Mémorial des sciences mathématiques

Georges Heilbronn

# Intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode de Drach

*Mémorial des sciences mathématiques*, fascicule 129 (1955)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1955__129__1_0>

# MÉMORIAL
DES
# SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

**L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,**

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

*DIRECTEUR :*

**Henri VILLAT**

Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

---

FASCICULE CXXIX

## Intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode de Drach

Par Georges HEILBRONN

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
Quai des Grands-Augustins, 55

—

1955

# INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE PAR LA MÉTHODE DE DRACH

**Par M. Georges HEILBRONN.**

## INTRODUCTION.

La méthode de Drach se situe comme le développement logique de la méthode d'Ampère, dans la direction même que celui-ci envisageait. La généralisation de la méthode d'Ampère, due à Darboux, malgré les succès obtenus par lui-même et ses successeurs, comporte une limitation intrinsèque. Elle masque la portée véritable de la méthode d'Ampère, dont la puissance a été révélée par les travaux de Drach.

La lecture des Mémoires originaux de Drach semble difficile; c'est la seule raison pour laquelle son œuvre n'a pas atteint la notoriété qu'elle mérite. C'est pourquoi nous avons entrepris un exposé de sa méthode et des principaux résultats auxquels il était parvenu. Cela contribuera, nous l'espérons, à rendre accessibles à un public mathématique très large, des théories qui sont loin d'avoir épuisé leur fécondité, comme nous essayons de le prouver nous-même, dans le chapitre IV du présent Ouvrage.

Il convient de souligner que la méthode d'intégration des équations aux dérivées partielles, dont nous faisons ici l'exposé, ne représente qu'une faible partie des découvertes de Drach, dont l'œuvre s'est poursuivie dans un développement harmonieux, tout au long de sa vie. On trouve dans sa Thèse [1] les idées de base qu'il a su appliquer, par la méthode d'« intégration logique », avec le même succès, aux équations différentielles ordinaires et aux équations aux dérivées partielles. C'est le nombre considérable d'applications possibles de ces dernières qui nous a fait donner la priorité, contre tout ordre logique et chronologique, à la fin de son œuvre. Nous réservons à un autre travail l'exposé des questions relatives aux équations différentielles ordinaires.

Je tiens à remercier M. Villat, dont les encouragements précieux m'ont seuls permis de mener à bien ce travail. Son admiration pour le génie de Drach a contribué à me valoir l'insigne faveur de voir le présent travail publié dans cette célèbre Collection. Qu'il veuille bien trouver ici le témoignage de ma profonde reconnaissance (1).

## CHAPITRE I.

### A. — Généralités sur les équations du second ordre.

#### I. — Caractéristiques du second ordre [6, *b*], [7, *a*].

**1.** Soit l'équation

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \tag{1}$$

dans laquelle $z$ est fonction des deux variables indépendantes $x$ et $y$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

et telle que $f$ soit analytique pour toutes les variables.

Si $z = \varphi(x, y)$ est une intégrale de l'équation (1), elle est aussi l'équation d'une surface, dite *surface intégrale*.

Cauchy se pose le problème suivant : Étant donnée une équation (1), déterminer une surface intégrale passant par une courbe donnée C et tangente le long de cette courbe, à une surface développable

(1) Nous avons dû, sur quelques points, abréger notre rédaction primitive, pour ne pas excéder outre mesure la longueur habituelle de ces fascicules, et nous prions le lecteur de se reporter à notre Thèse soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris.

donnée D. Le long de C, $x$, $y$, $z$, $p$, $q$, sont des fonctions d'un paramètre $\theta$; $r$. $s$, $t$ satisfont à (1) et à

$$(2) \qquad \begin{cases} g = r\,dx + s\,dy - dp = 0, \\ h = s\,dx + t\,dy - dq = 0, \end{cases}$$

les différentielles étant prises par rapport à $\theta$.

(1) et (2) forment un système de trois équations à trois inconnues : $r$, $s$, $t$. Ce système admet une solution unique, si le déterminant

$$\frac{D(f, g, h)}{D(r, s, t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} & \frac{\partial f}{\partial s} & \frac{\partial f}{\partial t} \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix} \neq 0.$$

On obtient alors facilement la solution du problème de Cauchy de la manière suivante : Soient $y = \psi(x)$, $z = \chi(x)$, les équations de la courbe C. Par le changement de variables

$$x = \xi, \qquad y = \varphi(\xi) + \eta, \qquad z = \chi(\xi) + \zeta,$$

on est ramené à trouver une intégrale qui se réduise à zéro pour $\eta = 0$, la dérivée $\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$ se réduisant à une fonction donnée de $\xi$. Le déterminant $\frac{D(f, g, h)}{D(r, s, t)}$ est invariant pour la transformation précédente, mais la courbe C se réduit maintenant à l'axe des $\xi$, le coefficient de la dérivée $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2}$ étant précisément égal à ce déterminant. Dans ces conditions, on peut appliquer à l'équation ainsi transformée le théorème de Cauchy-Kowalewski, en résolvant celle-ci par rapport à $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2}$ [6, $a$].

Le problème de Cauchy étant résolu, on peut calculer les dérivées successives de $z$ en un point quelconque de la courbe C. On obtiendra, par exemple, les quatre dérivées du troisième ordre par le système suivant de cinq équations, dont le déterminant est de rang 4.

Soient

$$A = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \qquad B = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}, \qquad C = \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}, \qquad D = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Différentions l'équation (1) successivement par rapport à $x$ et à $y$;

il vient

$$(3)\qquad \left[\frac{df}{dx}\right] = \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + r\frac{\partial f}{\partial p} + s\frac{\partial f}{\partial q} + A\frac{\partial f}{\partial r} + B\frac{\partial f}{\partial s} + C\frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

$$(4)\qquad \left[\frac{df}{dy}\right] = \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + s\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial q} + B\frac{\partial f}{\partial r} + C\frac{\partial f}{\partial s} + D\frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Dans la suite, nous utiliserons également les notations suivantes :

$$\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + r\frac{\partial f}{\partial p} + s\frac{\partial f}{\partial q},$$

$$\left(\frac{df}{dy}\right) = \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + s\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial q}.$$

Pour calculer A, B, C, D, nous devons joindre aux équations (3) et (4) les relations suivantes :

$$(5)\qquad A\,dx + B\,dy - dr = 0,$$

$$(6)\qquad B\,dx + C\,dy - ds = 0,$$

$$(7)\qquad C\,dx + D\,dy - dt = 0.$$

Les équations (3), (4), (5), (6) et (7) forment un système de cinq équations aux quatre inconnues A, B, C, D, dont le tableau des coefficients est de rang 4, le déterminant étant précisément le déterminant $\frac{D(f, g, h)}{D(r, s, t)}$, que nous avons défini plus haut. On démontrerait par récurrence que le système qui permet de calculer les dérivées d'ordre $n$ admet pour déterminant une puissance du déterminant précédent.

**2.** Supposons maintenant, au contraire, que le déterminant

$$(8)\qquad \frac{D(f, g, h)}{D(r, s, t)} = \frac{\partial f}{\partial r}dy^2 - \frac{\partial f}{\partial s}dx\,dy + \frac{\partial f}{\partial t}dx^2 = 0$$

et soit encore $z = \varphi(x, y)$ l'équation d'une surface intégrale S.

L'équation (8) représente la projection sur le plan des $xy$ de deux familles de courbes tracées sur la surface S. Ces courbes sont les *courbes caractéristiques*. Le long de ces courbes, on ne peut résoudre le problème de Cauchy : il y a en général une infinité de surfaces intégrales, dépendant d'une ou de plusieurs constantes arbitraires et passant par l'une de ces courbes. D'ailleurs le système (1)-(2) de trois équations à trois inconnues est ici de rang 2 et présente par suite une indétermination que nous préciserons plus loin.

Montrons, d'autre part, que l'on peut engendrer une surface intégrale S à l'aide des courbes caractéristiques. En effet, l'équation (8) qui les définit, est du second degré : par chaque point de la surface S, il passe une courbe de chaque famille. Il suffit donc de faire varier l'une d'elles, de façon qu'elle rencontre constamment la seconde, pour qu'elle engendre la surface S.

On peut parvenir à la notion de courbe caractéristique d'une manière un peu différente. Une courbe caractéristique d'après Cauchy, est une courbe tracée sur une surface S, le long de laquelle les dérivées du troisième ordre ne sont pas déterminées par les différentielles $dx$, $dy$, $dr$, $ds$, $dt$, les différentielles $dz$, $dp$, $dq$ se calculant par les relations connues

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} dz &= p\,dx + q\,dy,\\ dp &= r\,dx + s\,dy,\\ dq &= s\,dx + t\,dy. \end{aligned}\right.$$

Le système des équations (3), (4), (5), (6) et (7) qui sert à calculer les dérivées troisièmes est de rang 3, le long d'une courbe caractéristique. Mais pour qu'il soit indéterminé, il faut en outre que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} \left(\frac{df}{dx}\right) & \frac{\partial f}{\partial s} & \frac{\partial f}{\partial t} & 0 \\ -dr & dy & 0 & 0 \\ -ds & dx & dy & 0 \\ -dt & 0 & dx & dy \end{vmatrix} = 0,$$

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} 0 & \left(\frac{df}{dy}\right) & \frac{\partial f}{\partial s} & \frac{\partial f}{\partial t} \\ dx & -dr & 0 & 0 \\ 0 & -ds & dy & 0 \\ 0 & -dt & dx & dy \end{vmatrix} = 0.$$

Les conditions (10) et (11) s'écrivent, après développement et remplacement de $\frac{\partial f}{\partial s}$ par $\dfrac{\frac{\partial f}{\partial r}dy^2 + \frac{\partial f}{\partial t}dx^2}{dx\,dy}$, valeur donnée par (8)

$$(10')\qquad \left(\frac{df}{dx}\right) dx\,dy + \frac{\partial f}{\partial r} dr\,dy + \frac{\partial f}{\partial t} ds\,dx = 0,$$

$$(11')\qquad \left(\frac{df}{dy}\right) dx\,dy + \frac{\partial f}{\partial r} ds\,dy + \frac{\partial f}{\partial t} dt\,dx = 0.$$

Le long d'une courbe caractéristique, les huit fonctions $x$, $y$, $z$, $p$, $q$, $r$, $s$, $t$ satisfont aux six relations (1), (8), (9) et (10), qui constituent le système (12)

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
f(x, y, z, p, q, r, s, t) &= 0,\\
\frac{\partial f}{\partial r}\,dy^2 - \frac{\partial f}{\partial s}\,dx\,dy + \frac{\partial f}{\partial t}\,dx^2 &= 0,\\
p\,dx + q\,dy - dz &= 0,\\
r\,dx + s\,dy - dp &= 0,\\
s\,dx + t\,dy - dq &= 0,\\
\left(\frac{df}{dx}\right)dx\,dy + \frac{\partial f}{\partial r}\,dr\,dy + \frac{\partial f}{\partial t}\,ds\,dx &= 0.
\end{aligned}
\right.
$$

L'équation (8) est du second degré en $\frac{dy}{dx}$; elle admet donc deux racines $\lambda_1$, $\lambda_2$, auxquelles correspondent *deux systèmes de caractéristiques*. En la divisant par $dy$, on peut donner à l'équation (10′) l'une ou l'autre des deux formes suivantes (pour le système correspondant à la racine $\lambda_1$) :

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{df}{dx}\right)dx + \frac{\partial f}{\partial r}\,dr + \frac{1}{\lambda_1}\,\frac{\partial f}{\partial t}\,ds = 0,\\
&\left(\frac{df}{dx}\right)dx + \frac{\partial f}{\partial r}\,(dr + \lambda_2\,ds) = 0.
\end{aligned}
$$

On a pu remarquer que nous n'avons fait figurer dans le système (12) que la seule équation (10). C'est parce que l'équation (11) n'est pas en réalité indépendante de celle-ci. En effet, en ajoutant la relation (10′) divisée par $dy$ et la relation (11′) divisée par $dx$, on a

$$
(13)\quad
\begin{aligned}
df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}(p\,dx + q\,dy) + \frac{\partial f}{\partial p}(r\,dx + s\,dy)&\\
+ \frac{\partial f}{\partial q}(s\,dx + t\,dy) + \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial s}ds + \frac{\partial f}{\partial t}dt &= 0.
\end{aligned}
$$

En définitive, une multiplicité caractéristique, c'est-à-dire, le système considéré des huit variables défini le long d'une courbe caractéristique, satisfait au système (12) de six équations. La solution dépend donc d'une *fonction arbitraire*.

**3.** Nous avons supposé, pour établir le système (12), que les dérivées $\frac{\partial f}{\partial r}$, $\frac{\partial f}{\partial t}$ étaient différentes de zéro.

