda=-1}^{\infty} \frac{\bar{b}_\lambda b_{\lambda+p}}{(a^2)^\lambda} \quad \text{pour } p > 1,$$

$$A_{-1} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\bar{b}_\lambda b_{\lambda+1}}{(a^2)^\lambda}$$

et

$$A_p = \frac{\bar{A}_{-p}}{(a^2)^p}.$$

**6. Les efforts rapportés aux axes principaux.** — On a vu au n° 4 du présent chapitre que la résultante cinétique du fluide  $\vec{R}$  a pour expression complexe

$$\rho(\alpha l + i\beta m);$$

on obtiendra la résultante  $\vec{F}$  des efforts sur le profil en changeant de signe la dérivée *absolue* de cette expression

$$-\rho \left[ \alpha \frac{dl}{dt} + i\beta \frac{dm}{dt} - \omega(\beta m - i\alpha l) \right].$$

Le moment résultant, par rapport à S, des efforts du fluide sur le profil peut s'écrire

$$\vec{M}_S = \vec{M}_{O_1} + \vec{S}\vec{O}_1 \wedge \vec{F},$$

c'est-à-dire, d'après la formule (3) du présent chapitre,

$$\vec{M}_S = -\frac{d}{dt} (\vec{O}_1 \vec{S} \wedge \vec{R} + \gamma \vec{\omega}) + \vec{S}\vec{O}_1 \wedge \vec{F}$$

ou

$$\vec{M}_S = -\frac{d\vec{S}}{dt} \wedge \vec{R} - \vec{O}_1 \vec{S} \wedge \frac{d\vec{R}}{dt} - \gamma \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{S}\vec{O}_1 \wedge \vec{F}$$

et comme

$$\vec{F} = -\frac{d\vec{R}}{dt},$$

il reste

$$(4) \quad \vec{M}_S = \vec{R} \wedge \frac{d\vec{S}}{dt} - \rho\gamma \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Le moment se calculera donc par la formule

$$M_S = -\rho [(\beta - \alpha) lm + \gamma \omega'].$$

La formule (4) montre que le théorème du moment cinétique pris par rapport à un point variable est applicable quand on l'écrit sous la forme

$$\vec{M}_S = \frac{d\vec{\sigma}_S}{dt} + \frac{d\vec{R}}{dt} \wedge \frac{d\vec{S}}{dt},$$

où  $\vec{\sigma}_S$  est le moment cinétique par rapport à S et  $\vec{R}$  la résultante cinétique.

**7. La force vive du fluide.** — Nous allons calculer la force vive du fluide en appliquant les théorèmes généraux; le travail élémentaire des forces aérodynamiques qui s'exercent sur le profil peut s'écrire

$$\sum \vec{F} \times \left( \frac{d\vec{S}}{dt} + \vec{\omega} \wedge S \vec{M} \right) dt = - \left( \vec{V}_S \times \frac{d\vec{R}}{dt} + \rho \gamma \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right) dt.$$

c'est-à-dire

$$- \frac{1}{2} \rho d(\alpha l^2 + \beta m^2 + \gamma \omega^2).$$

On peut donc prendre comme force vive du fluide

$$2T = \rho(\alpha l^2 + \beta m^2 + \gamma \omega^2) + \text{const.};$$

il en résulte que les composantes de la résultante cinétique du fluide sur les axes principaux sont

$$\frac{\partial T}{\partial l}, \quad \frac{\partial T}{\partial m},$$

tandis que le moment cinétique du fluide par rapport à S a pour mesure

$$\frac{\partial T}{\partial \omega}.$$

**8. Calcul direct de la force vive du fluide.** — Si la résultante cinétique et le moment cinétique du fluide ne peuvent se définir directement, il n'en est pas de même de la force vive et il est nécessaire d'en faire le calcul pour bien montrer qu'il n'y a aucune contradiction dans notre définition.

Nous ne donnerons pas tous les détails de ce calcul; en voici les grandes lignes :

Partant du potentiel  $G(Z)$ , on voit que la force vive d'une portion

de fluide limitée par un contour  $(\gamma)$  renfermant  $(c)$  sera

$$\iint G'_z \bar{G}'_z \frac{1}{H'_z \bar{H}'_z} d\sigma,$$

$d\sigma$  étant l'élément d'aire dans le plan du profil, le champ d'intégration étant l'aire comprise entre  $(\gamma)$  et  $(c)$ .

En désignant par  $r$  et  $\alpha$  le module et l'argument de  $Z$ , cette intégrale devient

$$\iint G'_z \bar{G}'_z r dr d\alpha$$

étendue à l'aire comprise entre une courbe  $(\Gamma)$  et le cercle  $(C)$ . Cette intégrale porte sur une série absolument convergente de sorte que son calcul ne fait aucune difficulté et donne

$$\rho [x l^2 + \beta m^2 + \gamma \omega^2].$$

La constante rencontrée au n° 7 du présent chapitre est donc nulle.

### CHAPITRE III.

#### LES MOUVEMENTS A CIRCULATION CONSTANTE.

##### I. — Le profil n'a pas de pointe.

**1. Le potentiel.** — En se reportant au chapitre I (§ I, n° 5), on peut remarquer que l'adjonction à  $G(Z)$  du potentiel d'un mouvement plan, dans lequel le cercle  $(C)$  est une ligne de courant, ne change pas les conditions aux limites pour le profil  $(c)$ .

Le potentiel

$$- \frac{i\Gamma}{2\pi} \log Z$$

admet  $(C)$  comme ligne de courant et donne une vitesse nulle à l'infini, il en résulte que le potentiel

$$G(Z) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log Z,$$

où  $\Gamma$  est une constante, satisfera aux conditions 2° et 3° du chapitre I

(§ I, n° 5). Ce potentiel n'est plus uniforme et la circulation autour du profil est égale à  $\Gamma$ .

**2. Les efforts.** — Le calcul des efforts se conduit comme au chapitre II et montre que la présence d'une circulation  $\Gamma$  introduit une force appliquée au centre du profil, qui vaut

$$i\rho(l + im)$$

quand on utilise les axes ayant le centre du profil pour origine.

C'est la force de Joukowski qui peut aussi se mettre sous la forme d'une dérivée par rapport au temps en remarquant que son expression en axes fixes s'écrit

$$i\rho(l + im) e^{i\theta} \Gamma = i\rho \frac{d}{dt} (x_0 + iy_0) \Gamma.$$

La résultante cinétique <sup>(1)</sup> du fluide vaut donc

$$(1) \quad -i\rho[(x_0 + iy_0)\Gamma - (Al + Bm + C\omega) e^{i\theta}].$$

La présence de  $\Gamma$  ne change pas l'expression du moment par rapport à l'origine du profil; un calcul analogue au précédent donne le moment cinétique du fluide par rapport à  $O_1$  qui s'écrit

$$\rho \mathcal{R} \left[ \frac{x_0^2 + y_0^2}{2} \Gamma - (x_0 - iy_0)(Al + Bm + C\omega) e^{i\theta} + Cl(l - im) + \pi P\omega \right]$$

à une constante additive près.

*Remarque.* — On peut, pour l'évaluation des forces, utiliser les résultats de J. J. Moreau (*Thèse*, Paris, 1949). Cet auteur relie notamment la quantité de mouvement d'un milieu incompressible emplissant le plan (fluide et système immergé quelconques, supposés de même densité), au repos à l'infini, à la structure asymptotique de l'écoulement. Ainsi, dans le cas bidimensionnel, s'il y a un potentiel complexe, on introduit le *résidu à l'infini* de ce potentiel :  $f(z)$  admettant le développement à l'infini

$$f(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \log z + \frac{z_1}{z} + \frac{z_2}{z^2} + \dots,$$

---

<sup>(1)</sup> Voir chap. II, n° 3.

la résultante des forces appliquées dans l'étendue du milieu est donnée par

$$X + iY = -2\pi\rho \frac{dx_1}{dt}.$$

Quand on applique cette formule au cas d'un obstacle, on voit que  $\alpha_1$  dépend de  $l$ ,  $m$ ,  $\omega$ ,  $\Gamma$  et l'on trouve un résultat qui est bien en accord avec la formule (1).

**3. Le travail des forces aérodynamiques.** — La force provenant de la circulation ne travaille jamais puisqu'elle est toujours perpendiculaire au déplacement de son point d'application. Le travail élémentaire de la force correspondant à la circulation nulle s'obtient en utilisant les résultats du chapitre II (n° 9), il vaut :

$$\frac{1}{2}\rho d[\alpha l^2 + \beta m^2 + \gamma \omega^2].$$

Le travail entre deux instants en résulte immédiatement.

Si le mouvement est périodique, le travail est nul pour une période; il y a lieu de remarquer qu'il suffit que  $l$ ,  $m$ ,  $\omega$  soient périodiques (avec la même période) pour qu'il en soit de même.

Enfin il existe pour tout profil une famille de mouvements pour lesquels les forces aérodynamiques ne travaillent jamais, ce sont les mouvements pour lesquels

$$\alpha l^2 + \beta m^2 + \gamma \omega^2 = \text{const.}$$

En particulier, si la rotation  $\omega$  *reste constante*, la relation précédente exprime que la roulante du mouvement du plan du profil est la conique

$$\alpha Y^2 + \beta X^2 = \text{const.}$$

dont les axes sont les axes principaux du profil. (Les coordonnées  $XY$  du centre instantané de rotation, sont, en effet,  $-\frac{m}{\omega}$ ,  $\frac{l}{\omega}$ .)

## II. — Le profil présente une pointe.

**1. Le potentiel.** — Soit  $F(Z)$  le potentiel exprimé dans le plan de la circonférence  $(C)$ ; la vitesse de la particule fluide dont l'image

dans le plan de (C) a pour affixe  $Z$  est donnée par

$$u - iv = \frac{df}{dz} = \frac{dF}{dZ} \frac{1}{\frac{dH}{dZ}},$$

où  $u$  et  $v$  sont les composantes de la vitesse sur les axes liés au profil.

A la pointe du profil,

$$\frac{dH}{dZ} = 0$$

et pour que la vitesse de la particule fluide en ce point ne soit pas infinie, il faut que

$$(2) \quad \frac{dF}{dZ} = 0.$$

Nous avons vu que le potentiel d'un mouvement à circulation constante peut s'écrire

$$G(Z) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log Z$$

quand on utilise des axes qui placent l'image de la pointe du profil au point  $(a, 0)$  du cercle (C). Dans ces conditions, la condition (2) devient

$$\left[ \frac{dG}{dZ} - \frac{i\Gamma}{2\pi Z} \right]_{Z=a} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\Gamma = -2\pi ai \left( \frac{dG}{dZ} \right)_{Z=a}.$$

En utilisant la valeur de  $G$  trouvée au n° 1 du chapitre II, on obtient

$$\Gamma = 4\pi a(m + \omega\Omega),$$

avec

$$\Omega = \frac{1}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\Lambda_{-n}}{a^n}$$

et l'on prouve facilement la réalité de la constante  $\Omega$  et, par conséquent, celle de  $\Gamma$  (1).

La formule qui donne  $\Gamma$  montre que la circulation n'est pas cons-

(1) Voir G. COUCHET [3], p. 19.

tante en général ; il existe néanmoins une famille de mouvements pour laquelle

$$(3) \quad m + \omega\Omega = g = \text{const.}$$

Si  $m$  et  $\omega$  sont constants, on trouve la rotation (ou translation) uniforme et sinon on obtient les mouvements non stationnaires à circulation constante qui vont faire l'objet des paragraphes suivants.

Pour ces mouvements, le potentiel est toujours celui du n° 1 (§ I) du présent chapitre, mais de plus la condition (3) doit être satisfaite.

**2. Conditions cinématiques.** — L'interprétation cinématique de la condition (3) est très simple : la vitesse d'un point du plan du profil situé sur la droite ( $\Delta$ )

$$x = \Omega$$

a une projection constante sur cette droite (ou sur  $Oy$ ).

Pour réaliser un tel mouvement du profil, il suffira donc de remarquer que la vitesse de glissement de ( $\Delta$ ) sur son enveloppe reste constante ( $m + \omega\Omega$  étant précisément cette vitesse de glissement).

On pourra remarquer enfin que si l'on se donne le mouvement d'un point A du profil situé sur ( $\Delta$ ), l'orientation du premier axe s'en déduit facilement en utilisant l'hodographe ( $\mathcal{H}$ ) du mouvement de A : il suffit de mener du point M de ( $\mathcal{H}$ ), correspondant à A, une tangente à un cercle de rayon constant  $g$  centré au pôle P de ( $\mathcal{H}$ ) pour obtenir la direction du premier axe du profil. Dans ce cas, le problème a deux solutions qui correspondent à des valeurs opposées de la circulation.

Si l'on se donne le mouvement d'un point du plan du profil non situé sur ( $\Delta$ ), la condition (3) conduit à une équation différentielle du premier ordre qui donne  $\theta$  en fonction du temps.

**3. Cas particulier de la circulation nulle.** — La vitesse de glissement de la droite ( $\Delta$ ) sur son enveloppe étant nulle, ( $\Delta$ ) est la roulante dans le mouvement du plan du profil sur le plan fixe ; la base et la loi du mouvement peuvent être quelconques.

**4. Un exemple simple** <sup>(1)</sup>. — Supposons que le point A du profil

(1) Voir chap. V, n° 1.



soit animé d'un mouvement résultant d'une translation uniforme de vitesse  $\vec{V}$  et d'une rotation uniforme de vitesse angulaire  $\omega$ . L'hodographe ( $\mathcal{H}$ ) sera une circonférence et le point M correspondant à A s'obtiendra sans difficultés.

On peut supprimer la translation uniforme du profil et supposer que le fluide au lieu d'être en repos à l'infini est animé de la translation opposée; le mouvement du point A est alors une rotation uniforme et la modulation d'incidence, trouvée en menant à chaque

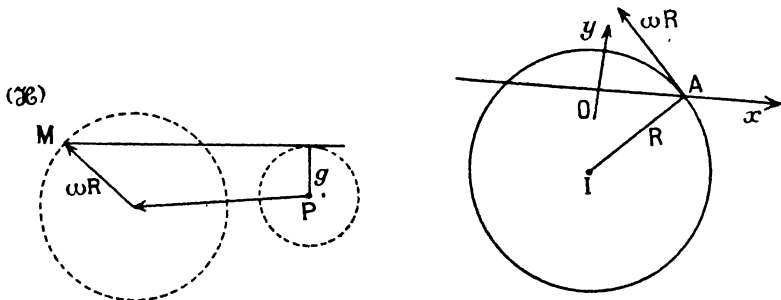


Fig. 4.

instant une tangente de M au cercle de centre P, assure une circulation constante au cours du mouvement <sup>(2)</sup> (fig. 4).

Le mouvement du profil peut être révolutif ou oscillatoire; tout dépend des modules des vitesses de translation et de rotation.

**5. La condition de circulation constante en axes principaux. Calcul des efforts.** — En axes principaux (fig. 5), l'équation de ( $\Delta$ ) est de la forme

$$x \cos \psi + y \sin \psi = h.$$

La condition de circulation constante est ainsi

$$-(l - \omega y) \sin \psi + (m + \omega x) \cos \psi = g,$$

c'est-à-dire

$$m \cos \psi - l \sin \psi + \omega h = g,$$

la valeur de la circulation étant  $4\pi a g$  et  $\psi$  désignant l'angle du premier axe avec Sx.

<sup>(2)</sup> Voir chap. III, § II, n° 12.