Si $\frac{\partial f}{\partial r}$ et $\frac{\partial f}{\partial s}$ sont différentes de zéro, $\frac{\partial f}{\partial t}$ étant nulle, en prenant les déterminants convenables déduits du tableau des coefficients des équations (3), (4), (5), (6) et (7), on obtient immédiatement les équations des deux systèmes de caractéristiques, l'équation (8) se décomposant en

$$dy = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial r}dy - \frac{\partial f}{\partial s}dx = 0.$$

Équations du premier système :

$$(14) \qquad \begin{cases} f = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial r}dy - \frac{\partial f}{\partial s}dx = 0, \\ p\,dx + q\,dy - dz = 0, \\ r\,dx + s\,dy - dp = 0, \\ s\,dx + t\,dy - dq = 0, \\ \left(\frac{df}{dx}\right)dx + \frac{\partial f}{\partial r}dr = 0. \end{cases}$$

Équations du deuxième système :

$$(15) \qquad \begin{cases} f = 0, \\ dy = 0, \\ p\,dx - dz = 0, \\ r\,dx - dp = 0, \\ s\,dx - dq = 0, \\ \left(\frac{df}{dx}\right)dx + \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial s}ds = 0. \end{cases}$$

Comme dans le cas général, on peut remplacer la dernière équation (14) par

$$\left(\frac{df}{dy}\right)dx + \frac{\partial f}{\partial r}ds = 0$$

et la dernière équation (15) par

$$\left(\frac{df}{dy}\right)dx + \frac{\partial f}{\partial r}ds + \frac{\partial f}{\partial s}dt = 0.$$

Si $\frac{\partial f}{\partial r}$ et $\frac{\partial f}{\partial t}$ sont simultanément nulles, l'équation (3) se décompose en $dx = 0$, $dy = 0$, et l'on obtient les équations suivantes pour les deux systèmes de caractéristiques :

Premier système :

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} f &= 0,\\ dx &= 0,\\ q\,dy - dz &= 0,\\ s\,dy - dp &= 0,\\ t\,dy - dq &= 0,\\ \left(\frac{df}{dx}\right) dy + \frac{\partial f}{\partial s}\,dr &= 0; \end{aligned}\right.$$

Deuxième système :

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} f &= 0,\\ dy &= 0,\\ p\,dx - dz &= 0,\\ r\,dx - dp &= 0,\\ s\,dx - dp &= 0,\\ \left(\frac{df}{dx}\right) dx + \frac{\partial f}{\partial s}\,ds &= 0; \end{aligned}\right.$$

les dernières équations (16) et (17) pouvant être remplacées respectivement par

$$\left(\frac{df}{dy}\right) dy + \frac{\partial f}{\partial s}\,ds = 0 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{df}{dy}\right) dx + \frac{\partial f}{\partial s}\,dt = 0.$$

### II. — Caractéristiques du premier ordre [1].

**4.** Pour certains types d'équations, il se peut que les trois premières équations (12), compte tenu des deux dernières, se réduisent au premier ordre, c'est-à-dire ne dépendent que de $x$, $y$, $z$, $p$, $q$ et de leurs différentielles. De telles équations admettent des caractéristiques du premier ordre. Dans ce cas, l'indétermination pour les dérivées du troisième ordre, vue au paragraphe précédent, se rencontre dès le second ordre.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation $f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ admette des caractéristiques du premier

(1) Elles sont connues de ceux qui s'intéressent à l'intégration graphique des équations du type hyperbolique, sous le nom de caractéristiques du second ordre de Monge.

ordre est donc que le système

$$(18)\qquad \begin{cases} f = 0, \\ r\,dx + s\,dy - dp = 0, \\ s\,dx + t\,dy - dq = 0, \end{cases}$$

où l'on considère $r$, $s$, $t$ comme inconnues, soit indéterminé.

Tirant, par exemple, $r$ et $t$ des deux dernières équations et portant ces valeurs dans la première, celle-ci doit se réduire à une identité. En considérant $r$, $s$, $t$ comme des coordonnées courantes, on obtient facilement une interprétation géométrique de ce résultat. Les deux dernières équations (18) représentent une droite parallèle à une génératrice du cône d'équation

$$(19)\qquad rt - s^2 = 0.$$

D'où les différents cas possibles

1° L'équation (1) représente un plan, dont nous écrirons l'équation

$$(20)\qquad r + (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1\lambda_2 t + M = 0,$$

où $\lambda_1$, $\lambda_2$, M sont des fonctions de $x$, $y$, $z$, $p$, $q$.

L'équation (8) s'écrit

$$(21)\qquad dy^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\,dx\,dy + \lambda_1\lambda_2\,dx^2 = 0.$$

Les deux systèmes de caractéristiques, qui sont du premier ordre, sont donc définis par

$$dy - \lambda_1\,dx = 0, \qquad dy - \lambda_2\,dx = 0.$$

Pour former les équations de ces deux systèmes, il suffit d'écrire que les trois plans

$$\begin{aligned} r + (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1\lambda_2 t + M &= 0, \\ dp - r\,dx - s\,dy &= 0, \\ dq - s\,dx - t\,dy &= 0 \end{aligned}$$

forment un faisceau linéaire, c'est-à-dire que les deux déterminants suivants sont nuls

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1\lambda_2 \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui redonne l'équation (21), et

$$\begin{vmatrix} -M & \lambda_1+\lambda_2 & \lambda_1\lambda_2 \\ dp & dy & 0 \\ dq & dx & dy \end{vmatrix} = 0,$$

qui s'écrit

$$-M\,dy^2 + \lambda_1\lambda_2\,dp\,dx - (\lambda_1+\lambda_2)\,dp\,dy - \lambda_1\lambda_2\,dq\,dy = 0.$$

En remplaçant $dy$ successivement par $\lambda_1\,dx$ et $\lambda_2\,dx$, on obtient les équations des deux systèmes :

Premier système :

$$(22)\qquad \begin{cases} dy - \lambda_1\,dx = 0, \\ dp + \lambda_2\,dq + M\,dx = 0, \\ dz - p\,dx - q\,dy = 0; \end{cases}$$

Deuxième système :

$$(22')\qquad \begin{cases} dy - \lambda_2\,dx = 0, \\ dp + \lambda_1\,dq + M\,dx = 0, \\ dz - p\,dx - q\,dy = 0. \end{cases}$$

2° L'équation (1) représente une quadrique admettant le cône (19) pour cône asymptote. Les deux systèmes de caractéristiques sont du premier ordre. Ces équations sont dites de Monge-Ampère; nous les écrirons sous la forme

$$(23)\qquad (r-A)(t-D)-(s-B)(s-C)=0,$$

A, B, C, D étant des fonctions de $x$, $y$, $z$, $p$, $q$ et où l'on a mis les génératrices rectilignes en évidence.

Pour définir les caractéristiques, il suffit d'écrire que la droite

$$(24)\qquad \begin{cases} dp - r\,dx - s\,dy = 0, \\ dq - s\,dx - t\,dy = 0 \end{cases}$$

est une génératrice de la quadrique (23). En prenant les deux systèmes de génératrices, on obtient les deux systèmes de caractéristiques.

Les génératrices s'écrivent

$$(25)\qquad \begin{cases} r - A = \lambda(s-B), \\ s - C = \lambda(t-D); \end{cases}$$

$$(25')\qquad \begin{cases} r - A = \mu(s-C), \\ s - B = \mu(t-D). \end{cases}$$

En identifiant successivement (25) et (25′) à (24), on obtient

$$
\left\{\begin{aligned} dp &= \mathrm{A}\,dx + \mathrm{B}\,dy,\\ dq &= \mathrm{C}\,dx + \mathrm{D}\,dy,\\ dz &= p\,dx + q\,dy; \end{aligned}\right. \tag{26}
$$

$$
\left\{\begin{aligned} dp &= \mathrm{A}\,dx + \mathrm{C}\,dy,\\ dq &= \mathrm{B}\,dx + \mathrm{D}\,dy,\\ dz &= p\,dx + q\,dy, \end{aligned}\right. \tag{26′}
$$

auxquelles on a adjoint la relation

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

3° L'équation (1) représente une surface développable, admettant le cône (19) pour cône directeur. Les deux systèmes de caractéristiques sont confondus en un seul, qui est du premier ordre.

Soient

$$
\left\{\begin{aligned} r + 2ms + t\varphi(m, x, y, z, p, q) + \psi(m, x, y, z, p, q) &= 0,\\ 2s + t\frac{\partial\varphi}{\partial m} + \frac{\partial\psi}{\partial m} &= 0, \end{aligned}\right. \tag{27}
$$

les équations des génératrices de la surface développable. En identifiant ces équations avec (24), on trouve que $\varphi$ doit vérifier l'équation

$$
\left(\frac{\partial\varphi}{\partial m}\right)^2 - 4m\frac{\partial\varphi}{\partial m} + 4\varphi = 0. \tag{28}
$$

C'est une équation de Clairaut, dont la seule solution non linéaire est $\varphi = m^2$.

Les équations (27) prennent alors la forme

$$
\left\{\begin{aligned} r + 2ms + tm^2 + \psi(m) &= 0,\\ s + tm + \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial m} &= 0 \end{aligned}\right. \tag{29}
$$

et les équations des caractéristiques s'écrivent, en poursuivant l'identification avec (24),

$$
\left\{\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= m,\\ \frac{dp}{dx} + \psi - \frac{1}{2}m\frac{\partial\psi}{\partial m} &= 0,\\ \frac{dq}{dx} + \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial m} &= 0, \end{aligned}\right. \tag{30}
$$

auxquelles on adjoint

$$\frac{dz}{dx} = p + qm.$$

*Remarque.* — En écrivant, comme d'habitude, que le déterminant fonctionnel $\frac{D(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4)}{D(r, s, t, m)}$ est nul, où l'on a posé

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= r + 2sm + tm^2 + \psi, \\ \varphi_2 &= s + tm + \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial m}, \\ \varphi_3 &= r\,dx + s\,dy - dp, \\ \varphi_4 &= s\,dx + t\,dy - dq, \end{aligned}$$

on retrouve pour l'équation des caractéristiques : $(dy - m\,dx)^2 = 0$, ce qui montre que les caractéristiques sont confondues.

4° L'équation (1) représente une surface réglée, admettant le cône (19) pour cône directeur. Un des systèmes de caractéristiques est du premier ordre, l'autre est du second ordre. Pour obtenir les équations des caractéristiques du premier ordre, on écrit que la droite (24) est une génératrice de la surface.

5° L'équation (1) est quelconque. Les deux systèmes de caractéristiques sont du second ordre.

*Remarque.* — Toutes ces formes se conservant par des transformations de contact, il est possible de trouver dans chaque cas, des formes réduites; ainsi pour les équations de Monge-Ampère, on peut annuler un des quatre coefficients A, B, C, D.

5. Il nous reste à étudier le cas où les deux systèmes de caractéristiques sont confondus, c'est-à-dire où l'équation (1) est telle que la relation

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2 - 4\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{31}$$

soit vérifiée.

Cette équation est une équation aux dérivées partielles du premier ordre, qui exprime que (1) est l'équation d'une surface développable, dont le plan tangent reste parallèle au plan tangent du cône (19). Le système unique de caractéristiques est donc du premier ordre, puisque les génératrices sont parallèles à celles du cône (19). On retrouve donc le 3° du numéro précédent.

6. Nous avons défini les caractéristiques du premier ordre, comme les courbes le long desquelles une dérivée du second ordre est indéterminée. De cette définition résulte que *par toute caractéristique du premier ordre, il passe une infinité de caractéristiques du second ordre.*

En effet, les éléments du second ordre sont déterminés par les trois dernières équations (12). Si l'on élimine deux des trois dérivées du second ordre, il reste une équation différentielle du premier ordre pour déterminer la troisième, le coefficient de la différentielle étant différent de zéro, si la relation (31) n'est pas vérifiée, c'est-à-dire si les caractéristiques sont distinctes. Ainsi donc, puisqu'une des dérivées du second ordre est déterminée par une équation différentielle du premier ordre, il y a une infinité de solutions dépendant d'une constante arbitraire, ce qui démontre la proposition.

Soient en effet les trois équations

$$(32)\qquad \begin{cases} r\,dx + s\,dy - dp = 0, \\ s\,dx + t\,dy - dq = 0, \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) dx\,dy + \dfrac{\partial f}{\partial r}\,dy\,dr + \dfrac{\partial f}{\partial t}\,dx\,ds = 0. \end{cases}$$

Tirons par exemple $r$ de la première et $t$ de la seconde

$$r = \frac{dp - s\,dy}{dx}, \qquad t = \frac{dq - s\,dx}{dy}.$$

La troisième équation devient

$$(33)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial r}\,dx\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,p\,dx\,dy + \frac{\partial f}{\partial p}(dp - s\,dy)\,dy + \frac{\partial f}{\partial q}\,s\,dx\,dy \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial r}\,dy\left[\frac{d^2p - s\,d^2y - ds\,dy}{dx} - \frac{(dp - s\,dy)\,d^2x}{(dx)^2}\right] + \frac{\partial f}{\partial t}\,dx\,ds = 0, \end{aligned}$$

dans laquelle $x$, $y$, $z$, $p$, $q$ sont exprimés en fonction d'un paramètre $\theta$ qui définit la courbe.

Le coefficient de $ds$ est

$$-\frac{\partial f}{\partial r}\,\frac{(dy)^2}{dx} + \frac{\partial f}{\partial t}\,dx.$$

Il n'est nul que si $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial t}}{\dfrac{\partial f}{\partial r}}$. En portant cette valeur dans l'équation (8), il vient

$$2\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial s}\sqrt{\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial f}{\partial r}}} = 0,$$

expression qui, rendue rationnelle, n'est autre que l'équation (31). On retrouve bien ainsi les résultats annoncés.

7. Si l'équation (31) est vérifiée, l'équation (33) n'est plus une équation différentielle et elle n'admet plus une infinité de solutions. Le théorème précédent est donc en défaut.

Exceptionnellement, il se pourra que l'équation (33) soit identiquement vérifiée; là encore, la caractéristique du premier ordre sera contenue dans une infinité de caractéristiques du second ordre, dépendant, cette fois, d'une fonction arbitraire : la valeur d'une des trois dérivées secondes.

### III. — Caractéristiques d'ordre supérieur.

8. On peut considérer les valeurs prises par les dérivées d'ordre $n$, le long d'une caractéristique. Les équations de cette caractéristique s'établissent comme plus haut.

Par exemple, au troisième ordre, nous considérons les trois dérivées secondes de l'équation (1)

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d^2 f}{dx^2} &= \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial^4 z}{\partial x^3\,\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\,\partial y^2} = 0,\\
\frac{d^2 f}{dx\,dy} &= \left(\frac{d^2 f}{dx\,dy}\right) + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^4 z}{\partial x^3\,\partial y} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial^4 z}{\partial x\,\partial y^3} = 0,\\
\frac{d^2 f}{dy^2} &= \left(\frac{d^2 f}{dy^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial^4 z}{\partial x\,\partial y^3} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0.
\end{aligned}\right.$$

D'autre part, en écrivant les différentielles totales des quatre dérivées du troisième ordre, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
d\mathrm{A} &= \frac{\partial^4 z}{\partial x^4}\,dx + \frac{\partial^4 z}{\partial x^3\,\partial y}\,dy,\\
d\mathrm{B} &= \frac{\partial^4 z}{\partial x^3\,\partial y}\,dx + \frac{\partial^4 z}{\partial x^2\,\partial y^2}\,dy,\\
d\mathrm{C} &= \frac{\partial^4 z}{\partial x^2\,\partial y^2}\,dx + \frac{\partial^4 z}{\partial x\,\partial y^3}\,dy,\\
d\mathrm{D} &= \frac{\partial^4 z}{\partial x\,\partial y^3}\,dx + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\,dy.
\end{aligned}$$

Les relations (34) prennent alors la forme suivante :

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{dA}{dx} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{dB}{dy} = 0, \\ &\left(\frac{d^2 f}{dx\,dy}\right) + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{dB}{dx} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{dC}{dy} = 0, \\ &\left(\frac{d^2 f}{dy^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{dC}{dx} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{dD}{dy} = 0. \end{aligned}\right.$$

Les équations (5), (6), (7), (12) et (35) sont les équations des caractéristiques du troisième ordre. Ces douze équations entre les douze variables $x$, $y$, $z$, $p$, $q$, $r$, $s$, $t$, A, B, C, D se réduisent en réalité à dix par un calcul analogue à celui du n° 2. De la même manière, à l'ordre $n$, on obtient toujours deux relations de moins que de variables.

En définitive, *si les caractéristiques sont distinctes*, par une caractéristique d'ordre $n$, il passe une infinité de caractéristiques d'ordre $n+1$, dépendant d'une constante arbitraire.

**9.** De l'indétermination précédente, il résulte que par une caractéristique, il passe une infinité de surfaces intégrales, dépendant d'une fonction arbitraire : la valeur à laquelle elles se réduisent en un point de la caractéristique [8].

De même, par deux caractéristiques appartenant à chacun des deux systèmes et ayant un élément commun, il passe une surface intégrale unique.

Dans le cas des équations de Monge-Ampère, le théorème précédent s'applique, bien entendu, aux caractéristiques du premier ordre.

## B. — Invariants et involutions.

### I. — Intégrales intermédiaires.

**10.** La méthode générale de résolution des équations (1) consiste à chercher à intégrer le système différentiel (12). Si l'on opère sur les trois premières équations seulement, on obtient, quand la méthode réussit, une intégrale

$$(36)\qquad V(x, y, z, p, q) = 0$$

que l'on appelle *intégrale intermédiaire*.

Ces intégrales intermédiaires ne sont autres que ce que nous appellerons des *invariants du premier ordre*, l'ordre des dérivées qui y figurent indiquant l'ordre de l'invariant. Nous aurons affaire à un invariant proprement dit si les relations sont vérifiées sans tenir compte de l'équation (36), à une *involution* dans le cas contraire [1].

**11.** Inversement, cherchons s'il existe une relation (36), dont toutes les intégrales appartiennent à l'équation (1).

Les caractéristiques de l'équation (36) doivent être caractéristiques de l'équation (1), qui, par conséquent, admet des caractéristiques du premier ordre. L'équation (1) doit donc être très particulière (*voir* plus haut, A, § II).

Les caractéristiques de l'équation (36) sont définies par

$$\frac{dx}{\frac{\partial V}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial V}{\partial q}} = \frac{-dp}{\frac{\partial V}{\partial x}+p\frac{\partial V}{\partial z}} = \frac{-dq}{\frac{\partial V}{\partial y}+q\frac{\partial V}{\partial z}}. \tag{37}$$

Pour définir la fonction V, on remplacera donc, dans les équations (12), $dx$, $dy$, $dp$, $dq$ par $\frac{\partial V}{\partial p}$, $\frac{\partial V}{\partial q}$, $-\left(\frac{\partial V}{\partial x}+p\frac{\partial V}{\partial z}\right)$, $-\left(\frac{\partial V}{\partial y}+q\frac{\partial V}{\partial z}\right)$ respectivement. V satisfait donc à un système d'équations simultanées du premier ordre.

L'équation (1) admettant ici des caractéristiques du premier ordre, les équations de celles-ci sont formées de deux relations linéaires et homogènes en $dx$, $dy$, $dp$, $dq$. Si ces deux relations, où l'on a remplacé $dx$, $dy$, $dp$, $dq$ par $\frac{\partial V}{\partial p}$, $\frac{\partial V}{\partial q}$, $-\left(\frac{\partial V}{\partial x}+p\frac{\partial V}{\partial z}\right)$, $-\left(\frac{\partial V}{\partial y}+q\frac{\partial V}{\partial z}\right)$, forment un système en involution, la solution dépend de deux constantes arbitraires

$$V(x, y, z, p, q, C_1, C_2) = 0 \tag{38}$$

et l'on en déduit l'intégrale générale en posant

$$C_2 = \varphi(C_1). \tag{39}$$

---

[1] Le mot d'involution sert à désigner le cas où la solution du système présente le plus haut degré de généralité.

$V(x, y, z, p, q, C_1, C_2)$ vérifie aussi

$$\frac{\partial V}{\partial C_1} + \frac{\partial V}{\partial C_2}\varphi' = 0. \tag{40}$$

En éliminant $C_1$ et $C_2$ entre (38), (39) et (40), on obtient l'intégrale générale. Ces trois équations donnent aussi la solution du problème de Cauchy. Il est possible, dans ce cas, de préciser la forme de l'équation (1), qui jouit de cette propriété [7, *b*].

Il se peut que la fonction V ne dépende que d'une constante arbitraire ou même d'aucune; c'est alors une « involution », les équations en $\frac{\partial V}{\partial p}$, $\frac{\partial V}{\partial q}$, $-\left(\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}\right)$, $-\left(\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}\right)$, n'étant vérifiées qu'en tenant compte de $V = 0$.

## II. — Invariants et involutions du second ordre et d'ordre supérieur.

**12.** Étant donnée une équation

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \tag{1}$$

cherchons à quelles conditions une deuxième équation

$$\varphi(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \tag{41}$$

peut avoir des intégrales communes avec la première.

Différentions ces deux équations, en désignant par A, B, C, D les dérivées du troisième ordre :

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}p + \frac{\partial f}{\partial p}r + \frac{\partial f}{\partial q}s + \frac{\partial f}{\partial r}A + \frac{\partial f}{\partial s}B + \frac{\partial f}{\partial t}C = 0,\\
&\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}q + \frac{\partial f}{\partial p}s + \frac{\partial f}{\partial q}t + \frac{\partial f}{\partial r}B + \frac{\partial f}{\partial s}C + \frac{\partial f}{\partial t}D = 0,\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}p + \frac{\partial \varphi}{\partial p}r + \frac{\partial \varphi}{\partial q}s + \frac{\partial \varphi}{\partial r}A + \frac{\partial \varphi}{\partial s}B + \frac{\partial \varphi}{\partial t}C = 0,\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}q + \frac{\partial \varphi}{\partial p}s + \frac{\partial \varphi}{\partial q}t + \frac{\partial \varphi}{\partial r}B + \frac{\partial \varphi}{\partial s}C + \frac{\partial \varphi}{\partial t}D = 0.
\end{aligned}\right. \tag{42}$$

On a donc un système de quatre équations linéaires aux quatre inconnues A, B, C, D. Si l'on veut que les équations (1) et (41) aient des intégrales communes, il est nécessaire que le système précédent soit indéterminé.

D'où la première condition

$$(43)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} & \frac{\partial f}{\partial s} & \frac{\partial f}{\partial t} & 0 \\ 0 & \frac{\partial f}{\partial r} & \frac{\partial f}{\partial s} & \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} & \frac{\partial \varphi}{\partial s} & \frac{\partial \varphi}{\partial t} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial r} & \frac{\partial \varphi}{\partial s} & \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{vmatrix} = 0$$

et, reprenant les notations,

$$\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}p + \frac{\partial}{\partial p}r + \frac{\partial}{\partial q}s,$$

$$\left(\frac{d}{dy}\right) = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}q + \frac{\partial}{\partial p}s + \frac{\partial}{\partial q}t,$$

la deuxième

$$(44)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} & \left(\frac{df}{dx}\right) & \frac{\partial f}{\partial t} & 0 \\ 0 & \left(\frac{df}{dy}\right) & \frac{\partial f}{\partial s} & \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} & \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) & \frac{\partial \varphi}{\partial t} & 0 \\ 0 & \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) & \frac{\partial \varphi}{\partial s} & \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation (43) exprime que les équations différentielles des caractéristiques des deux équations ont une racine commune. Donc, en chaque point, il faut que les deux équations aient une direction de caractéristique commune.

En développant l'équation (44), on l'écrira

$$(44')\qquad \frac{D(f,\varphi)}{D(s,t)}\left[\left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\frac{\partial f}{\partial r}\right] + \frac{D(f,\varphi)}{D(r,t)}\left[\left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\frac{\partial f}{\partial t}\right] = 0.$$

Ces conditions (43) et (44), qui sont nécessaires, sont évidemment suffisantes.

Si ces conditions sont vérifiées, sans tenir compte de l'équation (41), on peut remplacer celle-ci par

$$(41')\qquad \varphi(x, y, z, p, q, r, s, t) = C$$

et l'on a alors affaire à un *invariant*.

Si, au contraire, les conditions (43) et (44) ne sont vérifiées qu'en tenant compte de l'équation (41) : $\varphi = 0$, $\varphi$ est alors uue involution.

**13.** On retrouve pour la caractéristique commune aux deux équations (1) et (41), les propriétés des caractéristiques que nous avons établies au chapitre I (§I) pour une seule équation, puisque nous retrouvons la propriété qui nous a servi de définition : l'indétermination des dérivées du troisième ordre.

On obtient les équations différentielles de la caractéristique commune, comme on a obtenu le système (12), en remplaçant l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial r} dy^2 - \frac{\partial f}{\partial s} dx\, dy + \frac{\partial f}{\partial t} dx^2 = 0$$

par

$$dy - \lambda\, dx = 0,$$

$\lambda$ étant la racine commune à cette équation et à l'équation analogue

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} dy^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial s} dx\, dy + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx^2 = 0,$$

la dernière équation du système (12) étant remplacée par (44).

On a ainsi un système de sept équations à huit variables :

$$(45)\quad \left\{\begin{array}{r} f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \\ \varphi(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \\ dy - \lambda\, dx = 0, \\ p\, dx + q\, dy - dz = 0, \\ r\, dx + s\, dy - dp = 0, \\ s\, dx + t\, dy - dq = 0, \\ \dfrac{D(f, \varphi)}{D(s, t)} \left[\left(\dfrac{df}{dx}\right)\dfrac{\partial \varphi}{\partial r} - \left(\dfrac{d\varphi}{dx}\right)\dfrac{\partial f}{\partial r}\right] + \dfrac{D(f, \varphi)}{D(r, t)} \left[\left(\dfrac{df}{dy}\right)\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} - \left(\dfrac{d\varphi}{dy}\right)\dfrac{\partial f}{\partial t}\right] = 0 \end{array}\right.$$

pour définir les caractéristiques.

Les intégrales singulières sont définies, si elles existent, par les relations

$$\frac{D(f, \varphi)}{D(r, s)} = 0, \qquad \frac{D(f, \varphi)}{D(s, t)} = 0, \qquad \frac{D(f, \varphi)}{D(t, r)} = 0.$$

Si ces relations sont vérifiées, les raisonnements du numéro précédent sont en défaut et ces intégrales doivent être cherchées dans chaque cas particulier.

**14.** D'une façon analogue, en écrivant les équations des caractéristiques d'ordre $n$ et les équations déduites par différentiation de

$$(46) \qquad \varphi\left(x, y, z, p, q, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right) = 0,$$

on doit obtenir un système indéterminé par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé. La relation (46) est alors en involution avec l'équation (1). Suivant que $\varphi$ vérifie les équations de l'un ou de l'autre système de caractéristiques, on dira qu'il est relatif à l'un ou l'autre de ces systèmes. Si nous obtenons une solution sans tenir compte de l'équation (46), $\varphi$ sera un *invariant*. Ce sera une *involution* dans le cas contraire.

## CHAPITRE II.

### Intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par l'usage explicite des caractéristiques d'Ampère.

### I. — La Méthode d'Ampère.

**15.** Nous rappellerons brièvement, telle qu'elle se trouve exposée dans les Ouvrages classiques [7 c], la méthode d'Ampère.

Supposons l'intégrale générale de l'équation

$$(1) \qquad f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

écrite sous la forme

$$(2) \quad \begin{cases} x = f_1[\alpha, \beta; \varphi(\alpha), \psi(\beta); \varphi'(\alpha), \psi'(\beta); \ldots; \varphi^{(p)}(\alpha), \ldots, \psi^{(q)}(\beta)], \\ y = f_2[\alpha, \beta; \varphi(\alpha), \psi(\beta); \varphi'(\alpha), \psi'(\beta); \ldots; \varphi^{(p')}(\alpha), \ldots, \psi^{(q')}(\beta)], \\ z = f_3[\alpha, \beta; \varphi(\alpha), \psi(\beta); \varphi'(\alpha), \psi'(\beta); \ldots; \varphi^{(p'')}(\alpha), \ldots, \psi^{(q'')}(\beta)]. \end{cases}$$

D'après Ampère, l'équation sera *de première classe*, si les formules (2) représentent l'intégrale générale de l'équation (1), les fonctions $\varphi$ et $\psi$ étant arbitraires.

La remarque fondamentale d'Ampère est la suivante : si l'on donne à $\varphi$ et $\psi$ des formes particulières, *la surface intégrale ainsi définie admet comme courbes caractéristiques, les deux familles de courbes* $\alpha =$ const., $\beta =$ const.

En effet, considérons deux surfaces S et S' correspondant à la même fonction $\psi$ et à deux fonctions $\varphi$ et $\Phi$ telles que $p$ et $q$ aient la même valeur pour les deux surfaces. Les deux surfaces S et S′ sont donc tangentes tout le long d'une courbe $\alpha = \alpha_0$, ce qui démontre la propriété énoncée.

16. De ce qui précède, Ampère déduit une méthode d'intégration qui n'est pas, au fond, différente de la méthode classique par intégration des équations des caractéristiques. Il prend comme variables indépendantes, non plus $x$ et $y$, mais $x$ et $\alpha$.