La partie de l'action aérodynamique indépendante de la circulation a été déterminée au n° 8 du chapitre II; elle est équivalente à deux forces dont les éléments de réduction en S sont :

— Forces :

$$\rho\omega(\beta m - i\alpha l) \quad \text{et} \quad -\rho\left(\alpha \frac{dl}{dt} + i\beta \frac{dm}{dt}\right);$$

— Moments par rapport à S

$$-\rho(\beta - \alpha)lm \quad \text{et} \quad -\rho\gamma \frac{d\omega}{dt}.$$

Le support de la première force a pour équation

$$\omega(\alpha lx + \beta my) = (\beta - \alpha)lm,$$

soit en mettant en évidence les coordonnées  $p$  et  $q$  du centre instan-

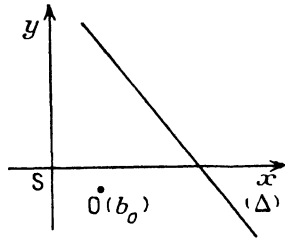


Fig. 5.

tané de rotation par rapport aux axes principaux

$$\alpha q(x - p) = \beta p(y - q),$$

ce qui montre que cette première force passe par le centre instantané de rotation.

Le support de la deuxième a pour équation

$$\beta m'x - \alpha l'y - \gamma\omega' = 0,$$

or la condition de circulation constante donne

$$m' \cos \psi - l' \sin \psi + \omega' h = 0$$

et montre que le support de la deuxième force passe par un point fixe du plan du profil dont les coordonnées sont

$$(4) \quad x = -\frac{\gamma}{\beta} \frac{\cos \psi}{h}, \quad y = -\frac{\gamma}{\alpha} \frac{\sin \psi}{h}.$$

Comme la force de Joukowsky (orthogonale à la vitesse de son point d'application) passe par le centre instantané de rotation, le système total est donc réductible à deux forces dont l'une passe par le centre instantané de rotation et l'autre par un point fixe du plan du profil.

**6. Les mouvements dans lesquels les forces aérodynamiques ne travaillent jamais.** — La seule force qui travaille est celle qui est appliquée au point dont les coordonnées sont données par les formules (4) du numéro précédent; son travail élémentaire vaudra donc

$$- \rho [(l - \omega y)\alpha l' + (m + \omega x)\beta m'] dt,$$

c'est-à-dire

$$- \frac{1}{2} \rho d[\alpha l^2 + \beta m^2 + \gamma \omega^2],$$

expression bien conforme au résultat du n° 9 du chapitre II.

Les mouvements en question seront caractérisés par

$$\begin{aligned} \alpha l^2 + \beta m^2 + \gamma \omega^2 &= h, \\ m \cos \psi - l \sin \psi + \omega h &= g. \end{aligned}$$

On peut donner une interprétation simple des relations précédentes en mettant en évidence la roulante du mouvement; son équation s'obtient en éliminant  $\omega$  et en mettant en évidence les coordonnées  $p$  et  $q$  du centre instantané de rotation

$$\alpha q^2 + \beta p^2 + \gamma = \frac{k}{g} (p \cos \psi + q \sin \psi - h)^2.$$

On pourra donc choisir comme roulante l'une des coniques du faisceau linéaire précédent, la base étant quelconque et la loi horaire étant fixée par la condition de circulation constante. On peut remarquer que le pôle commun de ( $\Delta$ ) par rapport aux coniques précédentes est le point fixe du plan du profil dont les coordonnées sont données par les formules (4) du présent chapitre.

**7. Le mouvement de rotation uniforme.** — Dans ce cas, la force qui agit sur le profil passe toujours par le centre de rotation et si  $b_0$

est l'affixe du centre du profil l'expression de cette force est

$$\rho\omega(\beta m - i\alpha l) + 4\pi\alpha\rho i(m\cos\psi - l\sin\psi + \omega h)(l + im + i\omega b_0),$$

en utilisant les axes principaux.

Mettant en évidence les coordonnées  $p, q$  du centre de rotation par rapport à ces axes, nous obtenons

$$\rho\omega^2[4\pi\alpha(p - \lambda)(h - p\cos\psi - q\sin\psi) - \beta p + 4\pi\alpha i(h - p\cos\psi - q\sin\psi)(q - \mu) - i\alpha q],$$

avec

$$b_0 = \lambda + i\mu,$$

et finalement

$$(5) \quad \rho\omega^2[f_1(p, q) + if_2(p, q)],$$

où

$$(6) \quad \begin{cases} f_1 = 4\pi\alpha(p - \lambda)(h - p\cos\psi - q\sin\psi) - \beta p, \\ f_2 = 4\pi\alpha(q - \mu)(h - p\cos\psi - q\sin\psi) - \alpha q. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$f_3 = 4\pi\alpha(q\lambda - p\mu)(h - p\cos\psi - q\sin\psi) + (\beta - \alpha)pq,$$

le support de la force a pour équation

$$xf_2 - yf_1 = pf_2 - qf_1 = f_3$$

et passe bien par le centre de rotation. On peut faire à propos de ces formules quelques remarques.

*a. Centres de rotation à portance nulle.* — La formule (5) montre qu'il existe quatre centres de rotation pour lesquels la résultante des efforts aérodynamiques est nulle : ce sont les quatre points d'intersection des coniques

$$C_1 \quad f_1(p, q) = 0, \quad C_2 \quad f_2(p, q) = 0.$$

L'un de ces points est à l'infini dans la direction de la droite  $\Delta$ ; il correspond à la translation et dans ce cas les efforts se réduisent à un couple; pour les trois autres points (qui sont en général à distance finie) les efforts se réduisent à zéro.

*b. Correspondance entre le centre de rotation et le support de la force.* — Cette correspondance est biunivoque; en effet, si

$$ux + vy + w = 0$$

est l'équation du support ( $\delta$ ) de la force, le centre R de rotation est l'intersection de l'une des trois coniques

$$uf_1 + vf_0 = 0, \quad uf_3 + wf_2 = 0, \quad vf_3 - wf_1 = 0$$

et de la droite précédente; les coniques ayant un point à l'infini commun avec la droite, il résultera de l'intersection un seul point R à distance finie.

Quand R décrit une droite (D), le support ( $\delta$ ) enveloppe une conique qui lui est tangente; en particulier, si (D) est la droite de l'infini, ( $\delta$ ) enveloppe la parabole métacentrique, c'est-à-dire l'enveloppe du support de la force pour un profil en translation uniforme quand on fait varier l'incidence.

*c. Construction du support de la force.* — Désignons par I, J, K les points, à distance finie, communs aux coniques (6) et soit (L) la

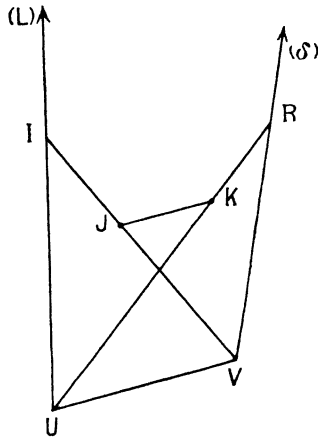


Fig. 6.

direction asymptotique commune. La construction d'un hexagone de Pascal donne immédiatement une construction simple du support connaissant le centre R (ou du centre connaissant le support), il suffit de remarquer que JK est parallèle à UV (*fig. 6*).

Cette construction met en évidence les propriétés de la correspondance <sup>(1)</sup>: on voit, en particulier, que si R décrit une droite (D),

<sup>(1)</sup> Voir G. COUCHET [3], p. 21.

( $\delta$ ) enveloppe une conique tangente à (D) et aux trois côtés du triangle I, J, K et si ( $\delta$ ) passe par un point fixe T, R décrit une conique passant par les points T, I, J, K.

**8. Les mouvements périodiques.** — Quand les mouvements à circulation constante sont périodiques, ou plus généralement quand  $l, m, \theta$  sont des fonctions périodiques du temps avec la même période T, la force moyenne prend une valeur remarquable que nous allons calculer.

Prenons l'expression

$$i\rho \frac{d}{dt} [(x_0 + iy_0)\Gamma - (Al + Bm + C\omega)e^{i\theta}]$$

de la force donnée au n° 1 (§ I du présent chapitre); la force moyenne s'en déduit facilement par le calcul de l'intégrale

$$\frac{i\rho}{T} \int_t^{t+T} d[(x_0 + iy_0)\Gamma - (Al + Bm + C\omega)e^{i\theta}]$$

qui se réduit à

$$\frac{i\rho l}{T} [(x_0 + iy_0)_{t+T} - (x_0 + iy_0)_t] = i\rho V\Gamma,$$

où V désigne l'affixe de la vitesse moyenne du centre du profil. Cette formule généralise celle bien connue de Joukowsky relative à la translation rectiligne et uniforme.

### III. — Profil mobile dans un courant.

Dans les paragraphes qui suivent, nous nous proposons de généraliser des résultats obtenus par M. J. Pérès en 1935 et publiés dans le Livre Jubilaire de M. Marcel Brillouin; ces résultats nous permettent de montrer ensuite l'existence de mouvements à circulation constante d'un profil (à pointe) mobile dans un courant quelconque.

**1. Mouvement, à circulation constante, d'un profil mobile dans un courant.** — Nous supposons que le courant donné admet un potentiel des vitesses et nous nous proposons de chercher le potentiel du mouvement fluide qui résulte du courant précédent et du déplacement d'un profil au sein de ce fluide.

Nous désignons par  $f_1(z_1, t)$  le potentiel des vitesses du courant donné, en axes fixes; de sorte qu'en axes liés au profil on a

$$f(z, t) = f_1[z_0 + z e^{i\theta}, t],$$

où  $z_0$  désigne l'affixe du centre du profil par rapport aux axes fixes.

Le courant donné modifié par le mouvement du profil également donné  $(l, m, \omega)$  <sup>(1)</sup> admettra un potentiel de la forme

$$f(z, t) + k(z, t),$$

où  $k(z, t)$  est une fonction que nous déterminerons en utilisant les conditions aux limites. Si nous passons par la transformation habituelle

$$z = H(Z)$$

au plan du cercle (C), le potentiel devient

$$f[H(Z), t] + k[H(Z), t] = F(Z, t) + K(Z, t)$$

et la condition aux limites s'écrit

$$\mathcal{J}[dF + dK - (l - im) dH + i\omega \bar{H} dH]_C = 0,$$

soit

$$\mathcal{J}[K(Z)] = -\psi - mx + ly - \frac{\omega}{2}(x^2 + y^2),$$

avec

$$\psi = \mathcal{J}F(Z).$$

On obtient alors pour  $K(Z)$  une fonction uniforme à l'extérieur de (C), régulière à l'infini et dont la dérivée est, par conséquent, nulle à l'infini <sup>(2)</sup>.

On pourra ajouter à ce potentiel le terme

$$-\frac{i\Gamma}{2\pi} \log Z$$

qui donnera une circulation  $\Gamma$  autour du profil, de sorte que, en utilisant la méthode indiquée au chapitre I (§I, n° 5), la partie

<sup>(1)</sup> Voir chap. I, n° 5.

<sup>(2)</sup> Quoique le potentiel  $F(Z)$  ne donne pas nécessairement une vitesse nulle à l'infini.

inconnue du potentiel s'écrira

$$(7) \quad k(Z, t) = \frac{i}{\pi} \int_c \left( \frac{d\zeta}{\zeta - Z} - \frac{d\zeta}{2\bar{\zeta}} \right) \left[ \psi + mx - ly + \frac{\omega}{2} (x^2 + y^2) \right] - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log Z.$$

**2. Cas particulier d'un profil dans un vent uniforme.** — Dans ce cas on peut écrire

$$f_1(z_1, t) = Vz_1 = V(z_0 + ze^{i\theta}),$$

où la vitesse du vent  $\vec{V}$  a pour composantes  $(V, \theta)$  par rapport aux axes fixes. Le potentiel complémentaire à circulation nulle vaudra

$$K(Z, t) = \frac{i}{\pi} \int_c \left( \frac{d\zeta}{\zeta - Z} - \frac{d\zeta}{2\bar{\zeta}} \right) \left[ Vy_0 + (m + V \sin \theta)x - (l - V \cos \theta)y + \omega \frac{x^2 + y^2}{2} \right]$$

et se calcule en remarquant que c'est le potentiel donné par la formule (1) du chapitre II où l'on remplace  $l$  et  $m$  par

$$l - V \cos \theta \quad \text{et} \quad m + V \sin \theta,$$

le terme en  $y_0$  étant sans importance.

On obtient ainsi

$$K(Z, t) = (l - V \cos \theta) \left( z - Z - \frac{a^2}{Z} \right) - i(m + V \sin \theta) \left( z - Z + \frac{a^2}{Z} \right) - i\omega \left( \frac{A_{-1}}{Z} + \dots + \frac{A_{-n}}{Z^n} + \dots \right).$$

Le potentiel complet sera (avec les notations du chapitre II, n° 1, où l'on pose  $g(z) = lg^{(1)} + mg^{(2)} + \omega g^{(3)}$ ),

$$(8) \quad V e^{i\theta} z + (l - V \cos \theta) g^{(1)} + (m + V \sin \theta) g^{(2)} + \omega g^{(3)}$$

et permettra de calculer les efforts aérodynamiques du fluide sur le profil en utilisant la méthode du chapitre II (n° 2).

On peut d'ailleurs remarquer que dans ce cas la pression est, à une fonction du temps près, la même que celle qui correspond au potentiel

$$(9) \quad (l - V \cos \theta) g^{(1)} + (m + V \sin \theta) g^{(2)} + \omega g^{(3)},$$

c'est-à-dire à celui du mouvement obtenu en supprimant la vitesse à l'infini et en ajoutant au mouvement de l'obstacle une translation opposée à la vitesse du vent.



On sait, en effet (chap. II, n° 2), que

$$p = -\frac{\rho}{2}(u^2 + v^2) + \rho[(l - \omega y)u + (m + \omega x)v] - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + C(t),$$

c'est-à-dire

$$p = -\frac{\rho}{2} \{ [u - (l - \omega y)]^2 + [v - (m + \omega x)]^2 \} \\ + \frac{\rho}{2} [(l - \omega y)^2 + (m + \omega x)^2] - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + C(t),$$

ce qui montre que la différence ne peut pas venir du premier terme, puisque celui-ci dépend de la vitesse fluide *relative au profil* qui est la même dans les deux mouvements.

La différence provenant des deux autres termes s'écrit

$$\frac{\rho}{2} [(l - V \cos \theta - \omega y)^2 + (m + V \sin \theta + \omega x)^2 \\ - (l - \omega y)^2 - (m + \omega x)^2] - \rho \mathcal{R}(V e^{i\theta} z i \omega)$$

et l'on verra qu'elle se réduit à une fonction du temps.

Les efforts aérodynamiques sont donc les mêmes dans les deux mouvements, ce qui justifie l'emploi des souffleries aérodynamiques dans l'étude des mouvements non stationnaires.

**3. Les mouvements à circulation constante d'un profil à pointe.** — Revenons au cas d'un courant quelconque et cherchons à caractériser les mouvements à circulation constante d'un profil dont la pointe a pour affixe  $z_p$ .

Si  $Z = a$  est dans le plan de (C), l'image de cette pointe, la vitesse fluide y sera égale à

$$\left( \frac{\overline{df}}{\overline{dz}} + \frac{\overline{dK}}{\overline{dz}} \right)_{z=z_p}.$$

Le premier terme ne fait aucune difficulté puisque, au courant donné correspond une vitesse finie en tous les points; le second terme calculé dans le plan de (C) s'écrit

$$\left( \frac{d\overline{K}}{d\overline{Z}} \cdot \frac{1}{\overline{H_z}} \right)_{z=a}$$

et ne donne une vitesse finie à la pointe que si

$$\left( \frac{d\overline{K}}{d\overline{Z}} \right)_{z=a} = 0.$$

Cette dernière relation va nous permettre de calculer la circulation et de définir les mouvements à circulation constante; la formule (7) nous donne, en effet,

$$\frac{i\Gamma}{2a} = \left\{ \frac{d}{dZ} \left[ \int_C \left( \frac{d\zeta}{\zeta - Z} - \frac{d\zeta}{2\zeta} \right) \psi(\zeta) + \int_C \left( \frac{d\zeta}{\zeta - Z} - \frac{d\zeta}{2\zeta} \right) \left( mx - ly + \omega \frac{x^2 + y^2}{2} \right) \right] \right\}_{Z=a}.$$

Remarquons que pour un fluide au repos ( $\psi = \text{const.}$ ), on doit retrouver la valeur de la circulation calculée au n° 1 (§ II du présent chapitre), ce qui donne

$$2\pi i(m + \omega\Omega) = \left[ \frac{d}{dZ} \int_C \left( \frac{d\zeta}{\zeta - Z} - \frac{d\zeta}{2\zeta} \right) \left( mx - ly + \omega \frac{x^2 + y^2}{2} \right) \right]_{Z=a}$$

et, après dérivation par rapport à  $Z$  et intégration par parties, on en déduit

$$\int_C \frac{dx(\zeta)}{\zeta - a} = 2\pi i, \quad \int_C \frac{dy(\zeta)}{\zeta - a} = a,$$

$$\Omega = \frac{1}{4\pi i} \int_C \frac{d(x^2 + y^2)}{\zeta - a} = \frac{1}{4\pi i} \int_C \frac{d\left[ \bar{H}(\zeta) \cdot H\left(\frac{a^2}{\zeta}\right) \right]}{\zeta - a}.$$

Cette dernière formule permet de calculer d'une autre manière la quantité  $\Omega$  introduite au n° 1 (§ II du présent chapitre).

En faisant des transformations analogues sur la première intégrale qui figure dans  $\Gamma$ , nous obtenons l'expression

$$\Gamma = 4\pi a(m + \omega\Omega) - 2ai \int_C \frac{d\psi(\zeta)}{\zeta - a}$$

dans laquelle on vérifie facilement que l'intégrale

$$\int_C \frac{d\psi(\zeta)}{\zeta - a}$$

est une imaginaire pure; nous remarquerons, en outre, que le point  $\zeta = a$  n'amène aucune difficulté puisque dans la différentielle

du numérateur

$$d\psi = \frac{d\psi}{dz} \frac{dH}{dZ} dZ,$$

on trouve un facteur  $(Z - a)^{1 - \frac{\delta}{\pi}}$  provenant de  $\frac{dH}{dZ}$  (1).

Il est commode d'écrire l'intégrale précédente de manière à ramener son calcul à l'intégration d'une fonction analytique, elle prend alors la forme

$$\mathcal{R} \int_C \frac{df}{d\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta - a}$$

et la circulation devient

$$(10) \quad \Gamma = 2a\mathcal{R} \int_C \frac{df}{d\zeta} \frac{d\zeta}{a - \zeta} + 4\pi a(m + \omega\Omega).$$

Enfin, il est possible de donner de  $\Gamma$  une expression dans laquelle ne figure plus de signe d'intégration. La fonction analytique

$$\frac{df}{dZ} = W(Z)$$

présente à l'extérieur de  $(C)$  des singularités qui proviennent du courant donné; si l'on prolonge analytiquement  $W$  à l'intérieur de  $(C)$ , on trouve des singularités qui proviennent de la représentation conforme  $z = H(Z)$  et si l'on désigne par  $(C_1)$  un contour qui entoure  $(C)$  et tel que la branche considérée de  $W$  soit holomorphe entre  $(C)$  et  $(C_1)$ , on a

$$2\pi i W(Z) = \int_C \frac{df}{d\zeta} \frac{d\zeta}{Z - \zeta} - \int_{C_1} \frac{df}{d\zeta} \frac{d\zeta}{Z - \zeta}$$

[ $Z$  étant compris entre  $(C)$  et  $(C_1)$ , *fig. 7*]. On met ainsi en évidence une séparation des singularités distinguées plus haut qui correspond à la décomposition, d'ailleurs unique,

$$W(Z) = W_0(Z) + W_1(Z);$$

et en remarquant que l'on peut, dans (10), remplacer  $(C)$  par  $(C_1)$ ,

(1) Voir chap. I, § II, n° 4. (Ici  $\delta$  est l'angle solide de la pointe.)

on a

$$\Gamma = -4\pi a \mathcal{R} i W_1(a) + 4\pi a(m + \omega\Omega).$$

On calcule  $W_1(a)$  en prenant l'image du courant initial dans le plan de  $(C)$  et l'on supprime les singularités intérieures à  $(C)$ ; on prend ensuite la dérivée de la partie restante pour  $Z = a$ .

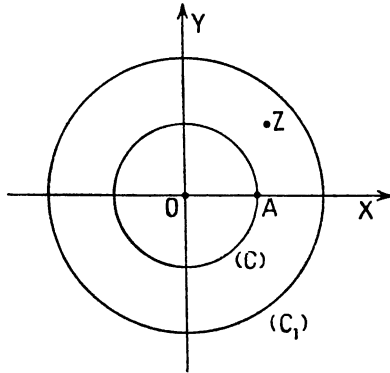


Fig. 7.

Les mouvements à circulation constante seront donc caractérisés par

$$m + \omega\Omega - \mathcal{R} i W_1(a) = \text{const.}$$

4. Cas particulier d'un profil à pointe dans un vent uniforme. — Le potentiel

$$F(Z) = V[z_0 + e^{i\theta} H(Z)]$$

donne immédiatement

$$\frac{dF}{dZ} = V e^{i\theta} \frac{dH}{dZ}$$

et

$$W_1(Z) = V e^{i\theta},$$

de sorte que la condition de circulation constante devient

$$m + \omega\Omega + V \sin \theta = \text{const.}$$

On peut d'ailleurs obtenir cette condition directement en utilisant le potentiel (8) et l'on voit que cette circulation est la même que celle qui provient du potentiel (9), c'est-à-dire que pour calculer la

circulation et les efforts aérodynamiques on peut remplacer le vent uniforme par une translation opposée du profil.

Étudions enfin, toujours dans ce cas particulier, le travail des forces aérodynamiques. Considérons le mouvement à circulation constante correspondant aux paramètres de vitesse

$$l_1 = l - V \cos \theta, \quad m_1 = m + V \sin \theta, \quad \omega,$$

avec vitesse fluide nulle à l'infini et désignons par  $\vec{F}$  la résultante des forces aérodynamiques et  $d\mathcal{E}$  le travail élémentaire de ces forces dans le même mouvement; le travail élémentaire des forces aérodynamiques dans le mouvement qui nous occupe sera

$$d\mathcal{E} + \vec{F} \times \vec{V} dt.$$

En utilisant les formules du chapitre III (§ I, n° 3), on trouve

$$-\frac{1}{2} \rho d[\alpha l_1^2 + \beta m_1^2 + \gamma \omega^2] - \rho \mathcal{R} V d[\alpha l_1 + i\beta m_1] e^{i\theta}$$

ou

$$-\frac{\rho}{2} d[\alpha l^2 + \beta m^2 + \gamma \omega^2 - V^2(\alpha \cos^2 \theta + \beta \sin^2 \theta)].$$

Le travail élémentaire est donc, comme pour un mouvement à circulation constante dans un fluide au repos à l'infini, une différentielle totale et le travail ne dépendra que de l'état initial et de l'état final. Si le mouvement du profil est périodique ou plus généralement si  $l$ ,  $m$ ,  $\theta$  sont périodiques (avec la même période), le travail des forces aérodynamiques est nul pour une période.

## CHAPITRE IV.

### PROFIL EN MOUVEMENT DANS UN FLUIDE CONTENANT DES SINGULARITÉS TOURBILLONNAIRES.

**1. La présence de tourbillons dans le fluide et l'existence de forces extérieures.** — Dans les équations établies au chapitre I on a supposé qu'il n'y avait pas de forces extérieures; ces équations conduisent au potentiel (1) du chapitre II. Nous avons remarqué de plus que l'on pouvait admettre l'existence, dans le fluide, de singularités

tourbillonnaires; le potentiel ainsi modifié donne une vitesse qui satisfait bien aux équations (1) du chapitre I, mais ces dernières sont en défaut aux sièges des singularités.

Les forces extérieures qui agissent sur une masse fluide limitée par une courbe (C) renfermant une aire  $\mathcal{A}$  ont pour résultante

$$(1) \quad \rho \iint_{\mathcal{A}} \vec{J} d\sigma - \int_{(C)} \vec{p} ds$$

et c'est en annulant cette quantité qu'on a établi les équations (1) du chapitre I qui nous ont conduit, compte tenu de l'incompressibilité, au potentiel (1) du chapitre II.

Effectivement, si l'on calcule l'expression (1) pour une aire  $\mathcal{A}$  extérieure au profil en utilisant le potentiel dont nous venons de parler, on trouve bien zéro; on trouve encore un résultat nul quand on utilise le potentiel étudié au chapitre III (§ I, n° 1) qui introduit une circulation  $\Gamma$  autour du profil, mais rien ne prouve qu'il en soit ainsi quand on utilise un potentiel admettant des singularités tourbillonnaires comme celles qui ont fait l'objet du n° 4 (§ I) du chapitre I. Il est donc utile, avant de poursuivre, de calculer l'expression (1) ci-dessus quand  $\mathcal{A}$  renferme un tourbillon et de voir si l'existence de ce dernier est possible sans intervention de forces extérieures.

L'expression (1) ne change pas quand on déforme le contour (C) sans rencontrer de singularités; on a en effet en désignant par (C') une courbe fermée intérieure à (C) et par  $\mathcal{A}'$  l'aire intérieure à (C')

$$\begin{aligned} & \rho \iint_{\mathcal{A}} \vec{J} d\sigma - \rho \int_{(C)} \vec{p} ds \\ &= \rho \iint_{\mathcal{A}'} \vec{J} d\sigma - \rho \int_{(C')} \vec{p} ds + \rho \iint_{\mathcal{A}-\mathcal{A}'} \vec{J} d\sigma + \rho \int_{(C')} \vec{p} ds - \rho \int_{(C)} \vec{p} ds \end{aligned}$$

et comme l'absence de singularité entre (C) et (C') donne

$$\rho \iint_{\mathcal{A}-\mathcal{A}'} \vec{J} d\sigma - \rho \int_{(C)} \vec{p} ds + \rho \int_{(C')} \vec{p} ds = 0,$$

il reste bien

$$\rho \iint_{\mathcal{A}} \vec{J} d\sigma - \rho \int_{(C)} \vec{p} ds = \rho \iint_{\mathcal{A}'} \vec{J} d\sigma - \rho \int_{(C')} \vec{p} ds.$$

Si l'expression (1) a un sens, elle est donc indépendante de la forme de (C); nous allons calculer les deux termes qui forment cette

expression en utilisant comme courbe C une circonférence ayant pour centre le tourbillon.

**2. Calcul de la résultante des pressions.** — C'est le deuxième terme de (1) que nous calculerons en utilisant le potentiel des vitesses sous la forme

$$(2) \quad f(z, t) = g(z, t) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log(z - z_0) = \varphi + i\psi,$$

$g(z, t)$  étant régulière au voisinage de  $z_0$  et  $z_0$  étant une fonction du temps.

La pression s'exprime par la formule (5) du chapitre I (§ I) (1)

$$p = \rho \left[ -\frac{1}{2} \frac{df}{dz} \frac{\overline{df}}{dz} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} + C(t) \right],$$

ce qui permet d'écrire la résultante des pressions sous la forme

$$-\frac{i\rho}{2} \int_C \frac{\overline{df}}{dz} (\overline{df} + 2id\psi) - \rho i \int_C \frac{\partial \varphi}{\partial t} dz$$

ou

$$-\frac{i\rho}{2} \int_C \left( \frac{\overline{df}}{dz} \right)^2 dz - i\rho \int_C \frac{\partial \varphi}{\partial t} dz + \rho \int_C (u + iv)(\psi'_x dx + \psi'_y dy),$$

et finalement

$$(3) \quad -\frac{i\rho}{2} \int_C \left( \frac{df}{dz} \right)^2 \overline{dz} - i\rho \int_C \frac{\partial \varphi}{\partial t} dz + \rho \int_C \vec{V} \cdot (\vec{V} \times \vec{n}) ds,$$

$\vec{V}$  étant la vitesse de la particule fluide et  $\vec{n}$  la normale orientée vers l'extérieur de (C) et la dernière intégrale étant exprimée en notation complexe.

L'expression (1) étant indépendante de (C) nous pourrions chercher les deux parties qui la compose en faisant tendre (C) vers la singularité tourbillonnaire; la limite de l'expression (3) se calcule sans difficultés en utilisant le potentiel (2) qui donne

$$u - iv = f'_z = g'_z - \frac{i\Gamma}{2\pi(z - z_0)},$$

---

(1) Nous conservons ici les axes fixes utilisés aux nos 1, 2, 3, 4 du chapitre I (§ I).

et l'on obtient pour chaque terme de (3) une limite, ce qui donne

$$-i\rho\Gamma(\bar{g}'_z)_{z=z_0} + \frac{i\rho}{2}\Gamma\frac{dz_0}{dt} + \frac{i\rho\Gamma}{2}(\bar{g}'_z)_{z=z_0},$$

soit pour la résultante des pressions

$$i\rho\frac{\Gamma}{2}\left[\frac{dz_0}{dt} - \left(\frac{d\bar{g}}{dz}\right)_0\right].$$

**3. La résultante dynamique.** — C'est le premier terme de (1); on peut la calculer en remarquant que l'accélération d'une particule fluide peut s'écrire

$$\frac{d}{dt}(u + iv) = (\bar{f}''_{z^2})f'_z + \bar{f}''_{zt},$$

ce qui donne pour l'expression cherchée

$$\rho \iint_{\mathcal{A}} \left[ \left( \bar{g}''_{z^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi(\bar{z} - z_0)^2} \right) \left( g'_z - \frac{i\Gamma}{2\pi(z - z_0)} \right) + g''_{zt} + \frac{i\Gamma}{2\pi(\bar{z} - \bar{z}_0)^2} \frac{dz_0}{dt} \right] d\sigma.$$

Dans l'expression précédente figure trois intégrales semi-convergentes et le calcul de la résultante dynamique n'a plus de sens (1). il faut donc abandonner dans la formule (1) le terme

$$\iint_{\mathcal{A}} \bar{f} d\sigma,$$

le remplacer par une expression équivalente dans le cas où il n'y a pas de singularités dans  $\mathcal{A}$  et qui conserve un sens dans le cas contraire.

Nous remplacerons l'intégrale précédente par la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement du fluide limité par (C)

$$\frac{d}{dt} \iint_{\mathcal{A}} \bar{V} d\sigma.$$

L'intégrale ainsi introduite est convergente et la dérivée par rapport au temps se calcule sans difficultés.

(1) On obtient un résultat nul en calculant ces intégrales sur des couronnes circulaires concentriques; des résultats différents de zéro en utilisant des bandes parallèles aux axes, etc.