De

$$\begin{aligned} dz &= p\,dx + q\,dy, \\ dp &= r\,dx + s\,dy, \\ dq &= s\,dx + t\,dy, \end{aligned}$$

on déduit, avec les nouvelles variables

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p + q\frac{\partial y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \alpha} = q\frac{\partial y}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = r + s\frac{\partial y}{\partial x},$$
$$\frac{\partial q}{\partial x} = s + t\frac{\partial y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial q}{\partial \alpha} = s\frac{\partial y}{\partial \alpha}.$$

Les trois dernières équations donnent $r$, $s$, $t$. En substituant ces valeurs dans l'équation (1), celle-ci devient un polynome en $\dfrac{\frac{\partial q}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}$, qui doit être identiquement nul, puisqu'on peut toujours remplacer $\alpha$ par $\varphi(\alpha)$. Les équations obtenues en annulant les coefficients de ce polynome, ne sont autres que les *équations des caractéristiques du premier ordre*, puisqu'elles expriment que la droite

$$\frac{\partial p}{\partial x} = r + s\frac{\partial y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = s + t\frac{\partial y}{\partial x}$$

(où $r$, $s$, $t$ sont les coordonnées courantes) est située tout entière sur la surface (1).

17. Ampère n'a pas dépassé dans les applications de sa théorie, le cas des intégrales de première classe. S'il a su pousser très loin l'étude des équations de Monge-Ampère et leur appliquer, en particulier, avec succès la transformation de contact qui porte son nom, il n'a pas abordé dans les applications de sa théorie générale, le cas des équations admettant des caractéristiques du second ordre. Mais,

dans certains cas, il a su utiliser les variables caractéristiques $\alpha$ et $\beta$ et non plus $x$ et $\alpha$ : « Lorsque $\beta$ ne peut être exprimé dans l'intégrale primitive par une fonction déterminée de $x$ et $\alpha$, il faut prendre $\alpha$ et $\beta$ pour variables indépendantes » [5].

Il s'est parfaitement rendu compte de la puissance de sa méthode à une époque où la recherche des intégrales intermédiaires était pour ainsi dire, le seul procédé d'intégration des équations du second ordre : « La méthode que j'emploie pour déduire les intégrales primitives d'un très grand nombre d'équations privées d'intégrales intermédiaires, est loin d'être aussi générale qu'on pourrait le désirer; mais c'est du moins, un premier pas dans un genre de recherches que je ne crois pas avoir été tenté et qui me paraît promettre de conduire un jour à des résultats d'une toute autre importance que ceux que j'en ai déduits jusqu'à présent » [5].

18. Les considérations qui précèdent, permettent de retrouver la distinction fondamentale entre caractéristiques du premier et du second ordre : Si les dérivées du second ordre, calculées à partir des formules (2), différentiées par rapport à $\alpha$ et $\beta$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha} = p\frac{\partial x}{\partial \alpha} + q\frac{\partial y}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \beta} = p\frac{\partial x}{\partial \beta} + q\frac{\partial y}{\partial \beta}\right.$$

donnent $p$ et $q$; puis on calcule

$$\left.\frac{\partial p}{\partial \alpha} = r\frac{\partial x}{\partial \alpha} + s\frac{\partial y}{\partial \alpha}, \qquad \ldots\right).$$

ne contiennent pas de nouvelles dérivées de $\varphi(\alpha)$ et $\psi(\beta)$, les valeurs de $r$, $s$, $t$ sont les mêmes tout le long de la courbe $\alpha = \alpha_0$, pour toutes les surfaces intégrales tangentes à la première. On a donc affaire à une *caractéristique du second ordre.*

Dans le cas contraire, les surfaces intégrales tangentes à la première le long de $\alpha = \alpha_0$, dépendent d'une infinité de constantes arbitraires et l'on a affaire à une *caractéristique du premier ordre.*

19. La méthode de Darboux est, dans un certain sens, la généralisation de celle d'Ampère, en étendant la notion de caractéristique à un ordre quelconque. Elle s'explique également bien, que l'on fasse usage des variables $x$ et $y$ ou des variables $\alpha$ et $\beta$. Dans le cas où un

système de caractéristiques présente au moins une combinaison intégrable : $du = 0$, le long de cette caractéristique, la fonction $u$ reste constante et, profitant de la fonction arbitraire qui détermine $\alpha$, on peut poser $u = \alpha$.

La méthode de Darboux réussit, lorsque, pour chaque système de caractéristiques, il existe *deux* combinaisons intégrables $u$ et $v$, la deuxième est alors une fonction arbitraire de la première : $v = \psi(\alpha)$.

On opérera de même pour le deuxième système de caractéristiques.

### II. — La Méthode de Drach [3].

**20.** Drach écrit le système $(\Sigma)$ des caractéristiques à l'aide des variables $\alpha$ et $\beta$, comme l'avait fait Darboux, mais sans se préoccuper d'abord si l'on peut obtenir des combinaisons intégrables, pour déterminer $\alpha$ et $\beta$ en fonction de $x$ et $y$. C'est, semble-t-il, la généralisation prévue par Ampère à sa méthode.

Le système $(\Sigma)$ s'écrit donc, dans tous les cas où il n'y a pas de caractéristiques du premier ordre (pour ce cas, *voir* plus loin § IV),

$$\left\{\begin{array}{llll}
(3) & \dfrac{\partial y}{\partial\alpha} = \lambda_1 \dfrac{\partial x}{\partial\alpha}, & (3') & \dfrac{\partial y}{\partial\beta} = \lambda_2 \dfrac{\partial x}{\partial\beta}; \\[2ex]
(4) & \dfrac{\partial z}{\partial\alpha} = p\dfrac{\partial x}{\partial\alpha} + q\dfrac{\partial y}{\partial\alpha}, & (4') & \dfrac{\partial z}{\partial\beta} = p\dfrac{\partial x}{\partial\beta} + q\dfrac{\partial y}{\partial\beta}; \\[2ex]
(5) & \dfrac{\partial p}{\partial\alpha} = r\dfrac{\partial x}{\partial\alpha} + s\dfrac{\partial y}{\partial\alpha}, & (5') & \dfrac{\partial p}{\partial\beta} = r\dfrac{\partial x}{\partial\beta} + s\dfrac{\partial y}{\partial\beta}; \\[2ex]
(6) & \dfrac{\partial q}{\partial\alpha} = s\dfrac{\partial x}{\partial\alpha} + t\dfrac{\partial y}{\partial\alpha}, & (6') & \dfrac{\partial q}{\partial\beta} = s\dfrac{\partial x}{\partial\beta} + t\dfrac{\partial y}{\partial\beta}; \\[2ex]
(7) & \left(\dfrac{df}{dx}\right)\dfrac{\partial x}{\partial\alpha} + \dfrac{\partial f}{\partial r}\left(\dfrac{\partial r}{\partial\alpha} + \lambda_2\dfrac{\partial s}{\partial\alpha}\right) = 0, & (7') & \left(\dfrac{df}{dx}\right)\dfrac{\partial x}{\partial\beta} + \dfrac{\partial f}{\partial r}\left(\dfrac{\partial r}{\partial\beta} + \lambda_1\dfrac{\partial s}{\partial\beta}\right) = 0;
\end{array}\right.$$

les équations de la dernière ligne pouvant être remplacées par

$$(8) \qquad \left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial x}{\partial\alpha} + \frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{\partial s}{\partial\alpha} + \lambda_2\frac{\partial t}{\partial\alpha}\right) = 0$$

et

$$(8') \qquad \left(\frac{df}{dy}\right)\frac{\partial x}{\partial\beta} + \frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{\partial s}{\partial\beta} + \lambda_1\frac{\partial t}{\partial\beta}\right) = 0$$

par un calcul en tous points analogue à celui du n° **2**.

D'autre part, $\left(\frac{df}{dx}\right)$ et $\left(\frac{df}{dy}\right)$ ont la même signification qu'au chapitre I; $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont les racines de l'équation caractéristique

$$\frac{\partial f}{\partial r}\lambda^2 - \frac{\partial f}{\partial s}\lambda + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \tag{9}$$

Outre l'utilisation systématique des variables $\alpha$ et $\beta$, l'idée fondamentale est d'adjoindre au système $(\Sigma)$ les conditions d'intégrabilité pour $x, y, z, p, q, r, s, t$, l'une de ces dernières pouvant être tirée de l'équation (1).

*Pour* $x$, la question ne se pose pas

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{\partial^2 x}{\partial\beta\,\partial\alpha}.$$

*Pour* $y$, on obtient l'équation

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \left[\frac{d\lambda_2}{d\alpha}\right]\frac{\partial x}{\partial\beta} - \left[\frac{d\lambda_1}{d\beta}\right]\frac{\partial x}{\partial\alpha} = 0, \tag{X}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}
\left[\frac{d}{d\alpha}\right] &= \left(\frac{d}{d\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\alpha},\\
\left(\frac{d}{d\alpha}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial\alpha}\\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_1\frac{\partial}{\partial y} + (p + \lambda_1 q)\frac{\partial}{\partial z} + (r + \lambda_1 s)\frac{\partial}{\partial p} + (s + \lambda_1 t)\frac{\partial}{\partial q}\right]\frac{\partial x}{\partial\alpha}.
\end{aligned}$$

Il conviendra de bien distinguer entre ces deux symboles de « dérivées complètes », le symbole [ ] comprenant les dérivées par rapport à toutes les variables $x, y, z, p, q, r, s, t$, le symbole ( ) ne comprenant pas les dérivations par rapport aux dérivées du second ordre.

*Pour* $z$, nous obtenons

$$\frac{\partial p}{\partial\beta}\frac{\partial x}{\partial\alpha} - \frac{\partial p}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta} + \frac{\partial q}{\partial\beta}\frac{\partial y}{\partial\alpha} - \frac{\partial q}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\beta} = 0$$

ou

$$[(r + \lambda_2 s) - (r + \lambda_1 s) + (s + \lambda_2 t)\lambda_1 - (s + \lambda_1 t)\lambda_2]\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta} = 0,$$

qui est vérifiée identiquement.

*Pour p*, nous obtenons

$$\frac{\partial r}{\partial\beta}\frac{\partial x}{\partial\alpha}-\frac{\partial r}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta}+\lambda_1\frac{\partial s}{\partial\beta}\frac{\partial x}{\partial\alpha}-\lambda_2\frac{\partial s}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta}=0$$

ou

$$\frac{\partial x}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial r}{\partial\beta}+\lambda_1\frac{\partial s}{\partial\beta}\right)-\frac{\partial x}{\partial\beta}\left(\frac{\partial r}{\partial\alpha}+\lambda_2\frac{\partial s}{\partial\alpha}\right)=0$$

ou, en utilisant (7) et (7′),

$$\left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial x}{d\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta}\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial r}}-\left(\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta}\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial r}}=0;$$

la condition est ici encore, identiquement vérifiée.

*Pour q*, le calcul est identique à celui de $p$.

*Pour les dérivées du second ordre*, nous pouvons toujours considérer l'une d'entre elles, $r$ par exemple, comme calculée à l'aide des autres variables dans l'équation (1). D'autre part, d'après les équations (8) et (8′), on peut calculer $\frac{\partial s}{\partial\alpha}$ et $\frac{\partial s}{\partial\beta}$ en fonction de $\frac{\partial t}{\partial\alpha}$ et $\frac{\partial t}{\partial\beta}$. Les dérivées de $t$ par rapport à $\alpha$ et $\beta$ restent alors seules *paramétriques* avec celles de $x$, puisque les dérivées de $y$ se calculent à l'aide des équations (3) et (3′), celles de $z$ à l'aide de (4) et (4′), celles de $p$ à l'aide de (5) et (5′), et celles de $q$ à l'aide de (6) et (6′).

Restent donc comme *éléments paramétriques* : $x$, $y$, $z$, $p$, $q$, deux dérivées du second ordre, $s$ et $t$ par exemple, toutes les dérivées de $x$ et $t$ par rapport à $\alpha$ seul et à $\beta$ seul.

L'équation (X) et celles que l'on en déduit par dérivation, permettent de calculer les dérivées de $x$ par rapport à $\alpha$ *et* $\beta$ en fonction des dérivées paramétriques, c'est-à-dire prises par rapport à $\alpha$ seul ou $\beta$ seul.

Il nous reste à écrire la *condition d'intégrabilité de s* : pour cela, nous dérivons par rapport à $\beta$ et $\alpha$ respectivement, les équations (8) et (8′). Elle s'écrit, en posant

$$F=\frac{\left(\frac{df}{dy}\right)}{\frac{df}{dr}},$$

$$(\mathrm{T})\qquad (\lambda_2-\lambda_1)\frac{\partial^2 t}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\left[\frac{d\lambda_2}{d\beta}\right]\frac{\partial t}{\partial\alpha}-\left[\frac{d\lambda_1}{d\alpha}\right]\frac{\partial t}{\partial\beta}+\left[\frac{dF}{d\beta}\right]\frac{\partial x}{\partial\alpha}-\left[\frac{dF}{d\alpha}\right]\frac{\partial x}{\partial\beta}=0.$$

On peut calculer à partir de cette dernière équation, les dérivées de $t$ par rapport à $\alpha$ *et* $\beta$ comme on a calculé celles de $x$ à partir de l'équation (X).

En définitive, les paramètres sont donc : $x$, $y$, $z$, $p$, $q$, $s$, $t$; $\frac{\partial x}{\partial \alpha}, \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2}, \ldots; \frac{\partial x}{\partial \beta}, \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2}, \ldots; \frac{\partial t}{\partial \alpha}, \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha^2}, \ldots; \frac{\partial t}{\partial \beta}, \frac{\partial^2 t}{\partial \beta^2}, \ldots$. L'ordre de dérivation auquel il convient de s'arrêter, sera déterminé par l'ordre des expressions étudiées.