4. **La quantité de mouvement.** — Pour pouvoir commodément utiliser l'expression précédente, nous lui ferons subir, avec M. J. Leray, <sup>(1)</sup> quelques transformations simples. On peut écrire la vitesse complexe

$$u - iv = \frac{df}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

et, par conséquent,

$$\iint_{\alpha} (u + iv) d\sigma = \iint_{\alpha} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx dy = \int_c \psi \bar{dz}.$$

La dérivée de cette expression par rapport au temps s'écrit

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{c'} \psi(x', y', t + \Delta t) dz' - \int_c \psi(x, y, t) dz \right]$$

[( $c'$ ) étant la position du contour ( $c$ ) à l'instant  $t + \Delta t$  et  $z'$  un point de ce contour]; elle devient, après une intégration par parties et, si l'on remarque que  $u\psi_x + v\psi'_y = 0$ ,

$$\int_c \frac{\partial \psi}{\partial t} dz - (u + iv) d\psi.$$

On peut calculer l'expression précédente pour le potentiel (2), mais il est plus intéressant de calculer l'ensemble de l'expression

$$\int_c \tilde{p} ds - \frac{d}{dt} \iint_{\alpha} \tilde{v} d\sigma.$$

En notation complexe, elle devient

$$\int_c ip dz - \rho \int_c \frac{\partial \psi}{\partial t} dz - (u + iv) d\psi$$

qui s'écrit, avec l'expression de  $p$  donnée au n° 2 du présent chapitre,

$$-\frac{i\rho}{2} \int_c \left( \frac{\overline{df}}{dz} \right)^{\circ} \bar{dz} - i\rho \int_c \frac{\partial f}{\partial t} dz,$$

soit

$$-i\rho \Gamma \left[ \frac{dz_0}{dt} - \left( \frac{d\bar{g}}{dz} \right)_0 \right]$$

en remplaçant  $f$  par le potentiel (2).

<sup>(1)</sup> *Les Cahiers d'Aérodynamique*, 1947, n° 7.

On peut calculer aussi le moment résultant, par rapport à l'origine des coordonnées, des forces élémentaires qui agissent sur les éléments de (C) et de  $\mathcal{A}$ ; on trouve

$$-\frac{\rho}{2} \mathcal{R} \int_c z \left( \frac{df}{dz} \right)' dz - \rho \mathcal{R} \int_c z \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} d\bar{z} - 2\rho \iint_{\mathcal{A}} \frac{\partial \psi}{\partial t} d\sigma.$$

Dans le cas du potentiel (2), cette expression se réduit à

$$\mathcal{R} iz \left\{ \rho \Gamma \left[ \frac{dz_0}{dt} - \left( \frac{dg}{dz} \right)_{z=z_0} \right] \right\},$$

ce qui montre que l'action extérieure se réduit à la force

$$-i\rho\Gamma \left[ \frac{dz_0}{dt} - \left( \frac{dg}{dz} \right)_{z=z_0} \right]$$

appliquée au siège de la singularité tourbillonnaire.

*Remarque.* — La méthode n'est pas valable pour toutes sortes de singularités; le doublet, par exemple, introduit des intégrales divergentes, mais comme, par la suite, les seules singularités introduites seront tourbillonnaires, nous ne nous préoccupons pas de cette question.

**5. Le tourbillon libre.** — L'étude faite dans les numéros précédents du présent chapitre montre que l'introduction d'un tourbillon dans le fluide est, en général, incompatible avec l'absence de forces extérieures. Si l'on donne *a priori* le mouvement du tourbillon dans le fluide, ce mouvement ne peut exister qu'avec intervention de la force extérieure

$$-i\rho\Gamma \left[ \frac{dz_0}{dt} - \left( \frac{dg}{dz} \right)_{z=z_0} \right];$$

en conséquence, si cette force extérieure n'existe pas, c'est que

$$\frac{dz_0}{dt} = \left( \frac{dg}{dz} \right)_{z=z_0};$$

nous dirons que, dans ces conditions, le tourbillon est libre dans le fluide et nous remarquerons que la condition de liberté peut aussi s'écrire

$$(4) \quad \lim \left( \frac{df}{dz} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z-z_0} \right)_{z=z_0} = 0.$$

Le calcul de cette limite, quand on utilise la transformation conforme  $z = H(Z)$  sera fait au numéro suivant.

**6. Potentiel du mouvement d'un fluide en présence d'un profil et de  $n$  tourbillons libres.** — En utilisant la transformation conforme  $z = H(Z)$  qui fait passer du cercle  $|Z| = a$  au profil, nous avons trouvé au n° 1 du chapitre III (§ I) le potentiel

$$G(Z) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log Z,$$

la fonction uniforme  $G(Z)$  ayant l'expression (1) du chapitre II.

Remarquons d'abord qu'il est possible, sans changer la condition aux limites, d'ajouter à cette expression un potentiel dans lequel le cercle  $|Z| = a$  est ligne de courant. Bien entendu, ce potentiel doit être uniforme et donner une vitesse nulle à l'infini.

Le lecteur vérifiera facilement que la fonction

$$- \frac{i\Gamma}{2\pi} \log \frac{Z - \zeta}{Z - \zeta'},$$

où  $\zeta$  et  $\zeta'$  sont les affixes de deux points inverses par rapport au cercle  $|Z| = a$  satisfait à ces conditions (4).

Plus généralement, nous prendrons le potentiel

$$(5) \quad F(Z) = G(Z) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log Z - \frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^n \Gamma_k \log \frac{Z - \zeta_k}{Z - \zeta'_k},$$

avec

$$\zeta_k \bar{\zeta}'_k = a^2.$$

Les tourbillons ne seront libres que si la condition (4) est remplie; à l'aide du potentiel (5), elle s'écrira

$$\frac{d\alpha_k}{dt} = \lim_{z \rightarrow \alpha_k} \left[ F'_z \frac{1}{H'_z} + \frac{i\Gamma_k}{2\pi(z - \alpha_k)} \right] \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

avec

$$\alpha_k = H(\zeta_k).$$

On peut chercher la limite précédente en mettant en évidence,

(1) On a alors  $\zeta \bar{\zeta}' = a^2$ .

dans le potentiel, la part contributive du tourbillon  $\zeta_k$

$$(6) \quad F(Z) = P(Z, t) - \frac{i}{2\pi} \Gamma_k \log(Z - \zeta_k).$$

La limite (4) est alors celle de

$$\frac{P'_Z}{H'_Z} - \frac{i\Gamma_k}{2\pi} \left[ \frac{1}{Z - \zeta_k} - \frac{1}{H(Z) - H(\zeta_k)} \right],$$

c'est-à-dire

$$\frac{P'_Z(\zeta_k)}{H'_Z(\zeta_k)} + \frac{i\Gamma_k}{2\pi} \frac{H''_Z(\zeta_k)}{[H'_Z(\zeta_k)]^2}.$$

Si l'on désigne toujours par  $l$ ,  $m$ , les projections de la vitesse de l'origine des axes liés au profil sur ces axes, par  $\omega$  la rotation instantanée, les conditions pour que les tourbillons soient libres seront

$$(7) \quad \frac{d\alpha_k}{dt} + l + im + i\omega \alpha_k = \left[ \frac{P'_Z}{H'_Z} + \frac{i\Gamma_k}{4\pi} \frac{H''_Z}{(H'_Z)^2} \right]_{z=\zeta_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

**7. Efforts aérodynamiques.** — Si nous nous reportons aux formules du chapitre II (§ II), nous voyons que dans l'expression de la résultante générale le coefficient de  $\mathcal{C}$  reste le même; les quatre intégrales introduisent des termes nouveaux que nous allons calculer.

*Contribution de  $\frac{i\rho}{2} \int_c \left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz$ .* — La dérivée  $\frac{df}{dz}$  est uniforme à l'extérieur de (c) de sorte que l'on peut écrire, en passant au plan de (C),

$$\int_c \left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz = \int_c \left(\frac{df}{dL}\right)^2 \frac{dL}{H'_Z} = -2\pi i \left[ R_\infty + \sum_{k=1}^n R_k \right]$$

en désignant par  $R_\infty$  le résidu du point à l'infini et par  $R_k$  le résidu du pôle double  $\zeta_k$  de

$$\left(\frac{df}{dL}\right)^2 \frac{1}{H'_Z}.$$

Le résidu à l'infini est nul; pour calculer  $R_k$ , il est commode de prendre la forme

$$R_k = \lim \frac{d}{dL} \left[ (Z - \zeta_k)^2 \left(\frac{df}{dL}\right)^2 \frac{1}{H'_Z} \right]_{z=\zeta_k}$$

qui, en utilisant la forme (6) donne

$$R_k = \left[ -\frac{i\Gamma_k}{\pi} \frac{P'_Z}{H'_Z} + \frac{\Gamma_k^2}{4\pi^2} \frac{H''_Z}{(H'_Z)^2} \right]_{z=\zeta_k}.$$

Cette dernière expression s'écrit, en vertu de la condition (7),

$$R_k = -\frac{i\Gamma_k}{\pi} \left( \frac{d\alpha_k}{dt} + l + im + i\omega\alpha_k \right)$$

et la contribution de  $\frac{i\rho}{2} \int_c \left( \frac{df}{dz} \right)^2 dz$  devient

$$-i\rho \sum_{k=1}^n \Gamma_k \left( \frac{d\alpha_k}{dt} + l + im + i\omega\alpha_k \right).$$

*Contribution des tourbillons  $\Gamma_k$  dans les trois autres intégrales.* —

Le lecteur verra que

$$\begin{aligned} \int_c df(z) & \text{ donne } -\sum_{k=1}^n \Gamma_k, \\ \int_c zdf & \text{ donne } -\sum_{k=1}^n \alpha_k \Gamma_k + \sum_{k=1}^n (\zeta_k - \zeta'_k) \Gamma_k, \\ \int_c \frac{\partial f}{\partial t} dz & \text{ donne } \sum_{k=1}^n \Gamma_k \left( \frac{d\alpha_k}{dt} - \frac{d\zeta_k}{dt} + \frac{d\zeta'_k}{dt} \right), \end{aligned}$$

de sorte que la contribution tourbillonnaire dans la force sera

$$-\rho \sum_{k=1}^n \Gamma_k \left[ \omega(\zeta_k - \zeta'_k) - i \frac{d}{dt} (\zeta_k - \zeta'_k) \right].$$

Si l'on rapporte la force aux axes fixes, l'expression précédente s'écrit

$$-i\rho \frac{d}{dt} \left[ \Gamma_k (\zeta_k - \zeta'_k) e^{i\theta} \right] \quad (1)$$

et la force totale devient (*voir* chap. III, § 1, n° 2)

$$i\rho \frac{d}{dt} \left[ (x_0 + iy_0) \Gamma + \sum_{k=1}^n (\zeta_k - \zeta'_k) \Gamma_k e^{i\theta} - (Al + Bm + C\omega) e^{i\theta} \right].$$

---

(1) Dans le cas particulier de la translation uniforme, une formule équivalente, mais beaucoup plus compliquée, a été donnée dans un Mémoire de M. W. G. Bickley (*Phil. Trans. R. Soc. London*, A, t. 228, 1929, p. 225). La complexité provient du fait que l'auteur n'utilise pas la transformation conforme. En passant dans le plan du cercle (C), M. Roy (*Mécanique des milieux continus et déformables*, t. II, p. A.46) donne, dans le cas particulier de la translation variée, une formule équivalente à la nôtre.

Le moment des forces aérodynamiques contiendra aussi une part due aux tourbillons ; les trois intégrales figurant dans l'expression du moment (chap. II, n° 2) donneront, compte tenu de la relation (7),

$$\begin{aligned} & \rho \mathcal{R} \left[ \sum_{k=1}^n \Gamma_k \alpha_k \frac{d\alpha_k}{dt} + (l - im) \sum_{k=1}^n \alpha_k \Gamma_k \right], \\ & - \rho \mathcal{R} (l - im) \sum_{k=1}^n [\alpha_k - (\zeta_k - \zeta'_k)] \Gamma_k, \\ & - \frac{\rho}{2} \int_C \frac{\partial F}{\partial t} d(\mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{H}}). \end{aligned}$$

Pour calculer cette dernière intégrale, introduisons la fonction (1)

$$K(Z) = A_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{-n}}{Z^n}$$

dont la partie réelle sur le cercle  $|Z| = \alpha$  est à une constante additive près égale à

$$x^2 + y^2 = H(Z) \cdot \overline{H(Z)}.$$

Sur le cercle (C), l'expression

$$- \frac{i\Gamma_k}{2\pi} \log \frac{Z - \zeta_k}{Z - \zeta'_k}$$

qui figure dans F a une partie imaginaire qui ne dépend que de  $t$  ; la partie de  $\frac{\partial F}{\partial t}$  qui nous intéresse jouit donc de la même propriété.

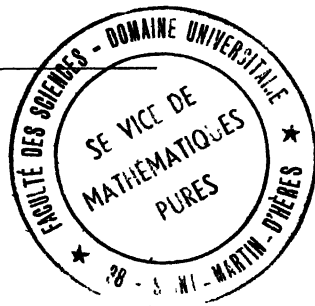
En remarquant que

$$\mathcal{R} \left[ - \frac{\rho}{2} \int_C \frac{\partial F}{\partial t} dK \right] = - \frac{\rho}{2} \int_C \mathcal{R} \frac{\partial F}{\partial t} d(\mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{H}}) + \frac{\rho}{2} \int_C \mathcal{I} \frac{\partial F}{\partial t} d\mathcal{I}K,$$

on voit que l'intégrale à calculer se réduit à celle qui figure au premier membre. On calculera cette intégrale par résidus et l'on trouvera toutes réductions faites

$$- \frac{\rho}{2} \mathcal{R} \sum_{k=1}^n \Gamma_k \frac{d}{dt} K(\zeta_k),$$

(1) Pour la définition des  $A_{-n}$ , voir le n° 2 du chapitre I (§ II).



de sorte que la part contributive des tourbillons sera, dans le moment par rapport à l'origine des axes mobiles,

$$(8) \quad \mathcal{R} \rho \left\{ (l - im) \sum_{k=1}^n \Gamma_k (\zeta_k - \zeta'_k) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \Gamma_k \frac{d}{dt} [\mathbf{H}(\zeta_k) \overline{\mathbf{H}(\zeta_k)} - \mathbf{K}(\zeta_k)] \right\}.$$

Le moment total s'obtiendra en ajoutant l'expression qui correspond à la circulation nulle (voir chap. II), car la force de Joukowsky n'intervient pas si l'on prend le moment par rapport au centre du profil.

Calculé en un point  $O_1$  fixe, le moment s'exprime par la dérivée par rapport au temps

$$\rho \frac{d}{dt} \mathcal{R} \left\{ \frac{x_0^2 + y_0^2}{2} \Gamma - (x_0 - iy_0) (A l + B m + C \omega) e^{i\theta} - C i (l - im) - \pi P \omega \right. \\ \left. + (x_0 - iy_0) e^{i\theta} \sum_{k=1}^n \Gamma_k (\zeta_k - \zeta'_k) + \sum_{k=1}^n \Gamma_k [\mathbf{H}(\zeta_k) \overline{\mathbf{H}(\zeta_k)} - \mathbf{K}(\zeta_k)] \right\}.$$

En faisant les mêmes conventions qu'au n° 3 du chapitre II, on peut dire que la partie de la résultante cinétique du fluide provenant de l'existence des tourbillons vaut

$$i \rho \sum_{k=1}^n \Gamma_k (\zeta_k - \zeta'_k) \quad (\text{axes liés au profil}),$$

tandis que le moment cinétique par rapport au centre du profil se réduit à

$$- \rho \mathcal{R} \sum_{k=1}^n \Gamma_k [\mathbf{H}(\zeta_k) \overline{\mathbf{H}(\zeta_k)} - \mathbf{K}(\zeta_k)].$$

Les efforts correspondants du fluide sur le profil s'en déduisent en appliquant les théorèmes généraux.

En résumé, il y a intérêt à diviser les forces aérodynamiques en trois groupes :

- 1° Forces indépendantes de la circulation (chap. II, n° 2);
- 2° Force de Joukowsky appliquée au centre du profil (chap. III, n° 2);

3° Forces tourbillonnaires dont l'étude a fait l'objet du présent paragraphe.

8. **Sillage stationnaire derrière un profil en translation.** — Si le profil est en translation,  $\theta = \text{const.}$  et si les tourbillons sont en équilibre par rapport au profil,

$$\Gamma_k(\zeta_k - \zeta'_k) e^{i\theta} = \text{const.},$$

ce qui donne dans la force une contribution tourbillonnaire nulle; en particulier, si la translation est uniforme, la résistance est toujours nulle, l'effort est toujours donné par la règle de Joukowski avec une valeur de la circulation qui dépend de la présence des tourbillons.

Prenons, par exemple, un tourbillon en équilibre derrière un profil en translation uniforme : le potentiel s'écrit

$$G(Z) = \frac{i\Gamma_0}{2\pi} \log Z - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log \frac{Z - \zeta}{Z - \zeta'}, \quad \zeta \cdot \bar{\zeta}' = a^2,$$

$\Gamma$  étant la circulation du tourbillon et  $\Gamma_0 - \Gamma$  la circulation autour du profil.

Le tourbillon sera en équilibre *par rapport au profil* si

$$(9) \quad \overline{t + im + i\omega a} = \left[ \frac{P'_Z}{H'_Z} + \frac{i\Gamma}{4\pi} \frac{H''_Z}{(H'_Z)^2} \right]_{z=\zeta}$$

Nous aurons, de plus,

$$(10) \quad \left( \frac{dG}{dZ} \right)_{z=a} - \frac{i\Gamma_0}{2\pi a} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \left( \frac{1}{a - \zeta} - \frac{1}{a - \zeta'} \right) = 0,$$

si le profil présente une pointe pour  $Z = a$ .

Les équations (9) et (10) montrent que le tourbillon doit être situé sur une courbe dont l'image, dans le plan du cercle, s'obtient en éliminant  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  entre les trois relations réelles données par ces deux équations.

Si l'on désigne par  $\zeta$  l'affixe d'un point quelconque de cette courbe, on en déduit  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_1$  et, par les relations du n° 4, l'expression des efforts.

Pour un profil réduit au segment de droite

$$y = 0, \quad -2a \leq x \leq +2a,$$



considéré comme n'ayant qu'une pointe ( $2a, 0$ ), on trouve les résultats suivants :

L'image du tourbillon dans le plan du cercle doit être située sur la courbe d'équation polaire

$$l \cos^2 \theta (r^2 - a^2)^2 + m \sin \theta [(r^4 + a^4) \cos \theta - ar(r^2 + a^2)] = 0 \quad (\zeta = r e^{i\theta}),$$

tandis que les circulations sont données par

$$\Gamma_0 = \frac{\pi m (l^2 + a^2)^2}{ar^2 \cos^2 \theta},$$

$$\Gamma = \frac{\pi m (l^2 - 2ar \cos \theta + a^2) (l' + 2ar \cos \theta + a^2)}{ar^2 (r^2 - a^2 \cos^2 \theta)}.$$

La circulation autour du profil

$$\Gamma_0 - \Gamma = 2\pi m \left[ 2a + \frac{r \cos \theta - a}{r^2 (r^2 - a^2) \cos^2 \theta} (r^4 - 2a^2 r^2 \cos 2\theta + a^4) \right]$$

est toujours *supérieure* à celle de Joukowsky (<sup>1</sup>).

Les efforts se réduisent à la force de Joukowsky

$$i\rho\Gamma_0(l + im)$$

dont le moment par rapport au centre du profil vaut

$$4\pi\rho a^2 lm + \Gamma \left( r - \frac{a^2}{r} \right) (l \cos \theta + m \sin \theta).$$

*Remarque.* — On peut retrouver une circulation égale à celle de Joukowsky pour une position du tourbillon autre que

$$\zeta = a,$$

il suffit de le prendre au point  $a \left( 1 + i \frac{m}{l} \right)$ .

Enfin on remarquera qu'un mouvement de translation uniforme peut être à circulation nulle sans qu'il soit nécessaire que la vitesse de translation soit parallèle au premier axe du profil. L'effort du fluide sur ce dernier est alors différent de zéro.

---

(<sup>1</sup>) Pour un profil quelconque, il en est de même et l'on peut déterminer la position du tourbillon  $\Gamma_1$  en admettant la présence d'une deuxième pointe qui introduit une quatrième relation entre éléments réels.

9. **Cas d'un nombre infini de tourbillons.** — Le potentiel s'écrit alors

$$G(Z) - \frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_k \log \frac{Z - \zeta_k}{Z - \zeta'_k}; \quad \text{avec } \zeta_k \bar{\zeta}'_k = a^2$$

et la vitesse devient

$$G'_Z - \frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_k \left( \frac{1}{Z - \zeta_k} - \frac{1}{Z - \zeta'_k} \right).$$

La fonction  $G'_Z$  ne fait pas de difficultés puisqu'elle est régulière à l'infini; d'ailleurs  $|Z^2 G'_Z|$  reste borné quand  $|Z| \rightarrow \infty$ .

La fonction de  $Z$  construite avec les tourbillons présentera un point singulier essentiel provenant de l'accumulation de ces singularités (si les  $\zeta_k$  s'accumulent à l'infini, les  $\zeta'_k$  s'accumulent à l'origine); il est indispensable, pour que le problème ait physiquement un sens, que l'introduction de ces points singuliers ne conduise pas à des contradictions.

Nous sommes donc en présence d'un problème analogue à celui qui s'est présenté au moment de l'introduction d'un tourbillon isolé dans le potentiel (début du présent chapitre), mais le problème se complique ici puisque la singularité qui résulte de l'accumulation des tourbillons *est essentielle*.

Si pour mieux schématiser la réalité nous introduisons une telle singularité, il est évident que nous ne pouvons, pour autant, abandonner complètement l'hypothèse de vitesse nulle à l'infini. Nous supposerons donc que l'on peut entourer toutes les singularités de courbes fermées et que dans le domaine limité par ces courbes et ne contenant pas de tourbillons la vitesse tend vers zéro quand  $|Z|$  tend vers l'infini.

Pour qu'une telle condition soit remplie, il suffit que la série de terme général

$$\Gamma_k \left( \frac{1}{Z - \zeta_k} - \frac{1}{Z - \zeta'_k} \right)$$

soit *uniformément convergente* dans le domaine ainsi défini; comme chacun de ses termes tend vers zéro avec  $\left| \frac{1}{Z} \right|$ , il en sera de même de sa somme.

Remarquons qu'il est possible de grouper plusieurs tourbillons et

former une série de terme général

$$u_k = \Gamma_k \left( \frac{1}{Z - \zeta_k} - \frac{1}{Z - \zeta'_k} \right) + \dots + \Gamma_{k+p} \left( \frac{1}{Z - \zeta_{k+p}} - \frac{1}{Z - \zeta'_{k+p}} \right).$$

Le domaine à considérer, qui ne contient aucun tourbillon, est limité par des courbes fermées  $C_n$  n'ayant aucun point commun et entourant chaque groupe de tourbillons. Si la série de terme général  $u_k$  est uniformément convergente dans ce domaine, la vitesse tend encore vers zéro avec  $\left| \frac{1}{Z} \right|$  dans les mêmes conditions.

Il est inutile, pour pouvoir généraliser les résultats obtenus pour un nombre fini de tourbillons, de savoir comment la vitesse tend vers zéro avec  $\left| \frac{1}{Z} \right|$ ; nous supposons que, comme pour  $n$  fini, le produit  $\left| Z^2 \frac{df}{dZ} \right|$  reste fini dans le domaine considéré.

**10. Calcul de la force et du moment.** — Dans le calcul de la force on trouve d'abord chap. II, n° 2

$$\int_C \left( \frac{df}{dZ} \right)^\circ \frac{dZ}{\bar{H}Z}$$

que l'on peut calculer de la manière suivante :

On considérera un contour  $C'$  qui englobe ( $C$ ) et les courbes  $C_1, C_2, \dots, C_n$  introduites au numéro précédent et qui laissent à l'extérieur  $C_{n+1}, \dots$ ; on aura alors

$$\int_C \left( \frac{df}{dZ} \right)^\circ \frac{dZ}{\bar{H}Z} = -2\pi i \sum_{k=1}^n R_k + \int_{C'} \left( \frac{df}{dZ} \right)^\circ \frac{dZ}{\bar{H}Z}.$$

En passant à la limite, la deuxième intégrale tend vers zéro en raison de l'hypothèse faite sur la vitesse, de sorte que

$$\int_C \left( \frac{df}{dZ} \right)^\circ \frac{dZ}{\bar{H}Z} = -2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} R_k.$$

Pour calculer les intégrales

$$\int_C z df \quad \text{et} \quad \int_C \frac{df}{dt} dz,$$

nous remarquerons que les séries de termes généraux

$$Zu_k \text{ et } \frac{i}{2\pi} \Gamma_k \left( \frac{\partial \zeta_k}{\partial t} - \frac{\partial \zeta'_k}{\partial t} \right)$$

ou celles qui les remplacent quand on groupe les tourbillons sont uniformément convergentes sur (C); on peut donc intégrer ces séries terme à terme et la contribution tourbillonnaire dans l'expression de la force se réduit à

$$i\rho \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_k \frac{d}{dt} (\zeta_k - \zeta'_k) e^{i\theta}$$

si  $C_n$  ne contient qu'un seul tourbillon.

Dans le cas où  $C_n$  renferme  $p$  tourbillons, l'expression précédente doit être remplacée par

$$i\rho \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dt} [(\Gamma_k \zeta_k - \zeta'_k) + \dots + \Gamma_{k+p} (\zeta_{k+p} - \zeta'_{k+p})] e^{i\theta}.$$

Des calculs analogues montrent que la formule qui donne le moment s'obtiendra en faisant tendre  $k$  vers l'infini dans l'expression (8) du n° 7.

## CHAPITRE V.

### LES TRAVAUX EXPÉRIMENTAUX ET LES THÉORIES APPROCHÉES.

**1. Étude d'une classe particulière de mouvements non stationnaires à circulation constante.** — Les mouvements à circulation constante signalés au chapitre III (§ II, n° 4) ont fait l'objet de vérifications expérimentales au tunnel hydrodynamique de Saint-Cyr.

Les expériences qui ont été réalisées par l'Office National d'Études et de Recherches Aéronautiques, étaient confiées à M. Werlé, ingénieur de Recherches; elles ont montré :

*a.* que dans les mouvements étudiés la circulation reste bien constante;

*b.* que cette circulation varie dès que l'on dérègle la cinématique qui assure une valeur constante à la circulation;

c. que, par comparaison avec la translation uniforme (qui est le plus simple des mouvements à circulation constante), les mouvements étudiés retardent les décollements.

La cinématique, utilisée pour la réalisation des mouvements était basée sur la construction du premier axe à l'aide de l'hodographe du mouvement de A (chap. III, § II, n° 2).

A décrivant une circonférence d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire  $k$ , il suffisait d'engager le premier axe du profil AP dans

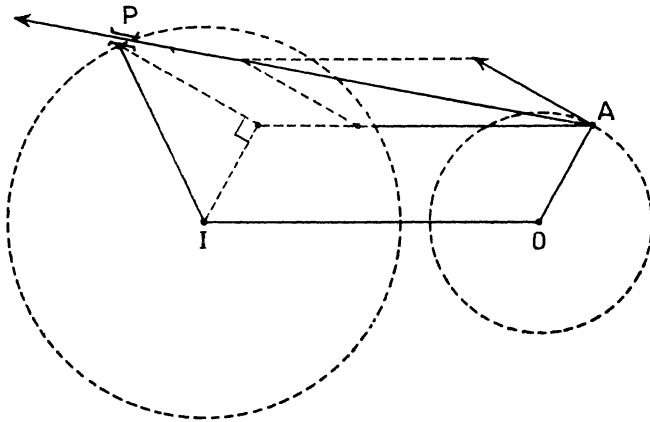


Fig. 8.

une glissière P animée d'une rotation uniforme de même vitesse angulaire  $k$  pour obtenir les mouvements à circulation nulle. Le déphasage  $\widehat{OA, IP}$  était donné par sa tangente égale à

$$\frac{k \cdot \overline{OI}}{v} \quad (\text{fig. 8}).$$

Pour obtenir un mouvement à circulation constante, il suffisait de conserver le même mouvement du point P et de mettre la glissière à une distance constante PQ du point P, l'axe de cette glissière étant perpendiculaire à PQ (fig. 9).

Nous remarquerons enfin que dans le cas d'une circulation nulle, AP enveloppe une conique dont les cercles lieu de A et de P sont cercles focaux; la droite ( $\Delta$ ) menée par A perpendiculairement au premier axe passe donc par un foyer F de la conique. Pour un mou-

vement à circulation constante,  $(\Delta)$  enveloppe une circonférence de centre  $F$  et dont le rayon est proportionnel à la circulation. On obtient ainsi un autre moyen de réaliser pratiquement les mouvements en question.

Les mesures expérimentales ont montré que la cinématique précédente conduisait bien à une circulation constante et que, de ce fait, l'hypothèse de Joukowsky (vitesse nulle à la pointe du profil) était bien applicable à des mouvements non stationnaires.

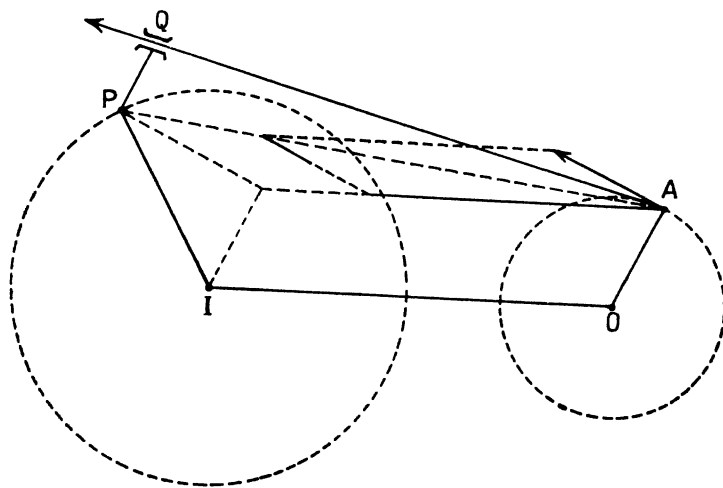


Fig. 9.

On déréglaient enfin le mécanisme de circulation constante en modifiant  $\nu$  ou  $k$  et l'on observait alors des échappements tourbillonnaires.

C'est, à notre connaissance, la seule vérification expérimentale de l'hypothèse de Joukowsky en mouvement non stationnaire; les vérifications que l'on a pu faire des formules Birnbaum (ou Küssner, Ellenberger, etc.) concernant la vitesse critique d'un profil mince étaient indirectes et portaient sur des théories approchées (voir bibliographie [1], [5], [12], [13]).

**2. Les mouvements à circulation constante et le vol de l'oiseau.** — Depuis bien longtemps on a cherché à imiter le vol de l'oiseau en analysant le mouvement de ses ailes et en essayant de le reproduire.

Marey (1) semble avoir poussé très loin l'analyse photographique du vol animal, mais ne paraît pas en avoir tiré de lois simples, de sorte que sa reproduction du vol s'est surtout limitée à une imitation.

Dans une étude parue dans le *Bulletin de l'Association technique Maritime et Aéronautique* de juin 1929, M. l'Ingénieur général Kahn donne une base plus scientifique à ses travaux; il cherche les mouvements périodiques d'une aile (allongement infini) dans lesquels la résistance moyenne soit nulle. Il suppose d'abord l'incidence de l'aile constante et, calculant les efforts aérodynamiques au moyen de formules expérimentales, arrive à des conclusions en accord avec les résultats de Marey.