Le système ($\Omega$) de Drach est formé du système ($\Sigma$) et des équations (X) et (T). Ce système ($\Omega$) est le *système normal* et son étude remplace celle de l'équation (1). Il comprend douze équations pour déterminer les inconnues en fonction des éléments paramétriques $\frac{\partial x}{\partial \alpha}, \frac{\partial x}{\partial \beta}, \frac{\partial t}{\partial \alpha}, \frac{\partial t}{\partial \beta}$, c'est-à-dire de quatre fonctions arbitraires. Le système étant invariant pour tout changement de $\alpha$ en $\varphi(\alpha)$ et de $\beta$ en $\psi(\beta)$, il reste *deux* fonctions arbitraires.

L'étude de l'équation (1) ou du système ($\Omega$) ne sont pas deux problèmes équivalents : on ne peut, en effet, pas déduire de (1) tous les éléments de ($\Omega$), alors que l'inverse est possible. De même, pour les relations d'ordre supérieur, la dérivation de (1) ajoute *deux* dérivées nouvelles, alors que celle de ($\Omega$) en ajoute *quatre*, cette circonstance provenant de l'invariance de ($\Omega$) pour le changement de $\alpha$ en $f(\alpha)$ ou de $\beta$ en $g(\beta)$.

### III. — Invariants et involutions.

**21.** Comme dans la théorie classique, nous chercherons à déterminer des invariants pour l'une ou l'autre caractéristique, c'est-à-dire des relations

$$(10)\quad \Phi\Big(x, y, z, p, q, s, t; \frac{\partial x}{\partial \alpha}, \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2}, \ldots, \frac{\partial^n x}{\partial \alpha^n}, \frac{\partial x}{\partial \beta}, \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2}, \ldots, \frac{\partial^n x}{\partial \beta^n}; \frac{\partial t}{\partial \alpha}, \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha^2}, \ldots, \frac{\partial^p t}{\partial \alpha^p}; \frac{\partial t}{\partial \beta}, \frac{\partial^2 t}{\partial \beta^2}, \ldots, \frac{\partial^p t}{\partial \beta^p}\Big) = \varphi(\alpha)$$

qui soient compatibles avec le système ($\Omega$).

Montrons d'abord qu'un invariant $\Phi$, relatif à la caractéristique $\alpha$, ne dépend pas des dérivées $\frac{\partial x}{\partial \beta}, \ldots, \frac{\partial t}{\partial \beta}, \ldots$, par rapport à $\beta$.

En dérivant par rapport à $\beta$, on déduit de la relation (10)

$$(11)\qquad \left[\frac{d\Phi}{d\beta}\right]=\left[\frac{d\Phi}{dx}\right]\frac{\partial x}{\partial\beta}+\left[\frac{d\Phi}{dy}\right]\lambda_2\frac{\partial x}{\partial\beta}+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial\left(\dfrac{\partial^n x}{\partial\beta^n}\right)}\frac{\partial^{n+1}x}{\partial\beta^{n+1}}+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial\left(\dfrac{\partial^p t}{\partial\beta^p}\right)}\frac{\partial^{p+1}t}{\partial\beta^{p+1}}=0,$$

en désignant par $n$ l'ordre de la dernière dérivée de $x$, et $p$ celle de la dernière dérivée de $t$ par rapport à $\beta$.

L'expression (11) doit être vérifiée, quelles que soient les valeurs des dérivées paramétriques, d'où il résulte que

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\left(\dfrac{\partial^n x}{\partial\beta^n}\right)}=0\qquad\text{et}\qquad\frac{\partial\Phi}{\partial\left(\dfrac{\partial^p t}{\partial\beta^p}\right)}=0.$$

Donc $\Phi$ ne dépend pas de $\frac{\partial^n x}{\partial\beta^n}$, ni de $\frac{\partial^p t}{\partial\beta^p}$. Le raisonnement se répète à l'ordre $n-1$ et $p-1$ ; de proche en proche, on voit que :

*Un invariant relatif à une caractéristique est indépendant des dérivées paramétriques relatives à l'autre.*

$\Phi$ s'écrira donc

$$(10')\qquad \Phi\left(x, y, z, p, q, s, t;\ \frac{\partial x}{\partial\alpha}, \frac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2}, \ldots, \frac{\partial^n x}{\partial\alpha^n};\ \frac{\partial t}{\partial\alpha}, \frac{\partial^2 t}{\partial\alpha^2}, \ldots, \frac{\partial^n t}{\partial\alpha^n}\right)=\varphi(\alpha).$$

(11) deviendra

$$(11')\qquad \left[\frac{d\Phi}{d\beta}\right]=\left\{\left[\frac{d\Phi}{dx}\right]+\lambda_2\left[\frac{d\Phi}{dy}\right]\right\}\frac{\partial x}{\partial\beta}+\frac{\partial\Phi}{\partial\left(\dfrac{\partial x}{\partial\alpha}\right)}\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial\left(\dfrac{\partial^n x}{\partial\alpha^n}\right)}\frac{\partial^{n+1}x}{\partial\alpha^n\,\partial\beta}+\frac{\partial\Phi}{\partial\left(\dfrac{\partial t}{\partial\alpha}\right)}\frac{\partial^2 t}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial\left(\dfrac{\partial^n t}{\partial\alpha^n}\right)}\frac{\partial^{n+1}t}{\partial\alpha^n\,\partial\beta}+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\lambda_1\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)\frac{\partial t}{\partial\beta}=0.$$

Les dérivées $\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta}, \frac{\partial^3 x}{\partial\alpha^2\,\partial\beta}, \ldots, \frac{\partial^{n+1}x}{\partial\alpha^n\,\partial\beta}$ se calculent à partir de l'équation (X) et sont linéaires et homogènes en $\frac{\partial x}{\partial\beta}$ et $\frac{\partial t}{\partial\beta}$, les coefficients de ces deux termes étant eux-mêmes linéaires en $\frac{\partial^n x}{\partial\alpha^n}$ et $\frac{\partial^n t}{\partial\alpha^n}$.

En effet, l'équation (X) s'explicite de la manière suivante :

$$
\begin{aligned}
(\lambda_2-\lambda_1)\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta}&+\left[\frac{\partial\lambda_2}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial\lambda_2}{\partial y}+(p+q\lambda_1)\frac{\partial\lambda_2}{\partial z}+(r+s\lambda_1)\frac{\partial\lambda_2}{\partial p}\right.\\
&\qquad\left.+(s+t\lambda_1)\frac{\partial\lambda_2}{\partial q}\right]\frac{\partial x}{\partial\alpha}\,\frac{\partial x}{\partial\beta}\\
&-\left[\frac{\partial\lambda_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial\lambda_1}{\partial y}+(p+q\lambda_2)\frac{\partial\lambda_1}{\partial z}+(r+s\lambda_2)\frac{\partial\lambda_1}{\partial p}\right.\\
&\qquad\left.+(s+t\lambda_2)\frac{\partial\lambda_1}{\partial q}\right]\frac{\partial x}{\partial\alpha}\,\frac{\partial x}{\partial\beta}\\
&+\left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial\alpha}\,\frac{\partial x}{\partial\beta}-\frac{\partial\lambda_1}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial\beta}\,\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)\\
&+\left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial s}\,\frac{\partial s}{\partial\alpha}\,\frac{\partial x}{\partial\beta}-\frac{\partial\lambda_1}{\partial s}\,\frac{\partial s}{\partial\beta}\,\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)\\
&+\left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}\,\frac{\partial t}{\partial\alpha}\,\frac{\partial x}{\partial\beta}-\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}\,\frac{\partial t}{\partial\beta}\,\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)=0,
\end{aligned}
$$

où les expressions $\frac{\partial r}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial r}{\partial\beta}$, $\frac{\partial s}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial s}{\partial\beta}$ s'expriment linéairement aussi en $\frac{\partial x}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial t}{\partial\alpha}$ pour les dérivées par rapport à $\alpha$ et en $\frac{\partial x}{\partial\beta}$, $\frac{\partial t}{\partial\beta}$ pour les dérivées par rapport à $\beta$, le calcul se faisant à partir des équations (7), (7′) et (8), (8′).

En définitive,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\left(A\frac{\partial x}{\partial\alpha}+B\frac{\partial t}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial x}{\partial\beta}+C\frac{\partial x}{\partial\alpha}\,\frac{\partial t}{\partial\beta},$$

où A, B, C sont fonctions de $x$, $y$, $z$, $p$, $q$, $r$, $s$, $t$.

En différentiant par rapport à $\alpha$,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^3 x}{\partial\alpha^2\,\partial\beta}=&\left\{A\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2}+B\frac{\partial^2 t}{\partial\alpha^2}+\left[\frac{dA}{d\alpha}\right]\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\left[\frac{dB}{d\alpha}\right]\frac{\partial t}{\partial\alpha}+\left(A\frac{\partial x}{\partial\alpha}+B\frac{\partial t}{\partial\alpha}\right)^2\right\}\frac{\partial x}{\partial\beta}\\
&+C\left(A\frac{\partial x}{\partial\alpha}+B\frac{\partial t}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial x}{\partial\alpha}\,\frac{\partial t}{\partial\beta}+C\frac{\partial x}{\partial\alpha}\,\frac{\partial^2 t}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\left[\frac{dC}{d\alpha}\right]\frac{\partial x}{\partial\alpha}\,\frac{\partial t}{\partial\beta}+C\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2}\,\frac{\partial t}{\partial\beta}.
\end{aligned}
$$

Dans cette expression $\left[\frac{dA}{d\alpha}\right]$, $\left[\frac{dB}{d\alpha}\right]$, $\left[\frac{dC}{d\alpha}\right]$ sont elles-mêmes, linéaires et homogènes en $\frac{\partial x}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial t}{\partial\alpha}$. D'autre part, $\frac{\partial^2 t}{\partial\alpha\,\partial\beta}$ se calcule à partir de l'équation (T), comme $\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta}$, à partir de l'équation (X). C'est aussi un polynome linéaire et homogène en $\frac{\partial x}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial t}{\partial\alpha}$, d'une part et en $\frac{\partial x}{\partial\beta}$, $\frac{\partial t}{\partial\beta}$, de l'autre.

Donc $\frac{\partial^3 x}{\partial\alpha^2\,\partial\beta}$ est :

1° Linéaire et homogène en $\frac{\partial x}{\partial\beta}$, $\frac{\partial t}{\partial\beta}$;

2° Les coefficients de $\frac{\partial x}{\partial\beta}$ et $\frac{\partial t}{\partial\beta}$ sont eux-mêmes linéaires en $\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2}$ et $\frac{\partial^2 t}{\partial\alpha^2}$, les autres termes étant également de poids 2, c'est-à-dire formés des termes $\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)^2$, $\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial t}{\partial\alpha}$, $\left(\frac{\partial t}{\partial\alpha}\right)^2$.

Il est bien évident que le calcul que nous venons de détailler pour $\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta}$ et $\frac{\partial^3 x}{\partial\alpha^2\,\partial\beta}$ peut se faire d'une manière en tous points analogue pour $\frac{\partial^4 x}{\partial\alpha^3\,\partial\beta}$, $\dots$, $\frac{\partial^{n+1} x}{\partial\alpha^n\,\partial\beta}$ d'une part, et pour $\frac{\partial^2 t}{\partial\alpha\,\partial\beta}$, $\frac{\partial^3 t}{\partial\alpha^2\,\partial\beta}$, $\dots$, $\frac{\partial^{n+1} t}{\partial\alpha^n\,\partial\beta}$ de l'autre.

L'équation (11) prend donc, en définitive, la forme

$$\left[\frac{d\Phi}{d\beta}\right] = \lambda(\Phi)\frac{\partial x}{\partial\beta} + \mu(\Phi)\frac{\partial t}{\partial\beta} = 0 \tag{12}$$

et doit être vérifiée, quelles que soient les valeurs données aux dérivées paramétriques $\frac{\partial x}{\partial\beta}$, $\frac{\partial t}{\partial\beta}$. Donc (12) est équivalent au système

$$\begin{cases} \lambda(\Phi) = 0, \\ \mu(\Phi) = 0, \end{cases} \tag{13}$$

où $\lambda$ et $\mu$ sont deux équations linéaires aux dérivées partielles en $\Phi$. La discussion de ce système est classique et l'on retrouve le résultat de Darboux, relatif aux invariants d'ordre supérieur.

**22.** On peut supposer $\Phi$ résolu en $\frac{\partial^n x}{\partial\alpha^n}$, dérivée d'ordre le plus élevé qui y figure. De l'invariance de $\Phi$ pour une transformation de $\alpha$ en $f(\alpha)$, où $f$ est arbitraire, il résulte que $\Phi$ est également linéaire en $\frac{\partial^n t}{\partial\alpha^n}$; il résulte aussi que $\Phi$ est *rationnel* par rapport aux dérivées de $x$ et $t$ en $\alpha$, d'ordre inférieur à $n$. $\Phi$ est formé de polynomes invariants *relatifs*, c'est-à-dire multipliés par une même expression quand on effectue la transformation de $\alpha$ en $f(\alpha)$. Ces polynomes sont donc *de même poids* par rapport aux dérivées de $x$ et $t$ en $\alpha$. C'est de là que provient la nécessité d'une notation nouvelle pour les dérivées partielles, tenant compte de la notion de poids ainsi définie.

*Premier ordre :* $\Phi$ est de la forme

$$A\frac{\partial x}{\partial \alpha} + B\frac{\partial t}{\partial \alpha} + C;$$

*Second ordre :*

$$A\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} + B\frac{\partial^2 t}{\partial \alpha^2} + C\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + D\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial t}{\partial \alpha} + E\left(\frac{\partial t}{\partial \alpha}\right)^2 + F\frac{\partial x}{\partial \alpha} + G\frac{\partial t}{\partial \alpha} + H,$$

où les coefficients sont des fonctions de $x$, $y$, $z$, $p$, $q$, $s$, $t$, qui ne sont pas changés par la transformation de $\alpha$ en $f(\alpha)$.

Ainsi donc, les polynomes avec lesquels on forme les invariants $\Phi$ sont invariants *en forme* pour la transformation considérée de $\alpha$ en $f(\alpha)$.