Enfin par des considérations sur la reptation animale et la nage des poissons, M. Kahn est conduit à proposer la construction d'un appareil basé sur le principe suivant :

« Le principe de l'appareil consiste à animer les surfaces d'un mouvement périodique fermé par rapport au bâti et d'orienter les surfaces en chaque point de ce mouvement, de telle façon qu'elles soient parallèles à la tangente au mouvement de leur bord antérieur par rapport au fluide, mouvement qui tient compte de l'entraînement général de l'appareil. »

Comme exemple, M. Kahn donne une cinématique analogue à celle de la figure 8, qui reproduirait des mouvements à circulation nulle si la vitesse à l'infini, la vitesse de rotation et la position de la droite  $\Delta$  étaient celles qui se déduisent de la théorie des mouvements à circulation constante exposée au chapitre III.

Personnellement, nous ne nous sommes jamais préoccupé du vol animal; nous nous contenterons donc de signaler la similitude de la loi d'incidence du vol de l'oiseau, obtenue expérimentalement par Marey et de l'un des mouvements non stationnaires à circulation constante qui font l'objet du paragraphe précédent.

La figure 10 (a) représente les variations d'incidence concernant le vol d'une buse (Marey); la figure 10 (b) donne les mêmes variations pour un mouvement à circulation constante convenablement choisi (2) (trois battements par seconde dans un vent de 36 km/h).

(1) MAREY, *Le vol des oiseaux*, Paris, 1890, p. 119.

(2) Nous aurions pu choisir le mouvement à circulation constante de manière à obtenir une analogie presque complète; c'est inutile puisque l'allongement de l'aile, dans le cas (a), n'est pas infini.

Comme le montrent les formules du chapitre III (§ II, n° 8), ces derniers mouvements, qui sont évidemment périodiques, donnent une résistance moyenne nulle et une portance proportionnelle à la circulation. Signalons enfin qu'il existe une famille très étendue de

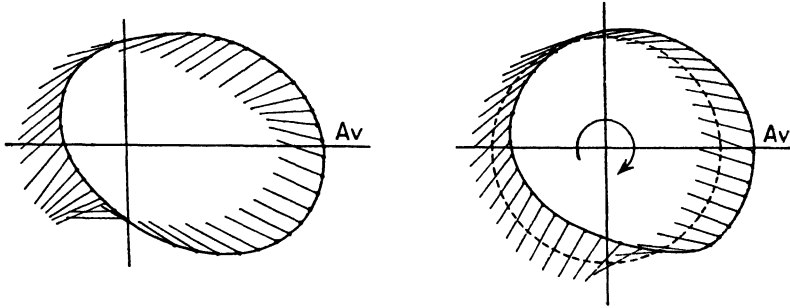


Fig. 10.

mouvements à circulation constante donnant, à la fois, propulsion et sustentation.

**3. Sillage de tourbillons pour des mouvements périodiques d'un profil.** — Considérons un profil animé d'un mouvement dans lequel  $l, m, \theta$  sont des fonctions périodiques du temps admettant la même période  $T$ . Supposons qu'il existe dans le fluide une suite infinie de tourbillons, dont les images dans le plan du cercle  $(C)$  ont toujours pour affixes  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \dots$  et dont les circulations se reproduisent périodiquement.

Désignons par  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_p$  les intensités des tourbillons qui naissent pendant chaque période et qui prennent la place de ceux qui, nés pendant la période précédente, ont la même circulation qu'eux. A l'instant  $t$ , la contribution tourbillonnaire dans l'effort du fluide sur le profil sera

$$i\rho \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dt} (U_k e^{i\theta}),$$

avec

$$U_k = \sum_{\lambda=1}^p \Gamma_{k+\lambda} (\zeta_{k+\lambda} - \zeta'_{k+\lambda}) \quad \text{et} \quad \zeta_{k+\lambda} \bar{\zeta}'_{k+\lambda} = \alpha^2.$$



L'effort moyen, pendant une période, s'écrira donc

$$\frac{i\rho e^{t\theta}}{T} \lim_{n \rightarrow \infty} U_n + L,$$

L étant la partie de l'effort qui correspond à une circulation constante autour du profil et qui a été calculée au chapitre III (§ II, n° 8).

Il est à remarquer que la partie tourbillonnaire de l'effort est la même que celle que l'on obtiendrait en supposant la périodicité acquise pour  $n$  très grand et en faisant tendre ensuite  $n$  vers l'infini, ce qui est bien en accord avec les conditions de convergence indiquées au n° 9 du chapitre IV.

Notons enfin que dans la limite précédente les tourbillons images disparaissent puisque  $\zeta'_n = \frac{\alpha^n}{\zeta_n}$  tend vers zéro quand  $n$  augmente indéfiniment. La partie tourbillonnaire de l'effort moyen se réduira donc à

$$\frac{i\rho e^{t\theta}}{T} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda=1}^p \Gamma_{n+\lambda} \zeta_{n+\lambda}.$$

**4. Cas particulier d'un sillage de tourbillons alternés derrière un profil en translation uniforme.** — Dans ce cas  $U_k$  ne comprend que deux tourbillons d'intensités opposées et en prenant le premier axe du profil parallèle à la vitesse de translation, on trouve pour l'effort moyen

$$\frac{i\rho\Gamma}{T} \lim_{n \rightarrow \infty} (\zeta_{n+1} - \zeta_n).$$

Si nous admettons que la partie imaginaire de  $\zeta_{n+1} - \zeta_n$  a une limite  $\delta$ , la résistance moyenne vaudra

$$(1) \quad \frac{\rho |\Gamma| \delta}{T}.$$

Cette limite  $\delta$  existera, en particulier, si les trajectoires des tourbillons admettent des asymptotes parallèles au premier axe du profil, car il en sera de même, en raison des hypothèses faites sur la transformation conforme (chap. I, § II), pour les trajectoires de leurs images dans le plan de la circonférence (C).

On voit que la formule précédente fait intervenir la forme de

l'obstacle par l'intermédiaire de  $\delta$ ; on peut avoir une idée de ce paramètre en admettant que les tourbillons subissent la translation générale dès qu'ils ont achevé leur formation.

Effectuons le calcul pour un cylindre circulaire que nous pouvons supposer fixe en admettant que la vitesse à l'infini du fluide  $\vec{V}$  est opposée à la translation de l'obstacle.

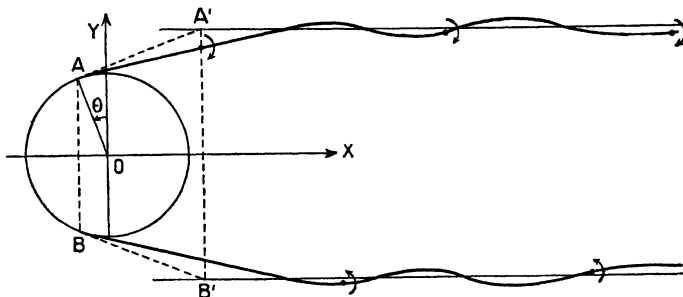


Fig. 11.

Désignons par A et B les points de l'obstacle où se forment les tourbillons (*fig. 11*) et posons

$$\widehat{Ox, OA} = \frac{\pi}{2} + \theta, \quad \widehat{Ox, OB} = -\frac{\pi}{2} - \theta.$$

La vitesse fluide aux points A et B est sensiblement  $2V \cos \theta$  et nous pouvons admettre que la formation des tourbillons est achevée après un parcours de longueur  $l$  tel que

$$2Vl \cos \theta = \Gamma,$$

qui amène les tourbillons en A' ou B'.

On peut donc prendre pour  $\delta$  la longueur AA' qui vaut

$$2(a \cos \theta + l \sin \theta) = 2a \cos \theta + \frac{|\Gamma|}{V} \operatorname{tg} \theta$$

et qui conduit à l'expression <sup>(1)</sup> de la résistance :

$$\frac{\rho |\Gamma|}{T} \left( 2a \cos \theta + \frac{|\Gamma|}{V} \operatorname{tg} \theta \right).$$

<sup>(1)</sup> Dans cette expression  $a$  désigne toujours le rayon du cercle (C) qui est ici celui de l'obstacle envisagé et  $\theta$  dépend de la vitesse  $V$ .

5. **Remarques.** — *a.* Il est bon de noter que la formule (1) qui ne comporte aucune approximation reste encore exacte même si les hypothèses faites sur la convergence des séries au n° 9 du chapitre IV ne sont pas vérifiées. Il suffit, en effet, que

$$\lim |z^\alpha f'_z| = k, \quad \alpha > \frac{1}{2} \quad (k, \text{ nombre fini}),$$

quand  $|Z|$  augmente indéfiniment tout en restant dans un domaine qui isole les tourbillons ou les groupes de tourbillons, pour que les calculs faits dans l'évaluation de la force restent encore valables.

*b.* Les théories habituellement admises, pour le traitement d'un sillage de tourbillons alternés, introduisent dès le début du calcul un potentiel qui fait intervenir ce sillage d'une manière approximative; toutes les transformations sont faites sur ce potentiel alors que l'on peut très bien, nous l'avons montré au chapitre IV, conserver dans le calcul la position exacte des tourbillons et obtenir les efforts sous une forme où les singularités inconnues apparaissent sans aucune approximation.

Il est à peine besoin de remarquer que dans les applications de ce genre, où le calcul rigoureux paraît bien difficile, les approximations doivent être rejetées le plus loin possible et ne doivent surtout pas servir de bases à de nouveaux développements théoriques (1).

Enfin ces théories ne tiennent pas assez compte de la liberté des tourbillons; il est évident que l'introduction prématurée du sillage approché le permet difficilement, mais cependant il faut noter que c'est cette liberté des tourbillons qui permet d'obtenir les efforts sans approximation et qui assure la disparition des termes en  $\Gamma^2$  dans l'intégrale portant sur le carré de la vitesse complexe (2).

(1) C'est ce qui se produit, en particulier, dans la longue théorie de Syngé (*Proc. Roy. Irish Acad.*, t. 37, A, 1927, p. 95).

On utilise, dans cette théorie, un potentiel approché qui (en admettant même le sillage choisi) est à peu près valable pour les grandes valeurs de  $z$ ; on y calcule l'intégrale  $\int_c \left(\frac{df}{dz}\right)' dz$ , qui figure dans l'effort, par la méthode des résidus et *en utilisant toujours la même forme approchée*, c'est à dire en négligeant tous les tourbillons images destinés à tenir compte de l'obstacle; il n'est alors pas étonnant que le résultat obtenu ne fasse pas intervenir la forme de cet obstacle.

(2) En particulier, on remarquera que, dans la théorie de Syngé, si l'on admet le potentiel utilisé et si l'on exprime, avec ce dernier, la liberté des tourbillons les

6. **File tourbillonnaire continue.** — Supposons d'abord que les tourbillons soient distincts, les affixes des images de ces tourbillons dans le plan de  $(C)$  et les intensités correspondantes étant à l'instant  $t$

$$\zeta_1(t), \zeta_2(t), \dots, \zeta_n(t), \dots; \quad \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n, \dots$$

Si les tourbillons sont distribués sur une courbe, leur affixe est fonction d'un paramètre  $u$  servant à la fois à fixer l'image sur la courbe et à individualiser  $\Gamma$ ; ainsi la file tourbillonnaire image sera caractérisée par deux fonctions

$$\Gamma(u), \quad \zeta(u, t).$$

Mais le nombre des tourbillons est devenu infiniment grand et la circulation totale, autour du profil, doit rester finie : l'intensité tourbillonnaire doit donc être infiniment petite et nous la noterons  $d\Gamma(u)$ , de sorte que la circulation autour du profil sera à l'instant  $t$

$$\int_0^t d\Gamma(u),$$

si le paramètre  $u$  choisi correspond à un tourbillon formé au temps  $t = u$  ( $t = 0$  marquant le début de l'échappement tourbillonnaire).

Dans ces conditions, le potentiel s'écrira

$$G(Z) - \frac{i}{2\pi} \int_0^t \log \frac{Z - \zeta(u, t)}{Z - \zeta'(u, t)} d\Gamma(u), \quad \zeta \cdot \bar{\zeta}' = a',$$

et la vitesse complexe vaudra

$$\frac{1}{H_Z} \left\{ \frac{dG}{dZ} - \frac{i}{2\pi} \int_0^t \left[ \frac{1}{Z - \zeta(u, t)} - \frac{1}{Z - \zeta'(u, t)} \right] \right\} d\Gamma(u).$$

En un point extérieur à la file tourbillonnaire, la vitesse précédente est définie; en un point de la file, on calculera cette vitesse en prenant l'intégrale au sens de Cauchy, ce qui reviendra à utiliser

termes en  $\Gamma^2$  disparaissent dans l'intégrale

$$\int_c \left( \frac{df}{dz} \right)^2 dz,$$

compte tenu du schéma tourbillonnaire admis.

l'hypothèse (7) du chapitre IV et donnera la condition pour que la file tourbillonnaire soit libre <sup>(1)</sup>.

Si le profil présente une pointe d'image  $Z = a$ , la condition de Joukowsky donne en plus la condition

$$(2) \quad \left( \frac{dG}{dZ} \right)_{Z=a} - \frac{i}{2\pi} \int_0^t \left[ \frac{1}{a - \zeta(u, t)} - \frac{1}{a - \zeta'(u, t)} \right] d\Gamma(u) = 0.$$

La partie tourbillonnaire des efforts s'écrira

$$(3) \quad X_1 + iY_1 = i\rho \frac{d}{dt} \int_0^t [\zeta(u, t) - \zeta'(u, t)] e^{i\theta} d\Gamma(u),$$

$$(4) \quad M_0 = \mathcal{R}_\rho \left\{ (l - im) \int_0^t [\zeta(u, t) - \zeta'(u, t)] d\Gamma(u) + \frac{d}{dt} \int_0^t K[\zeta(u, t)] d\Gamma(u) \right\},$$

avec

$$K[\zeta(u, t)] = \frac{1}{2} H[\zeta(u, t)] \cdot \overline{H[\zeta(u, t)]} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{-n}}{\zeta^n(u, t)}.$$

En opérant comme au n° 7 du chapitre IV, on pourra obtenir le moment par rapport à un point fixe sous la forme d'une dérivée par rapport au temps et mettre en évidence la résultante cinétique et le moment cinétique du fluide <sup>(2)</sup>.

**7. Les mouvements infiniment voisins de mouvements à circulation constante d'un profil à pointe.** — Les mouvements à circulation constante  $\Gamma$  sont caractérisés (nous l'avons vu au paragraphe II du chapitre III) par

$$m + \omega\Omega = \frac{\Gamma}{4\pi a} = \text{const.};$$

dans ce cas, le premier membre de l'équation (2) est identiquement nul et il n'y a pas d'échappement tourbillonnaire.

Si l'expression  $m + \omega\Omega$  présente de petites variations avec le temps, le mouvement comporte un sillage de tourbillons dont les intensités restent petites; nous désignerons ce mouvement par (M).

<sup>(1)</sup> Voir, G. COUCHET [4], chap. III.

<sup>(2)</sup> Voir, G. COUCHET [4], p. 15 et 18.

Soit  $(M_0)$  un mouvement à circulation constante (paramètres de vitesse  $l_0, m_0, \omega_0$ ) dans lequel le profil considéré reste toujours voisin du profil égal animé du mouvement  $(M)$ .

Par des considérations que nous ne développerons pas ici <sup>(1)</sup>, nous avons été conduit à supposer que dans le cas où les paramètres de vitesse  $l, m, \omega$  du mouvement  $(M)$  restent voisins de ceux de  $(M_0)$  les tourbillons suivent approximativement les particules fluides de ce dernier mouvement pourvu que

$$\frac{d}{dt}(l - l_0), \quad \frac{d}{dt}(m - m_0), \quad \frac{d}{dt}(\omega - \omega_0)$$

restent aussi négligeables.

Nous avons appelé les mouvements  $(M)$  : infiniment voisins de mouvements à circulation constante.

Les hypothèses introduites généralisent celles que Birnbaum, Küssner, etc. avaient été conduits à faire en vue de la détermination de la vitesse critique d'une aile mince. Les mouvements étudiés par ces auteurs étaient infiniment voisins de la translation uniforme à circulation nulle.

Pour calculer les efforts aérodynamiques nous introduirons les fonctions

$$l - l_0 = \lambda, \quad m - m_0 = \mu, \quad \omega - \omega_0 = \alpha$$

qui restent, ainsi que leurs dérivées par rapport au temps, infiniment petites par rapport à  $l_0, m_0, \omega_0$ .

Nous savons (chap. IV, n° 7) que la partie non tourbillonnaire de la résultante générale des forces aérodynamiques s'écrit, en axes fixes,

$$i\rho \frac{d}{dt} [(x_0 + iy_0) \Gamma - (A l + B m + C \omega) e^{i\theta}]$$

ou encore, en axes liés au profil,

$$i\rho \left[ (l + im) \Gamma_0 - i(A l + B m + C \omega) \omega - \left( A \frac{dl}{dt} + B \frac{dm}{dt} + C \frac{d\omega}{dt} \right) \right].$$

On peut toujours choisir  $(M_0)$  pour que, à l'instant initial

$$\lambda = \mu = \alpha = 0,$$

---

(1) G. COUCHET [3], p. 48.

dans ces conditions

$$\Gamma_0 = 4\pi\alpha(m_0 + \omega_0\Omega),$$

et l'expression de la force deviendra

$$\begin{aligned} i\rho \left[ (l_0 + im_0)\Gamma_0 - i(A l_0 + B m_0 + C \omega_0)\omega_0 - \left( A \frac{dl_0}{dt} + B \frac{dm_0}{dt} + C \frac{d\omega_0}{dt} \right) \right] \\ + i\rho \left[ (\lambda + i\mu)\Gamma_0 - i(A l_0 + B m_0 + C \omega_0)\alpha \right. \\ \left. - i(A\lambda + B\mu + C\alpha)\omega_0 - \left( A \frac{d\lambda}{dt} + B \frac{d\mu}{dt} + C \frac{d\alpha}{dt} \right) \right] \\ + \rho [A\lambda + B\mu + C\alpha]\alpha. \end{aligned}$$

Le premier crochet est l'expression de la résultante dans le mouvement à circulation constante ( $M_0$ ), le deuxième crochet est infiniment petit du premier ordre, le troisième crochet est infiniment petit du deuxième ordre et sera négligé.

La partie non tourbillonnaire du moment résultant des forces aérodynamiques par rapport au centre du profil se calculera de la même manière en utilisant la formule du chapitre II (§ II) et conduira à une décomposition analogue à celle que nous venons de trouver pour la résultante générale.

La partie tourbillonnaire des efforts proviendra des formules du chapitre IV (n° 7) dans lesquelles on supposera que les tourbillons suivent les particules fluides du mouvement ( $M_0$ ).

Cette deuxième partie des efforts nécessitera la détermination du mouvement des particules fluides de ( $M_0$ ) défini par l'équation (1)

$$\frac{d\overline{H(\zeta)}}{dt} = -(l_0 - im_0) + i\omega_0\overline{H(\zeta)} + \frac{dG_0}{d\zeta} \frac{1}{H'_z} - \frac{i\Gamma_0}{2\pi\zeta} \frac{1}{H'_z}$$

qui se déduit immédiatement du potentiel introduit au chapitre III (§ 1, n° 1), compte tenu du fait que  $\frac{d\overline{H(\zeta)}}{dt}$  est la *vitesse absolue* de la particule fluide situé dans le plan du profil.

La condition de Joukowsky

$$\left[ \frac{dG_0}{dZ} - \frac{i\Gamma_0}{2\pi Z} \right]_{z=a} + \frac{i}{2\pi} \int_0^t \left[ \frac{1}{a - \zeta(u, t)} - \frac{1}{a - \zeta'(u, t)} \right] d\Gamma(u) = 0$$

permettra alors le calcul de  $\Gamma(u)$ .

---

(1)  $G_0$  est le potentiel sans circulation construit avec  $l_0, m_0, \omega_0$ .

8. **Mouvements infiniment voisins de la translation uniforme à circulation nulle.** — Dans ce cas nous supposons

$$l_0 = -V, \quad m_0 = \omega_0 = \Gamma_0 = 0,$$

les termes relatifs au mouvement  $(M_0)$  disparaîtront dans l'expression de la force et nous ne conserverons que les termes du premier ordre qui se réduisent à

$$i\rho \left[ iAV - \left( A \frac{d\lambda}{dt} + B \frac{d\mu}{dt} + C \frac{dx}{dt} \right) \right].$$

Soit A le point dont les coordonnées sont  $\Omega$ ,  $\omega$  par rapport aux axes liés au profil (fig. 12) et désignons par  $O_1 x_1$  l'axe fixe, parallèle à la translation  $\vec{V}$ , et voisin du premier axe du profil; le point A

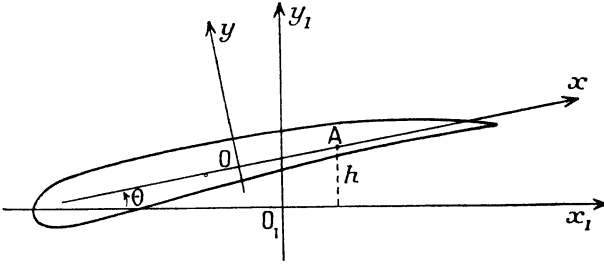


Fig. 12.

aura, par rapport aux axes fixes, une ordonnée  $h$  qui restera infiniment petite et nous pourrions écrire

$$\begin{aligned} l &= \frac{dh}{dt} \sin \theta - V \cos \theta, & m &= \frac{dh}{dt} \cos \theta + V \sin \theta - \Omega \frac{d\theta}{dt}, \\ \lambda &= \frac{dh}{dt} \sin \theta, & \nu &= \frac{dh}{dt} \cos \theta - \Omega \frac{d\theta}{dt}. \end{aligned}$$

Comme  $\theta$  reste petit pendant le mouvement, l'expression de la force peut se réduire à

$$i\rho \left[ iAV \frac{d\theta}{dt} - B \left( \frac{d^2 h}{dt^2} + V \frac{d\theta}{dt} - \Omega \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) - C \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right];$$

On obtient une expression analogue pour le moment, c'est-à-dire linéaire par rapport à  $\frac{dh}{dt}$ ,  $\frac{d\theta}{dt}$  et leurs dérivées par rapport au temps.



Comme dernière application des formules générales (n° 7 du présent chapitre), nous allons montrer comment les parties tourbillonnaires des efforts, qui se prêtent à la détermination de la vitesse critique de l'aile comme celles qui figurent dans les théories de Küssner [12], Theodorsen [17], peuvent, comme ces dernières, s'exprimer à l'aide des fonctions cylindriques.

Les formules données par les auteurs précédents concernent un profil réduit à un segment de droite; celles que nous allons donner, un peu plus générales, font intervenir un coefficient d'épaisseur.

*a. Définition du coefficient d'épaisseur.* — Dans la transformation du chapitre I (§ II), l'argument de  $a_1$  est toujours petit, ce qui justifie le nom de « paramètre d'épaisseur du profil » donné au petit axe de l'ellipse obtenue en limitant la transformation à

$$z = Z + \frac{\mathcal{R}a_1}{Z},$$

nous désignerons ce paramètre par  $p$  et son expression sera

$$p = 2 - \frac{a_1 + \bar{a}_1}{a^2}.$$

Si nous prenons  $p$ , comme infiniment petit principal nous aurons, en nous limitant aux termes du premier ordre les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \alpha &\sim \pi a^2 p, & \alpha \zeta &\sim -\frac{1}{2} \pi a^3 p, \\ \Omega &\sim a, & P &\sim 2 a^4 (1-p), & A_{-1} + \bar{A}_{-1} &= \frac{p a^3}{2}, \\ \mathcal{J} A &= 0, & \mathcal{R} B &= 2 \pi a^2 (2-p), & \mathcal{R} C &= \frac{a^3 p}{2} (\pi + i). \end{aligned}$$

Nous obtiendrons une valeur approchée des efforts en utilisant les résultats précédents dans le calcul des expressions obtenues aux chapitres II (n° 2) et III (n° 2) et au n° 7 du présent chapitre.

Les parties non tourbillonnaires se calculent sans difficulté <sup>(1)</sup>, les

(1) On trouve, par exemple, pour la partie imaginaire de l'effort

$$\rho \left\{ -2 \pi a^2 (2-p) (h'' + \mathbf{V} \theta') + a^3 \left[ 4 \pi - p \left( \frac{5\pi}{2} + \frac{1}{2} \right) \right] \theta'' \right\}.$$

parties tourbillonnaires font intervenir le mouvement des singularités, elles s'expriment à l'aide des intégrales

$$(5) \quad i\rho \int_{t_0}^t \left[ \frac{d\zeta}{dt}(u, t) - \frac{d\zeta'}{dt}(u, t) \right] d\Gamma(u),$$

$$(6) \quad -\rho V \int_{t_0}^t [\zeta(u, t) - \zeta'(u, t)] d\Gamma(u) \\ + \mathcal{R}\rho \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \left\{ \frac{H[\zeta(u, t)] \cdot \bar{H}}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\zeta^n(u, t)} \right\} d\Gamma(u),$$

qui figurent respectivement dans la force <sup>(1)</sup> et le moment par rapport au centre du profil.

*b. Les trajectoires tourbillonnaires.* — Nous supposons que les singularités tourbillonnaires suivent les particules fluides du mouvement voisin (voir n° 7 du présent chapitre) qui est ici la translation uniforme à circulation nulle. Dans ces conditions, on voit que tous les tourbillons auront la même trajectoire : la ligne de courant passant par la pointe. L'image de cette trajectoire est, dans le plan du cercle  $|Z| = a$ , l'axe réel de sorte que  $\zeta(u, t)$  sera réel et

$$\zeta \cdot \zeta' = a^2.$$

Le mouvement des tourbillons sera déterminé par l'équation différentielle

$$H'_\zeta \cdot \bar{H}'_\zeta d\zeta = V \left( 1 - \frac{a^2}{\zeta^2} \right) dt$$

que nous étudierons d'abord et qui exprime que la vitesse de la particule fluide dérive du potentiel étudié au chapitre II.

Nous supposerons que le profil admet une pointe de rebroussement (ce qui n'est pas une hypothèse restrictive, puisque nous ne devons retenir que son épaisseur),  $H'_z$  sera divisible par  $1 - \frac{a}{Z}$  et nous pourrons écrire

$$H'_z = \left( 1 - \frac{a}{Z} \right) \left( 1 + \frac{a}{Z} + \frac{a^2 - a_1}{Z^2} + \frac{a^3 - a_1 a - 2a_2}{Z^3} + \dots \right)$$

---

<sup>(1)</sup> Le terme en  $\omega$  qui figure dans la formule complète disparaît en raison des approximations admises aux n°s 7 et 8 du présent chapitre.

et, par conséquent, en déduire

$$H'_z \cdot \overline{H'_z} = \left(1 - \frac{a}{Z}\right)^2 \left[1 + \frac{2a}{Z} + \frac{a^2}{Z^2} + \frac{pa^2}{Z^2} + \dots\right]$$

que nous écrirons aussi

$$H'_z \cdot \overline{H'_z} = \left(1 - \frac{a}{Z}\right)' \left(1 + \frac{a}{Z}\right) \left(1 + \frac{a}{Z} + \frac{pa^2}{Z^2} + \dots\right).$$

En posant  $\zeta = \lambda a$ , l'équation horaire du mouvement des tourbillons s'écrira

$$V dt = a \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \left(1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{p}{\lambda^2} + \dots\right) d\lambda,$$

et pourra se mettre sous la forme

$$(7) \quad \frac{V}{a}(t-u) = \lambda + \frac{1}{\lambda} - 2 + p \left(-\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{V}{a} f(\lambda)$$

en remarquant que, pour  $t = u$  (époque à laquelle le tourbillon se détache de la pointe),  $\lambda = 1$ .

Un calcul analogue nous fournira

$$H(\zeta) \cdot \overline{H(\zeta)} = \zeta^2 + (2-p)a + \frac{a^2(1-p)}{\zeta^2} + \frac{pa^2}{2\zeta^3} + \dots$$

et

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{-n}}{\zeta^n} = \frac{pa^2}{2\zeta} + \frac{2-p}{\zeta^2} a^2 + \frac{pa^2}{2\zeta^3} + \dots,$$

de sorte que

$$(8) \quad \frac{H(\zeta) \cdot \overline{H(\zeta)}}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{-n}}{\zeta^n} = \frac{\zeta^2}{2} + \left(1 - \frac{p}{2}\right)a - \frac{a^2}{2\zeta^2} + \dots$$

*c. La condition de Joukowski.* — Elle exprime que la vitesse fluide à la pointe du profil est finie; elle se traduit par l'équation intégrale (10) (chap. IV, n° 8) qui prend ici la forme

$$(9) \quad 4\pi a(m + \omega\Omega) - \int_{t_0}^t \frac{\zeta(u, t) + a}{\zeta(u, t) - a} d\Gamma(u) = 0,$$

cette équation s'écrit aussi

$$4\pi a(m + \omega\Omega) - \int_{t_0}^t \frac{\zeta(u, t) + a}{\zeta(u, t) - a} \varphi(u) du = 0$$

en posant

$$\frac{d\Gamma}{du} = \varphi(u).$$

Dans l'étude de la vitesse critique d'une aile, on est conduit pour  $h$  et  $\theta$  à des expressions de la forme

$$h = h_0 e^{i\nu t}, \quad \theta = \theta_0 e^{i\nu t},$$

de sorte que nous chercherons des solutions de l'équation intégrale (9) ayant la même forme

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{i\nu t}.$$

Dans ce qui suit,  $h_0, \theta_0, \varphi_0$  sont des constantes qui peuvent être imaginaires.

La solution physiquement acceptable de (9) étant la partie réelle de  $\varphi$ , il suffira d'écrire

$$4\pi a(i\nu h_0 + V\theta_0) - \frac{\varphi_0}{i\nu} - \varphi_0 \int_{t_0}^t \frac{2a}{\zeta(u, t) - a} e^{i\nu(u-t)} du = 0,$$

$$\mathcal{R}\left(\frac{\varphi_0}{i\nu} e^{i\nu t_0}\right) = 0,$$

de sorte que

$$\varphi_0 = \frac{4\pi a(i\nu h_0 + V\theta_0)}{\frac{1}{i\nu} + \int_{t_0}^t \frac{2a}{\zeta(u, t) - a} e^{i\nu(t-u)} du}$$

Cette dernière expression fait intervenir une intégrale qui, transformée par (7) où  $\zeta = \lambda a$ , devient

$$2 \int_L^1 \frac{e^{i\nu f(\lambda)}}{\lambda - 1} (-f'_\lambda d\lambda)$$

et prend la forme

$$2 \int_1^\infty \frac{e^{i\nu f(\lambda)}}{\lambda - 1} f'_\lambda d\lambda$$

quand la limite  $L$  devient infinie, c'est-à-dire quand le régime est établi.