On obtiendra des invariants absolus en considérant des quotients d'invariants relatifs de même poids.

**23.** De même, on peut considérer des involutions

$$(14)\qquad \Psi\left(x, y, z, p, q, s, t; \frac{\partial x}{\partial \alpha}, \ldots, \frac{\partial^n x}{\partial \alpha^n}, \frac{\partial t}{\partial \alpha}, \ldots, \frac{\partial^n t}{\partial \alpha^n}\right) = 0.$$

On démontre comme précédemment, que ces involutions ne doivent contenir que des dérivées par rapport à $\alpha$, si elle sont relatives à la caractéristique $\alpha$, ou des dérivées par rapport à $\beta$, si elles sont relatives à la caractéristique $\beta$.

En écrivant encore $\left[\frac{d\Psi}{d\beta}\right] = 0$, on est amené encore à écrire une équation analogue à (12)

$$(15)\qquad \lambda(\Psi)\frac{\partial x}{\partial \beta} + \mu(\Psi)\frac{\partial t}{\partial \beta} = 0$$

et le système

$$(16)\qquad \begin{cases} \lambda(\Psi) = K\,\Psi, \\ \mu(\Psi) = K'\Psi, \end{cases}$$

qui remplace le système (13), exprime que l'invariance n'est obtenue qu'en tenant compte de (14); c'est, on l'a vu, la définition même des involutions.

De ce que les égalités (14) et (16) sont conservées pour une transformation de $\alpha$ en $f(\alpha)$, on déduit également les propriétés d'isobarie des involutions $\Psi$.

Dans le cas où $\Psi$ ne dépend pas des dérivées paramétriques, $\Psi$ est une *équation en involution* avec l'équation (1) [7, *d*]. Si $\Psi$ ne dépend que de $x$, $y$, $z$, $p$, $q$, il s'agira d'une *intégrale intermédiaire*.

### IV. — Équations admettant des caractéristiques du premier ordre.

**24. Équations de Monge-Ampère.** — Nous écrirons ces équations sous la forme

$$(r-A)(t-D)-(s-B)(s-C)=0, \tag{17}$$

où A, B, C, D sont des fonctions de $x$, $y$, $z$, $p$, $q$; le coefficient de $rt-s^2$ est égal à l'unité, ce que l'on peut toujours supposer, même si l'équation est simplement linéaire en $r$, $s$, $t$, après avoir effectué une transformation de contact. Par le même procédé, on peut d'ailleurs en même temps, annuler un des coefficients A, B, C, D.

D'après la méthode classique (*voir* chap. I, § II), les caractéristiques sont définies par

$$\left\{\begin{aligned} dz &= p\,dx + q\,dy, \\ dp &= A\,dx + B\,dy, \\ dq &= C\,dx + D\,dy; \end{aligned}\right. \tag{18}$$

$$\left\{\begin{aligned} dz &= p\,dx + q\,dy, \\ dp &= A\,dx + C\,dy, \\ dq &= B\,dx + D\,dy. \end{aligned}\right. \tag{18'}$$

En introduisant les variables $\alpha$ et $\beta$, on obtient le système $(\Omega)$

$$(\Omega)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{dz = p\,dx + q\,dy;} \\ \dfrac{\partial p}{\partial\alpha} = A\dfrac{\partial x}{\partial\alpha} + B\dfrac{\partial y}{\partial\alpha}, & \dfrac{\partial p}{\partial\beta} = A\dfrac{\partial x}{\partial\beta} + C\dfrac{\partial y}{\partial\beta}; \\ \dfrac{\partial q}{\partial\alpha} = C\dfrac{\partial x}{\partial\alpha} + D\dfrac{\partial y}{\partial\alpha}, & \dfrac{\partial q}{\partial\beta} = B\dfrac{\partial x}{\partial\beta} + D\dfrac{\partial y}{\partial\beta}. \end{array}\right.$$

Les conditions d'intégrabilité de $p$ et $q$ n'interviennent pas ici dans le système $(\Omega)$, qui est du premier ordre, et servent seulement à calculer les dérivées de $x$ et $y$ par rapport à $\alpha$ *et* $\beta$ en fonction des dérivées de $x$ et $y$ par rapport à $\alpha$ seul ou $\beta$ seul, qui sont ici les éléments paramétriques.

**25. Équations linéaires.** — Dans le cas particulier où ces équations sont simplement linéaires, il est généralement plus simple de traiter le cas directement plutôt que d'effectuer une transformation de contact.

Soit l'équation

$$(19) \qquad r+(\lambda_1+\lambda_2)s+\lambda_1\lambda_2 t+\mathrm{M}=0,$$

où $\lambda_1$, $\lambda_2$, M sont des fonctions de $x, y, z, p, q$.

La théorie classique (*voir* chap. I, § II) permet d'écrire les caractéristiques sous la forme

$$(20) \qquad \begin{cases} dy-\lambda_1\,dx=0, \\ dp+\lambda_2\,dq+\mathrm{M}\,dx=0; \end{cases}$$

$$(20') \qquad \begin{cases} dy-\lambda_2\,dx=0, \\ dp+\lambda_1\,dq+\mathrm{M}\,dx=0. \end{cases}$$

Le système $(\Sigma)$ est donc

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} dz=p\,dx+q\,dy; \\ \dfrac{\partial y}{\partial\alpha}-\lambda_1\dfrac{\partial x}{\partial\alpha}=0, \qquad \dfrac{\partial y}{\partial\beta}+\lambda_2\dfrac{\partial x}{\partial\beta}=0; \\ \dfrac{\partial p}{\partial\alpha}+\lambda_2\dfrac{\partial q}{\partial\alpha}+\mathrm{M}\dfrac{\partial x}{\partial\alpha}=0, \qquad \dfrac{\partial p}{\partial\beta}+\lambda_1\dfrac{\partial q}{\partial\beta}+\mathrm{M}\dfrac{\partial x}{\partial\beta}=0. \end{cases}$$

Ici, on ne peut pas considérer les éléments $\dfrac{\partial y}{\partial\alpha}$, $\dfrac{\partial^2 y}{\partial\alpha^2}$, $\ldots$; $\dfrac{\partial y}{\partial\beta}$, $\dfrac{\partial^2 y}{\partial\beta^2}$, $\ldots$ comme paramétriques; il convient donc, pour former le système $(\Omega)$, d'adjoindre la condition d'intégrabilité de $y$, qui s'écrit

$$(\mathrm{X}) \qquad (\lambda_1-\lambda_2)\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\left[\frac{d\lambda_1}{d\beta}\right]\frac{\partial x}{\partial\alpha}-\left[\frac{d\lambda_2}{d\alpha}\right]\frac{\partial x}{\partial\beta}=0.$$

Le système $(\Omega)$ est donc formé du système $(\Sigma)$ et de l'équation (X). Les éléments paramétriques sont ici $\dfrac{\partial x}{\partial\alpha}$, $\dfrac{\partial^2 x}{\partial\alpha^2}$, $\ldots$; $\dfrac{dx}{d\beta}$, $\dfrac{d^2x}{d\beta^2}$, $\ldots$; $\dfrac{\partial q}{\partial\alpha}$, $\dfrac{\partial^2 q}{\partial\alpha^2}$, $\ldots$, $\dfrac{\partial q}{\partial\beta}$, $\dfrac{\partial^2 q}{\partial\beta^2}$, $\ldots$.

**26. Équations**

$$(21) \qquad \begin{cases} r+sm+\psi-\dfrac{1}{2}m\dfrac{\partial\psi}{\partial m}=0, \\ s+tm+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\psi}{\partial m}=0, \end{cases}$$

où $\psi$ est une fonction de $x, y, z, p, q, m$.

Les deux systèmes de caractéristiques sont ici confondus (*voir* chap. I, § II, n° 4, 3° et n° 5) et définis par

$$dy-m\,dx=0.$$

Le système $(\Omega)$ est ici identique aux équations des caractéristiques, telles qu'on les a vues ci-dessus

$$(\Omega)\qquad \begin{cases} dy = m\,dx, \\ dz = (p+qm)\,dx, \\ dp = \left(\frac{1}{2} m \frac{\partial\psi}{\partial m} - \psi\right) dx, \\ dq = -\frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial m}\,dx. \end{cases}$$

27. **Équations linéaires homogènes et dont les coefficients dépendent de $p$ et $q$ seulement** [1]. — $\alpha$ et $\beta$ s'obtiennent par intégration des équations différentielles ordinaires du premier ordre

$$(22)\qquad \begin{cases} dp + \lambda_2\,dq = M_2\,d\alpha, \\ dp + \lambda_1\,dq = M_1\,d\beta. \end{cases}$$

On peut donc déterminer $p$ et $q$ en $\alpha$ et $\beta$ et, par suite, $\lambda_1$ et $\lambda_2$ à l'aide des mêmes variables. On posera donc

$$(23)\qquad \begin{cases} \lambda_1(p, q) = \mu(\alpha, \beta), \\ \lambda_2(p, q) = \nu(\alpha, \beta). \end{cases}$$

Alors $x$ et $y$ sont données par le système

$$(24)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial \alpha} = \mu\dfrac{\partial x}{\partial \alpha}, \\ \dfrac{dy}{d\beta} = \nu\dfrac{\partial x}{\partial \beta}. \end{cases}$$

L'équation (X) est ici une équation de Laplace. Une équation analogue donne $y$; elle a d'ailleurs les mêmes invariants que l'équation (X).

Inversement, si l'on se donne une équation de Laplace

$$(25)\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta} + A\frac{\partial x}{\partial\alpha} + B\frac{\partial x}{\partial\beta} = 0,$$

$\mu$ et $\nu$ sont déterminés par le système

$$(26)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\mu}{\partial\beta} = (\mu-\nu)A, \\ \dfrac{\partial\nu}{\partial\alpha} = (\mu-\nu)B. \end{cases}$$

(1) On traitera de la même manière le cas où les coefficients dépendent de $x$ et $y$ seulement.

$\mu$ et $\nu$ dépendent donc, elles aussi, d'une équation de Laplace

$$(27)\qquad \frac{\partial^2\mu}{\partial\alpha\,\partial\beta} - A\frac{\partial\mu}{\partial\alpha} + \left(B - \frac{\partial \operatorname{Log} A}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial\mu}{\partial\beta} = 0,$$

$$(27')\qquad \frac{\partial^2\nu}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \left(A + \frac{\partial \operatorname{Log} B}{\partial\beta}\right)\frac{\partial\nu}{\partial\alpha} + B\frac{\partial\nu}{\partial\beta} = 0.$$

Leur intégration introduit deux fonctions arbitraires l'une de $\alpha$ seul et l'autre de $\beta$ seul.

$p$ et $q$ sont déterminés par le système

$$(28)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial\alpha} + \nu\dfrac{\partial q}{\partial\alpha} = 0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial\beta} + \mu\dfrac{\partial q}{\partial\beta} = 0 \end{cases}$$

dont l'intégration introduit deux nouvelles fonctions arbitraires, l'une de $\alpha$ seul, l'autre de $\beta$ seul.

$\lambda_1$ et $\lambda_2$ dépendent donc de quatre fonctions arbitraires et toutes ces équations s'intègrent en même temps qu'une seule équation de Laplace.

28. **Exemple.** — Soit l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima

$$(29)\qquad (\alpha - \beta)\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{\partial x}{\partial\alpha} - \frac{\partial x}{\partial\beta} = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$x = (\alpha - \beta)[\psi'(\beta) - \varphi'(\alpha)] + 2[\psi(\beta) + \varphi(\alpha)].$$

On a alors

$$\mu = -\int \frac{\varphi_0(\alpha)\,d\alpha}{\alpha - \beta} + \psi_0(\beta),$$

$$\nu = (\alpha - \beta)\int \frac{\varphi_0(\alpha)\,d\alpha}{(\alpha - \beta)^2} - \int \frac{\varphi_0(\alpha)\,d\alpha}{\alpha - \beta} + \varphi_0(\beta) - (\alpha - \beta)\psi'_0(\beta).$$

$q$ est donné par l'équation

$$(\mu - \nu)\frac{\partial^2 q}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{\partial\nu}{\partial\beta}\frac{\partial q}{\partial\alpha} + \frac{\partial\mu}{\partial\alpha}\frac{\partial q}{\partial\beta} = 0,$$

puis $p$ par

$$dp = -\nu\frac{\partial q}{\partial\alpha}\,d\alpha - \mu\frac{\partial q}{\partial\beta}\,d\beta.$$

Dans les cas particuliers où on se donne $\varphi_0(\alpha)$ et $\psi_0(\beta)$, on peut aller plus loin. Si, par exemple, $\varphi_0 = 1$, $\psi_0 = 0$, on trouve

$$\mu = -\operatorname{Log}(\alpha - \beta), \qquad \nu = -\operatorname{Log}(\alpha - \beta) - 1,$$

$q$ est donné par

$$(\alpha - \beta)\frac{\partial^2 q}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{\partial q}{\partial\alpha} - \frac{\partial q}{\partial\beta} = 0.$$

C'est une équation d'Euler et Poisson, dont l'intégrale générale est

$$q(\alpha, \beta) = (\alpha - \beta)\psi_1(\beta) + (\alpha - \beta)\int \frac{\varphi_1(\alpha)\,d\alpha}{(\alpha - \beta)^2},$$

où $\varphi_1$ et $\psi_1$ sont arbitraires.