Remplaçant  $f(\lambda)$  par sa valeur, on obtient

$$\frac{2a}{V} \int_1^\infty e^{-\frac{i\nu a}{V} \left[ \lambda + \frac{1}{\lambda} - 2 + p \left( -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{2} \right) \right]} \frac{1 - \frac{1}{\lambda^2} + p \left( \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^3} \right)}{\lambda - 1} d\lambda,$$

soit, en se bornant aux termes du premier ordre en  $p$

$$\frac{2a}{V} e^{\frac{i\nu a}{V}} \int_1^\infty e^{-\frac{i\nu a}{V} \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right)} \left[ \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{p}{\lambda^3} - \frac{i\nu a}{2V} P \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^3} + \frac{1}{\lambda^4} \right) \right] d\lambda.$$

Soit encore

$$\frac{2a}{V} e^{ik} \left[ T_1 + T_2 + pT_3 - \frac{ipk}{4} (T_1 - T_2 - T_3 + T_4) \right]$$

en posant

$$(10) \quad \frac{2\nu a}{V} = k \quad \text{et} \quad \int_1^\infty \frac{e^{-\frac{ik}{\nu} \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right)}}{\lambda^n} d\lambda = T_n(k).$$

La valeur de  $\varphi(t)$  sera

$$\frac{2\pi V^2 \left( ih_0 \frac{k}{2\theta} + \theta_0 \right) e^{i\nu t}}{\frac{1}{ik} + e^{ik} \left[ T_1 + T_2 + pT_3 - \frac{ipk}{4} (T_1 - T_2 - T_3 + T_4) \right]}$$

ou

$$\frac{2\pi V \left( \frac{dh}{dt} + V\theta \right)}{\frac{1}{ik} + e^{ik} \left[ T_1 + T_2 + pT_3 - \frac{ipk}{4} (T_1 - T_2 - T_3 + T_4) \right]}.$$

*d. Les intégrales qui figurent dans la partie tourbillonnaire des efforts.* — La partie utile de la résultante générale fait intervenir

$$i\rho \int_{t_0}^t \left[ \frac{\partial \zeta}{\partial t}(u, t) - \frac{\partial \zeta'}{\partial t}(u, t) \right] \varphi(u) du.$$

$\frac{\partial \zeta(u, t)}{\partial t}$  a pour limite  $V$  quand  $t$  augmente indéfiniment; aussi, pour que l'intégrale garde un sens dans ce cas-là, nous l'écrivons sous la forme

$$i\rho \int_{t_0}^t \left[ \frac{\partial \zeta(u, t)}{\partial t} - \frac{\partial \zeta'}{\partial t} - V \frac{\zeta + a}{\zeta - a} \right] \varphi(u) du + \rho V \int_{t_0}^t \frac{\zeta + a}{\zeta - a} \varphi(u) du$$

qui deviendra, en utilisant l'équation intégrale (9) et la relation  $\zeta \zeta' = a^2$ ,

$$i\rho V \left[ 4\pi a \left( \frac{dh}{dt} + V\theta \right) - \Gamma_0 \right] + i\rho \int_{t_0}^t \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{a^2}{\zeta^2} \frac{\partial \zeta}{\partial t} - V \frac{\zeta + a}{\zeta - a} \right) \varphi(u) du.$$

Le changement de variable

$$t - u = \tau,$$

qui, d'après la relation (7), donne

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{d\lambda}{d\tau},$$

permet d'écrire notre résultat sous la forme

$$i\rho V \left[ 4\pi a \left( \frac{dh}{dt} + V\theta \right) - \Gamma_0 \right] + i\rho \int_0^{t-t_0} \left[ a \left( 1 + \frac{1}{\lambda^2} \right) - V \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \frac{d\tau}{d\lambda} \right] \varphi(t - \tau) d\lambda.$$

En utilisant le changement de variable (7), nous aurons

$$i\rho V \left[ 4\pi a \left( \frac{dh}{dt} + V\theta \right) - \Gamma_0 \right] + i\rho \int_1^L \left[ a \left( 1 + \frac{1}{\lambda^2} \right) - V \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} f'(\lambda) \right] \varphi[t - f(\lambda)] d\lambda,$$

soit, en faisant tendre  $L$  vers l'infini après avoir remplacé  $\varphi$  et  $f$  par les expressions (10) et (7),

$$i\rho V \left[ 4\pi a \left( \frac{dh}{dt} + V\theta \right) - \Gamma_0 \right] + i\rho e^{iVt} a \varphi_0 \int_1^\infty \left[ -\frac{2}{\lambda} - \frac{p}{\lambda^2} \left( 1 + \frac{1}{\lambda} \right) \right] e^{-i\frac{Va}{V} \left[ \lambda + \frac{1}{\lambda} - v + p \left( -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{2} \right) \right]} d\lambda$$

ou enfin, en se limitant au premier ordre en  $p$  et en utilisant les relations (10)

$$i\rho V \left[ 4\pi a \left( \frac{dh}{dt} + V\theta \right) - \Gamma_0 \right] - 4\pi a \rho iV \left( \frac{dh}{dt} + V\theta \right) \frac{T_1 + \frac{p}{2}(T_2 + T_3) - \frac{ipk}{4}(T_1 - 2T_2 + T_3)}{\frac{e^{-ik}}{ik} + T_1 + T_2 + pT_3 - \frac{ipk}{4}(T_1 - T_2 - T_3 + T_4)}.$$

L'intégrale figurant dans le moment par rapport au centre du profil s'écrit, en utilisant (8),

$$\mathcal{R}_\rho \int_{t_0}^t \left( \zeta + \frac{a^2}{\zeta^3} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial t} \varphi(u) du - \rho V \int_{t_0}^t \left( \zeta - \frac{a^2}{\zeta} \right) \varphi(u) du.$$

Les transformations utilisées pour réduire la partie tourbillonnaire

de la force nous donnent successivement

$$\begin{aligned} & \rho \int_0^{t-t_0} \left[ a' \left( \lambda + \frac{1}{\lambda^3} \right) - V a \left( \lambda - \frac{1}{\lambda} \right) \frac{d\tau}{d\lambda} \right] \varphi(t - \tau) d\lambda, \\ & \rho \int_1^L \left[ a^2 \left( \lambda + \frac{1}{\lambda^3} \right) - V a \left( \lambda - \frac{1}{\lambda} \right) \frac{d\tau}{d\lambda} \right] \varphi[t - f(\lambda)] d\lambda, \\ & \rho e^{i\nu t} a^2 \varphi_0 \int_1^\infty \left[ \frac{2}{\lambda} - p \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^3} + \frac{1}{\lambda^4} \right) \right] e^{-i\nu f(\lambda)} d\lambda, \end{aligned}$$

soit, en se limitant au premier ordre en  $p$  après avoir remplacé  $\varphi_0$  par sa valeur,

$$\rho a^2 e^{i\nu t} 2\pi V \left( \frac{dh}{dt} + V\theta \right) \frac{2T_1 - p(T_1 - T_2 - T_3 + T_4) - \frac{ipk}{4}(T_1 - 2T_0 + T_3)}{\frac{1}{ik} + e^{ik} \left[ T_1 + T_0 + pT_3 - \frac{ipk}{4}(T_1 - T_2 - T_3 + T_4) \right]}$$

*e. Introduction des fonctions cylindriques.* — On peut calculer les fonctions  $T_n(k)$  connaissant  $T_1(k)$  et  $T_2(k)$ , il suffit de remarquer que

$$T_{n+1}(k) = T_{n-1} - [(n-1)T_n - e^{-ik}] \frac{2i}{k},$$

et comme

$$\begin{aligned} T_1(k) &= -\frac{i\pi}{2} H_0^2(k), \\ T_2(k) &= \frac{ie^{-ik}}{k} - \frac{\Gamma}{2} H_1^2(k), \end{aligned}$$

les  $T_n(k)$  s'expriment par des fonctions de Hankel du paramètre  $k$ .  
On remarquera, en particulier, que

$$4T_3 - ik(T_1 - T_2 - T_3 + T_4) = 2T_2 = \frac{2ie^{-ik}}{k} - \pi H_1^2(k).$$

Nous mentionnerons en terminant que, pour  $p = 0$  (profil réduit à un segment de droite), on trouve pour les deux expressions (5), (6)

$$\begin{aligned} & 4\pi a i \rho V \left( \frac{dh}{dt} + V\theta \right) \frac{H_1^2(k)}{H_1^2 + iH_0^2}, \\ & 4\pi a^2 \rho V \left( \frac{dh}{dt} + V\theta \right) \frac{iH_0^2(k)}{H_1^2 + iH_0^2}. \end{aligned}$$

Ces résultats sont bien en accord avec ceux qu'obtiennent les auteurs qui traitent directement le profil réduit à un segment de droite.

## BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE.

---

- [1] W. BIRNBAUM, *Das ebene Problem der schlagenden Tragflügels* (*Z. A. M. M.* (1), t. 4, n° 4, 1924).
- [2] P. CICALA, *Lo stato attuale delle ricerche sul moto instazionario di una superficie portante* (*Aerotecnica*, t. 21, nos 9-10, 1941).
- [3] G. COUCHET, *Les mouvements plans non stationnaires à circulation constante et les mouvements infiniment voisins* (*O. N. E. R. A.* (2), n° 31, Paris, 1949).
- [4] G. COUCHET, *Efforts aérodynamiques sur un profil animé d'un mouvement quelconque dans un fluide en repos à l'infini* (*O. N. E. R. A.* (2), n° 56, Paris, 1952).
- [5] G. ELLENBERGER, *Luftkräfte bei beliebig instationärer Bewegung eines Tragflügels mit Querruder* (*Z. A. M. M.* (1), t. 16, n° 4, 1936 et t. 18, n° 3, 1938).
- [6] H. GLAUERT, *The force and moment on an oscillating airfoil* (*A. R. C.* (3), R. M. 1095, 1927).
- [7] H. GLAUERT, *The accelerated motion of a cylindrical body through a fluid* (*A. R. C.* (3), R. M. 1215, 1929).
- [8] I. E. GARRICK, *Propulsion of a flapping and oscillating airfoil* (*N. A. C. A.* (4), R. 567).
- [9] K. JAECKEL, *Zur Theorie der tragenden Linie in Instationären* (*Luftfahrtforschung*, t. 19, n° 2, 1942).
- [10] W. P. JONES, *Aerodynamic forces on wings in non-uniform motion* (*A. R. C.* (1), R. M. 2117).
- [11] E. E. JONES, *The effect of the non uniformity of the stream on the aerodynamic characteristics of a moving airfoil* (*Quart. J. of Mechanics and Appl. Math.*, t. 4, n° 3, 1951).
- [12] H. G. KÜSSNER, *Schwingungen von Flugzeugflügeln* (*Luftfahrtforschung*, t. 4, n° 2, 1929).
- [13] H. G. KÜSSNER, *Contribution to non steady theory of airfoil*, F. B. 1774, 1943.
- [14] J. PÉRÈS, *Cours de Mécanique des fluides*, Gauthier-Villars, Paris, 1936.
- [15] R. M. MORRIS, *The two dimensional hydrodynamical theory of moving airfoil* (*Proc. Roy. Soc.*, série A, t. 161, 1937, p. 406; t. 164, 1938, p. 346; t. 172, 1939, p. 213; t. 188, 1947, p. 439).

---

(1) *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik.*

(2) *Office National d'Etudes et de Recherches Aéronautiques.*

(3) *Aeronautical Research Committee (Reports and Memoranda).*

(4) *National Advisory Committee for Aeronautics (Report).*



- [16] TH. THEODORSEN, *General theory of aerodynamic instability (N.A.C.A. (4))*, R. 496, 1934.
- [17] H. VILLAT, *Leçons sur la théorie des tourbillons*, Gauthier-Villars, Paris, 1930.
- [18] H. VILLAT, *Mécanique des fluides*, Gauthier-Villars, Paris, 1938.
- [19] H. WAGNER, *Ueber die Entstehung der dynamischen Auftriebes von Tragflügeln*, (*Z. A. M. M.* (1), t. 5, n° 1, 1925).



---

## TABLE DES MATIÈRES.

---

PRÉFACE.....	Pages I
--------------	------------

### CHAPITRE I. — GÉNÉRALITÉS.

#### I. — *Les équations.*

1. Fluide parfait.....	5
2. Fluide incompressible.....	6
3. Fluide irrotationnel.....	6
4. Fluide contenant un tourbillon.....	8
5. Fluide contenant un obstacle.....	9

#### II. — *La transformation d'une circonférence en un profil.*

1. La formule de transformation.....	10
2. Aire du profil.....	11
3. Centre de gravité de l'aire intérieure au profil.....	12
4. Profil présentant une pointe.....	12
5. Profil Joukowsky.....	13

### CHAPITRE II. — MOUVEMENT D'UN PROFIL A CIRCULATION NULLE.

1. Le potentiel.....	14
2. Les efforts.....	17
3. Les éléments cinétiques du fluide.....	19
4. Axes principaux du profil.....	20
5. Calcul de $\alpha$ , $\beta$ , $\gamma$ en axes principaux.....	22
6. Les efforts rapportés aux axes principaux.....	23
7. La force vive du fluide.....	24
8. Calcul direct de la force vive du fluide.....	24

### CHAPITRE III. — LES MOUVEMENTS A CIRCULATION CONSTANTE.

#### I. — *Le profil n'a pas de pointe.*

1. Le potentiel.....	25
2. Les efforts.....	26
3. Le travail des forces aérodynamiques.....	27

#### II. — *Le profil présente une pointe.*

1. Le potentiel.....	27
----------------------	----

	Pages.
2. Conditions cinématiques.....	29
3. Cas particulier de la circulation nulle.....	29
4. Un exemple simple.....	29
5. La condition de circulation constante en axes principaux.....	30
6. Les mouvements dans lesquels les forces aérodynamiques ne travaillent pas.	32
7. Le mouvement de rotation uniforme.....	32
8. Les mouvements périodiques.....	35

### III. — *Profil mobile dans un courant.*

1. Mouvement à circulation constante.....	35
2. Cas particulier du profil dans un vent uniforme.....	37
3. Le profil présente une pointe.....	38
4. Cas particulier d'un profil à pointe dans un vent uniforme.....	41

### CHAPITRE IV. — PROFIL EN MOUVEMENT DANS UN FLUIDE CONTENANT DES SINGULARITÉS TOURBILLONNAIRES.

1. La présence des tourbillons dans le fluide et l'existence de forces extérieures.....	42
2. Calcul de la résultante des pressions.....	44
3. La résultante dynamique.....	45
4. La quantité de mouvement.....	46
5. Le tourbillon libre.....	47
6. Potentiel pour un fluide en présence d'un profil et de $n$ tourbillons libres.	48
7. Efforts aérodynamiques.....	49
8. Sillage stationnaire derrière un profil en translation.....	53
9. Cas d'un nombre infini de tourbillons.....	55
10. Calcul de la force et du moment.....	56

### CHAPITRE V. — LES TRAVAUX EXPÉRIMENTAUX ET LES THÉORIES APPROCHÉES.

1. Étude d'une classe particulière de mouvements non stationnaires.....	57
2. Les mouvements à circulation constante et le vol de l'oiseau.....	59
3. Sillage de tourbillons pour des mouvements périodiques d'un profil.....	61
4. Cas particulier d'un sillage de tourbillons alternés.....	62
5. Remarques.....	64
6. File tourbillonnaire continue.....	65
7. Les mouvements infiniment voisins de mouvements à circulation constante.	66
8. Mouvements infiniment voisins de la translation uniforme à circulation nulle.	69
BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE.....	77
TABLE DES MATIÈRES.....	79