29. **Équation $r = \lambda^2 t$, où $\lambda$ est fonction de $x$ et $y$.** — Le système $(\Omega)$ s'écrit

$$(\Omega)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial\alpha} - \lambda\dfrac{\partial x}{\partial\alpha} = 0, & \dfrac{\partial y}{\partial\beta} + \lambda\dfrac{\partial x}{\partial\beta} = 0; \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial\alpha} + \lambda\dfrac{\partial q}{\partial\alpha} = 0, & \dfrac{\partial p}{\partial\beta} - \lambda\dfrac{\partial q}{\partial\beta} = 0, \end{cases}$$

avec

$$(X)\qquad \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\lambda\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\lambda\frac{\partial x}{\partial\beta}\right) = 0.$$

Les équations de la première ligne s'intègrent et donnent $\alpha$ et $\beta$ en fonction de $x$ et $y$. Si l'on fait l'inversion, on a alors $x$ et $y$ puis $\lambda$ en fonction de $\alpha$ et $\beta$. Nous poserons

$$(30)\qquad \lambda(x, y) = \mu(\alpha, \beta).$$

L'équation (X) est alors une équation de Laplace. On peut la ramener à une équation à invariants égaux, en posant

$$(31)\qquad x = \frac{Z}{\sqrt{\mu}},$$

Z est alors solution de

$$(32)\qquad \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\frac{\partial^2\sqrt{\mu}}{\partial\alpha\,\partial\beta}.$$

Inversement, si l'on connaît deux solutions $\theta$ et $\sqrt{\mu}$ de cette équation, on peut en déduire

$$x = \frac{\theta}{\sqrt{\mu}},$$

puis $y$ par quadratures

$$dy = \mu\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\,d\alpha - \frac{\partial x}{\partial \beta}\,\partial\beta\right),$$

ce qui donne $x$ et $y$ en $\alpha$ et $\beta$; puis on en déduit $\alpha$ et $\beta$ en $x$ et $y$ et $\mu(\alpha, \beta) = \lambda(x, y)$.

On obtient ainsi une équation

$$r = \lambda^2 t,$$

que l'on a intégrée à l'aide de deux solutions de l'équation (32).

*Exemple* :

$$\sqrt{\mu} = \alpha, \qquad \theta = \beta; \qquad x = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad y = -\alpha\beta, \qquad \lambda = -\frac{y}{x}.$$

L'équation est donc $rx^2 = ty^2$, dont l'intégration est élémentaire. On en déduit ensuite

$$q = \frac{\varphi'(\alpha) + \psi'(\beta)}{\alpha},$$
$$p = \alpha(\varphi' - \psi') - 2\varphi,$$
$$z = -2\left(\frac{\beta\varphi}{\alpha} + \psi\right),$$

$\varphi$ et $\psi$ étant des fonctions arbitraires des arguments indiqués.

En revenant aux variables $x$ et $y$, on obtient l'intégrale générale

$$z = x\Phi\left(\frac{y}{x}\right) + \Psi(xy).$$

**30. Équation** $rt - s^2 + \lambda^2 = 0$. — Cette équation n'avait été résolue avant Drach, que dans des cas très particuliers :

$\lambda = a$, constante absolue ;

$\lambda = \dfrac{a}{1 + p^2 + q^2}$, équation des surfaces à courbure totale constante.

Drach a donné une solution qui ramène à une équation de Laplace à invariants égaux l'équation précédente, lorsque $\lambda$ est fonction des quatre arguments $x, y, p, q$.

Le système $(\Omega)$ s'écrit ici

$$(\Omega) \qquad \left\{\begin{array}{l} dz = p\,dx + q\,dy; \\ \dfrac{\partial p}{\partial \alpha} - \lambda\dfrac{\partial y}{\partial \alpha} = 0, \qquad \dfrac{\partial p}{\partial \beta} + \lambda\dfrac{\partial y}{\partial \beta} = 0; \\ \dfrac{\partial q}{\partial \alpha} + \lambda\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} = 0, \qquad \dfrac{\partial q}{\partial \beta} - \lambda\dfrac{\partial x}{\partial \beta} = 0. \end{array}\right.$$

Nous ferons, avec Drach, le changement de variables suivant :

$$x = \frac{\xi}{\zeta}, \qquad y = \frac{\eta}{\zeta}, \qquad p = \xi_1\zeta, \qquad q = \eta_1\zeta, \qquad \lambda = \zeta^2.$$

Le système ($\Omega$) devient

$$(\Omega') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\xi_1\zeta)}{\partial\alpha} = \zeta^2 \dfrac{\partial\left(\dfrac{\eta}{\zeta}\right)}{\partial\alpha}, & \dfrac{\partial(\xi_1\zeta)}{\partial\beta} = -\zeta^2 \dfrac{\partial\left(\dfrac{\eta}{\zeta}\right)}{\partial\beta}; \\[2ex] \dfrac{\partial(\eta_1\zeta)}{\partial\alpha} = -\zeta^2 \dfrac{\partial\left(\dfrac{\xi}{\zeta}\right)}{\partial\alpha}, & \dfrac{\partial(\eta_1\zeta)}{\partial\beta} = \zeta^2 \dfrac{\partial\left(\dfrac{\xi}{\zeta}\right)}{\partial\beta}, \end{cases}$$

auquel nous ajouterons les conditions d'intégrabilité pour les quatre fonctions : $\frac{\xi}{\zeta}$, $\frac{\eta}{\zeta}$, $\xi_1\zeta$, $\eta_1\zeta$.

1° *Condition pour* $\xi_1\zeta$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\zeta^2 \frac{\partial\left(\frac{\eta}{\zeta}\right)}{\partial\alpha}\right] + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\zeta^2 \frac{\partial\left(\frac{\eta}{\zeta}\right)}{\partial\beta}\right] = 0.$$

Elle s'écrit, tous calculs faits,

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{1}{\zeta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\alpha\,\partial\beta}.$$

2° *Condition pour* $\eta_1\zeta$. — On trouve, de même,

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial^2\xi}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{1}{\zeta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\alpha\,\partial\beta}.$$

3° *Condition pour* $\frac{\eta}{\zeta}$ :

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{1}{\zeta^2}\frac{\partial(\xi_1\zeta)}{\partial\alpha}\right] + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{\zeta^2}\frac{\partial(\xi_1\zeta)}{\partial\beta}\right] = 0.$$

Elle s'écrit, à condition d'introduire dès le début du calcul $\frac{1}{\zeta}$ au lieu de $\zeta$,

$$\frac{1}{\xi_1}\frac{\partial^2\xi_1}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \zeta \frac{\partial^2\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\partial\alpha\,\partial\beta}.$$

4° *Condition pour* $\frac{\xi}{\zeta}$. — On trouve, de même,

$$\frac{1}{\eta_1}\frac{\partial^2\eta_1}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \zeta \frac{\partial^2\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\partial\alpha\,\partial\beta}.$$

De ce qui précède il résulte donc que $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\frac{1}{\xi_1}$, $\frac{1}{\eta_1}$, sont cinq solutions d'une même équation de Moutard :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = M\theta.$$

Ces cinq solutions devront être liées par la relation :

$$\lambda = \lambda(x, y, p, q),$$

qui devient :

$$\zeta^2 = \lambda\left(\frac{\xi}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}, \xi_1\zeta, \eta_1\zeta\right).$$

## V. — Équations $f(r.\ s, t) = 0$.

**31. Équations homogènes** [2] (1). — Ces équations s'introduisent à propos de l'étude des congruences W (où les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale), dont la surface moyenne est un plan.

On formera la congruence en menant par chaque point P d'un plan qui correspond par orthogonalité à une surface génératrice S, une droite $\Delta$ parallèle à la normale à S au point correspondant M.

Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque de S, P a pour coordonnées $(-y, x, 0)$ et $\Delta$ a pour équations :

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= -y + p\lambda, \\ y_1 &= x + q\lambda, \\ z_1 &= -\lambda. \end{aligned}\right. \tag{33}$$

Les points focaux sont définis par

$$\frac{dx_1}{p} = \frac{dy_1}{q} = \frac{dz_1}{-1}. \tag{34}$$

En remplaçant dans (34) $dx_1$, $dy_1$, $dz_1$ par leurs valeurs (33), il vient

$$\left\{\begin{aligned} -dy + \lambda\,dp &= 0, \\ dx + \lambda\,dq &= 0. \end{aligned}\right. \tag{35}$$

(1) Cet exemple présente un intérêt particulier au sujet du développement de la pensée de J. Drach. Il se trouve, en effet, exposé dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* de 1924; il représente donc la première utilisation des variables caractéristiques, dont l'introduction systématique représente l'originalité profonde de la méthode.

De (35) il résulte immédiatement que

$$dp\,dx + dq\,dy = 0.$$

C'est l'équation des asymptotiques de S et l'on a aussi

$$\lambda^2 = \frac{1}{s^2 - rt} \quad (^1). \tag{36}$$

Si la congruence est W, les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes et l'équation différentielle de ces deux nappes est invariante pour le changement de $\lambda$ en $-\lambda$. Cette équation différentielle s'écrit

$$\begin{vmatrix} d^2(p\lambda) & d^2(q\lambda) & -d\lambda \\ \lambda r + p\dfrac{\partial\lambda}{\partial x} & 1 + \lambda s + q\dfrac{\partial\lambda}{\partial x} & -\dfrac{\partial\lambda}{\partial x} \\ -1 + \lambda s + p\dfrac{\partial\lambda}{\partial y} & \lambda t + q\dfrac{\partial\lambda}{\partial y} & -\dfrac{\partial\lambda}{\partial y} \end{vmatrix} = 0, \tag{37}$$

avec la condition que les deux équations

$$(\lambda\, d^2p + 2d\lambda\, dp)\left(s\frac{\partial\lambda}{\partial y} - t\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right) - (\lambda\, d^2q + 2d\lambda\, dq)\left(r\frac{\partial\lambda}{\partial y} - s\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right) = 0, \tag{38}$$

$$(\lambda\, d^2p + 2d\lambda\, dp)\frac{\partial\lambda}{\partial y} - (\lambda\, d^2q + 2d\lambda\, dq)\frac{\partial\lambda}{\partial x} = 0 \tag{39}$$

soient identiques. D'où plusieurs cas possibles :

1°

$$s - t\,\frac{\dfrac{\partial\lambda}{\partial x}}{\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}} = r\,\frac{\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}}{\dfrac{\partial\lambda}{\partial x}} - s \qquad \text{ou} \qquad r\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2 - 2s\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\lambda}{\partial y} + t\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

Les lignes $\lambda =$ const. sont des asymptotiques de S. Comme

$$\frac{1}{\lambda^2} = s^2 - rt = \omega,$$

$\omega$ est une solution de la même équation et S est donnée par une équation du troisième ordre.

(1) Ce résultat est à rapprocher du numéro prédédent où les équations étudiées sont celles dont les caractéristiques sont asymptotiques des surfaces intégrales.

2° Le déterminant

$$r\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2 - 2s\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\lambda}{\partial y} + t\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 \neq 0,$$

on a les deux égalités

$$\lambda\, d^2p + 2d\lambda\, dp = 0,$$
$$\lambda\, d^2q + 2d\lambda\, dq = 0,$$

qui doivent être identiques.

Elles s'écrivent, en désignant par A, B, C, D les dérivées troisièmes,

$$\lambda(A\,dx^2 + 2B\,dx\,dy + C\,dy^2) + 2(r\,dx + s\,dy)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}dx + \frac{\partial\lambda}{\partial y}dy\right) = 0,$$
$$\lambda(B\,dx^2 + 2C\,dx\,dy + D\,dy^2) + 2(s\,dx + t\,dy)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}dx + \frac{\partial\lambda}{\partial y}dy\right) = 0.$$

D'où les deux équations de condition

$$\frac{\lambda A + 2r\dfrac{\partial\lambda}{\partial x}}{\lambda B + 2s\dfrac{\partial\lambda}{\partial x}} = \frac{\lambda B + r\dfrac{\partial\lambda}{\partial y} + s\dfrac{\partial\lambda}{\partial x}}{\lambda C + s\dfrac{\partial\lambda}{\partial y} + t\dfrac{\partial\lambda}{\partial x}} = \frac{\lambda C + s\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}}{\lambda D + t\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}}.$$

Mais on trouve, pour les deux, si $rt \neq 0$

$$(40)\qquad \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & D \\ r & s & t \end{vmatrix} = 0.$$

On peut donc poser

$$r = Ms + Nt,$$
$$A = MB + NC,$$
$$B = MC + ND.$$

En dérivant la première, on trouve, en tenant compte des deux autres

$$\frac{\partial M}{\partial x}s + \frac{\partial N}{\partial x}t = 0,$$
$$\frac{\partial M}{\partial y}s + \frac{\partial N}{\partial y}t = 0.$$

Pour que $s$ et $t$ soient différents de zéro, il est donc nécessaire que

$$\frac{D(M, N)}{D(x, y)} = 0.$$

Nous poserons $N = f(M)$. Il vient

$$s + f'(M) = 0, \qquad r = Ms + f(M)t.$$

En éliminant M, il vient $\frac{r}{s} = F\left(\frac{s}{t}\right)$, équation homogène la plus générale en $r$, $s$, $t$.

Soit donc

$$\frac{r}{s} = F\left(\frac{s}{t}\right) \tag{41}$$

l'équation proposée.

Prenons comme variables indépendantes $u$ et $v$, qui correspondent aux asymptotiques de S [11, $c$] telles que

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial u} &= \lambda \frac{\partial p}{\partial u}, \\ \frac{\partial y}{\partial v} &= -\lambda \frac{\partial p}{\partial v}; \end{aligned}\right. \tag{42}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= -\lambda \frac{\partial q}{\partial u}, \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \lambda \frac{\partial q}{\partial v}, \end{aligned}\right. \tag{42'}$$

où $\lambda$ est une fonction de $u$ et de $v$.

En éliminant $\lambda$, on voit que la relation

$$dp\,dx + dq\,dy = 0 \tag{43}$$

est vérifiée, ce qui montre que les variables $u$ et $v$ correspondent aux asymptotiques de S. $\lambda$ vérifie encore la relation (36).

De (42) et (42'), on déduit

$$dx + \frac{\frac{\partial q}{\partial u}du - \frac{\partial q}{\partial v}dv}{\frac{\partial p}{\partial u}du - \frac{\partial p}{\partial v}dv}dy = 0.$$

Donc, sur le système d'asymptotiques $u =$ const., on a

$$dx + \frac{\frac{\partial q}{\partial v}}{\frac{\partial p}{\partial v}}dy = 0 \tag{44}$$

et, sur le système $v =$ const.

$$dx + \frac{\frac{\partial q}{\partial u}}{\frac{\partial p}{\partial u}}dy = 0. \tag{45}$$

Nous poserons

$$(46)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial q}{\partial v} = \sigma \dfrac{\partial p}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial q}{\partial u} = \tau \dfrac{\partial p}{\partial u}, \end{cases}$$

où les fonctions $\sigma$ et $\tau$ ne dépendent que d'un seul argument, $\sigma$ par exemple.

Les équations (42), (42') et (46) nous permettent d'écrire les conditions d'intégrabilité pour $x$, $y$, $q$, en conservant $p$ comme seule fonction inconnue. Nous poserons

$$L = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \lambda.$$

Condition d'intégrabilité de $q$ :

$$(47)\qquad -(\sigma - \tau)\frac{\partial^2 p}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial \tau}{\partial v}\frac{\partial p}{\partial u} - \frac{\partial \sigma}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v} = 0;$$

Condition d'intégrabilité de $y$ :

$$(48)\qquad \frac{\partial^2 p}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial L}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial p}{\partial u} = 0;$$

Condition d'intégrabilité de $x$ :

$$(49)\qquad (\sigma - \tau)\frac{\partial^2 p}{\partial u\, \partial v} + \left(\frac{\partial \tau}{\partial v} + 2\tau\frac{\partial L}{\partial v}\right)\frac{\partial p}{\partial u} + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u} + 2\sigma\frac{\partial L}{\partial u}\right)\frac{\partial p}{\partial v} = 0.$$

Ces trois équations se réduisent à deux seulement, sinon elles n'admettraient pas d'autre solution que $p = \text{const.}$, et non à une seule, sinon $\lambda$ serait fonction de $\sigma$ seul et $r$, $s$, $t$ ne seraient aussi fonctions que d'un seul argument. D'où la condition

$$(50)\qquad \begin{vmatrix} \tau - \sigma & \dfrac{\partial \tau}{\partial v} & -\dfrac{\partial \sigma}{\partial u} \\ 1 & \dfrac{\partial L}{\partial u} & \dfrac{\partial L}{\partial v} \\ \tau - \sigma & \dfrac{\partial \tau}{\partial v} + 2\tau\dfrac{\partial L}{\partial v} & \dfrac{\partial \sigma}{\partial u} + 2\sigma\dfrac{\partial L}{\partial u} \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\frac{\partial L}{\partial u}\frac{\partial L}{\partial v} = -\frac{\dfrac{\partial \sigma}{\partial u}\dfrac{\partial \tau}{\partial v}}{(\tau - \sigma)^2}.$$

On obtient alors

$$\frac{\dfrac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial v}}{\dfrac{\partial p}{\partial u}} = -\frac{\dfrac{\partial \tau}{\partial u}}{\tau - \sigma} - \frac{\partial L}{\partial v}.$$

En intégrant

$$\operatorname{Log}\frac{\partial p}{\partial u} = -L - \int \frac{d\tau}{\tau - \sigma}.$$

De même

$$\frac{\dfrac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial y}}{\dfrac{\partial p}{\partial v}} = \frac{\dfrac{\partial \sigma}{\partial u}}{\tau - \sigma} - \frac{\partial L}{\partial u}.$$

Et

$$\operatorname{Log}\frac{\partial p}{\partial v} = -L + \int \frac{d\sigma}{\tau - \sigma}.$$

Posons

$$\int \frac{d\sigma}{\tau - \sigma} = -\operatorname{Log}\psi(\sigma);$$

alors

$$\frac{1}{\tau - \sigma} = -\frac{\psi'}{\psi} \quad \text{et} \quad \frac{\dfrac{d\tau}{d\sigma} - 1}{(\tau - \sigma)^2} = \frac{\psi''}{\psi} - \frac{\psi'^2}{\psi^2},$$

donc

$$\frac{\dfrac{d\tau}{d\sigma}}{(\tau - \sigma)^2} = \frac{\psi''}{\psi} \quad \text{et} \quad \frac{\dfrac{d\tau}{d\sigma}}{\tau - \sigma} = \frac{\psi''}{\psi'}.$$

Nous obtenons alors

$$(51) \qquad \begin{cases} \operatorname{Log}\dfrac{\partial p}{\partial u} = -L + \operatorname{Log}\psi', \\ \operatorname{Log}\dfrac{\partial p}{\partial v} = -L - \operatorname{Log}\psi; \end{cases}$$

$$(51') \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial u} = \psi' e^{-L}, \\ \dfrac{\partial p}{\partial v} = \dfrac{1}{\psi} e^{-L}. \end{cases}$$

La condition d'intégrabilité de $p$ donne une première équation

$$(52) \qquad \psi''\frac{\partial \sigma}{\partial v} - \psi'\frac{\partial L}{\partial v} = -\frac{\psi'}{\psi^2}\frac{\partial \sigma}{\partial u} - \frac{1}{\psi}\frac{\partial L}{\partial u}.$$

D'autre part, en remplaçant $\frac{\partial p}{\partial u}, \frac{\partial p}{\partial v}$ par leurs valeurs (51′) dans le système (47)-(48)-(49), on trouve une deuxième équation

$$(53)\qquad \left(-\frac{\psi}{\psi'}\frac{\partial L}{\partial u}+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\frac{1}{\psi^2}=-\frac{\psi''}{\psi'}\frac{\partial\sigma}{\partial v}+\frac{\partial L}{\partial v}.$$

Ces deux équations permettent de calculer $\frac{\partial L}{\partial u}, \frac{\partial L}{\partial v}$,

$$\frac{\partial L}{\partial u}=\psi\psi''\frac{\partial\sigma}{\partial u},\qquad \frac{\partial L}{\partial v}=-\frac{1}{\psi^2}\frac{\partial\sigma}{\partial u}.$$

On en déduit la condition d'intégrabilité de L

$$(54)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\psi^2}\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\psi\psi'\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)=0.$$

Considérons d'autre part le $ds^2$ d'une surface applicable sur un plan et rapporté à deux directions orthogonales $u$ et $v$; il s'écrira

$$ds^2=A^2\,du^2+C^2\,dv^2,$$

avec la condition

$$(55)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial v}\right)=0$$

qui exprime que la courbure totale est nulle.

Nous identifierons l'équation (54) à l'équation (55), en posant

$$A=\psi-\sigma\psi',\qquad C=i\frac{\sigma}{\psi}.$$

Nous écrirons encore le $ds^2$

$$ds^2=\frac{1}{\omega^2}du^2+\frac{1}{\varphi^2(\omega)}dv^2=4\,dx\,dy.$$

On en déduit

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-i\frac{\varphi}{\omega}\frac{\partial u}{\partial x},\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=i\frac{\varphi}{\omega}\frac{\partial u}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}=\omega^2.$$

La condition d'intégrabilité de $v$ donne

$$(56)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\omega\varphi'+\varphi}{\omega\varphi'-\varphi}=0.$$

En appliquant la transformation de Legendre à cette équation, il vient

$$(57)\qquad RX^2+TY^2-2SXY\,\Phi(XY)=0,$$

où

$$\Phi(\omega^2) = \frac{\omega\varphi' + \varphi}{\omega\varphi' - \varphi}, \qquad \text{puisque} \qquad XY = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \omega^2.$$

Les caractéristiques de (57) sont définies par

$$X^2\, dY^2 + 2XY\Phi(XY)\, dX\, dY + Y^2\, dX^2 = 0. \tag{58}$$

Posant $XY = \gamma$, et désignant les variables caractéristiques par $\alpha$ et $\beta$, on trouve

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= \operatorname{Log} X - \int \frac{d\gamma}{\gamma\left[1 - \Phi + \sqrt{\Phi^2 - 1}\right]} = \operatorname{Log} X - \int\left(\frac{1}{\omega} + \sqrt{\frac{\varphi'}{\omega\varphi}}\right) d\omega, \\ \beta &= \operatorname{Log} X - \int \frac{d\gamma}{\gamma\left[1 - \Phi - \sqrt{\Phi^2 - 1}\right]} = \operatorname{Log} X - \int\left(\frac{1}{\omega} - \sqrt{\frac{\varphi'}{\omega\varphi}}\right) d\omega. \end{aligned}\right. \tag{59}$$

D'où

$$\frac{\beta - \alpha}{2} = \int \sqrt{\frac{\varphi'}{\omega\varphi}}\, d\omega.$$

Donc $\omega$ *est une fonction de* $\alpha - \beta$.

L'équation en Z, où $Z = x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} - u$, est

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{1}{8}\,\frac{\omega(\varphi'^2 + \varphi\varphi'') - \varphi\varphi'}{\varphi'\sqrt{\omega\varphi\varphi'}}\left(\frac{\partial Z}{\partial\alpha} - \frac{\partial Z}{\partial\beta}\right) = 0, \tag{60}$$

obtenue en prenant comme variables $\alpha$ et $\beta$ au lieu de X et Y, dans l'équation (57). L'équation (60) est une équation à invariants égaux, puisque $\omega$ est une fonction de $\alpha - \beta$. Si l'on fait le changement de variable, d'ailleurs classique,

$$Z = \Lambda\theta, \qquad \text{avec} \quad \operatorname{Log}\Lambda = -\frac{1}{8}\int \frac{\omega(\varphi'^2 + \varphi\varphi'') - \varphi\varphi'}{\varphi'\sqrt{\omega\varphi\varphi'}}\, d(\alpha - \beta),$$

l'équation (60) prend la forme

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = F(\alpha - \beta)\theta, \qquad \text{avec} \quad F = -\frac{\Lambda''}{\Lambda} + 2\,\frac{\Lambda'^2}{\Lambda^2}. \tag{61}$$

C'est une équation harmonique particulière, qui s'intègre partiellement à l'aide d'intégrales définies, quand on a la solution générale de

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial\lambda^2} = -[F(\lambda) + H]\,\sigma,$$

où H est un paramètre [11, *a*].

*En résumé*, étant donnée une équation (41) :

1° On déterminera $\sigma$ et $\tau$ par

$$\frac{s}{r} = \frac{\sigma + \tau}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{t}{r} = \sigma\tau.$$

On aura ainsi déterminé $\tau$ en fonction de $\sigma$.

2° On calculera $\psi$ par

$$\int \frac{d\sigma}{\tau - \sigma} = -\operatorname{Log}\psi(\sigma).$$

3° On calculera

$$\omega = \frac{1}{\psi - \sigma\psi'}, \qquad \varphi(\omega) = i\frac{\psi}{\sigma}.$$

4° On intégrera l'équation harmonique

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = F(\alpha - \beta)\theta, \qquad \text{avec} \qquad F = -\frac{\Lambda''}{\Lambda} + \frac{\Lambda'^2}{\Lambda^2};$$

$$\operatorname{Log}\Lambda = -\frac{1}{8}\int \frac{\omega(\varphi'^2 + \varphi\varphi'') - \varphi\varphi'}{\varphi'\sqrt{\omega\varphi\varphi'}}\,d(\alpha - \beta) \quad \text{et} \quad \alpha - \beta = -2\int\sqrt{\frac{\varphi'}{\omega\varphi}}\,d\omega.$$

5° On calculera

$$Z = \Lambda\theta,$$

$$X = e^{\alpha + \int\left(\frac{1}{\omega} + \sqrt{\frac{\varphi'}{\omega\varphi}}\right)d\omega},$$

$$Y = \frac{\omega^2}{X}, \qquad \text{puis} \quad P = \frac{\partial Z}{\partial X}, \qquad Q = \frac{\partial Z}{\partial Y}.$$

6° On appliquera la transformation de Legendre à X, Y, Z, P, Q, ce qui donnera $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $u = PX + QY - Z$, $x$, $y$.

7° On calculera $v$ par

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\varphi}{\omega}\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = i\frac{\varphi}{\omega}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

8° On calculera L, $p$, $q$, $x$, $y$, $z$ par intégration

$$dL = \psi\psi''\frac{\partial\sigma}{\partial v}\,du - \frac{1}{\psi^2}\frac{\partial\sigma}{\partial u}\,dv,$$

$$dp = e^{-L}\left(\psi'\,du + \frac{dv}{\psi}\right),$$

$$dq = e^{-L}\left[(\sigma\psi' - \psi)\,du + \frac{\sigma}{\psi}\,dv\right],$$

$$dx = e^{L}\left[-(\sigma\psi' - \psi)\,du + \frac{\sigma}{\psi}\,dv\right],$$

$$dy = e^{L}\left(\psi'\,du - \frac{dv}{\psi}\right),$$

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

**32. Cas particuliers.** — Des formules donnant A et C en $\psi$ et $\sigma$, on déduit inversement :

$$\frac{1}{\sigma} = -i\int\frac{dC}{AC^2}, \qquad \frac{1}{\psi} = -C\int\frac{dC}{AC^2}, \qquad \pi = \frac{iAC}{1 + AC\int\frac{dC}{AC^2}}.$$

On pourra ainsi passer de A et C aux coordonnées cartésiennes.

1° *Le plan est rapporté à des coniques géodésiques*

$$\frac{1}{A^2} + \frac{1}{C^2} = 1.$$

On en déduit

$$\omega^2 + \varphi^2 = 1.$$

On posera donc

$$\omega = \cos\rho, \qquad \varphi = \sin\rho.$$

Pour trouver l'équation (41), on éliminera $\varphi$ entre

$$\frac{4(s^2 - rt)}{t^2} = -\omega^2\varphi^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{2is}{t} = \omega\varphi - 2\int\omega\,d\varphi.$$

Après un calcul élémentaire, on trouve

$$(62) \qquad \frac{4}{t}\sqrt{s^2 - rt} = \operatorname{sh}\left(\frac{4s}{t}\right).$$

L'équation harmonique que vérifie Z, se réduit simplement à

$$(63) \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0.$$

2° *Cas où* $AC = 1$. — Posant $A^2 = \omega$, il s'agit de déterminer $u$, $v$, $\omega$ tels que

$$\omega\,du^2 + \frac{1}{\omega}\,dv^2 = dx\,dy;$$

$u$ et $v$ vérifient le système

$$\frac{\partial v}{\partial x} = i\omega\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -i\omega\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\omega}.$$

La condition d'intégrabilité de $v$ s'écrit

$$(64) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{1}{2\omega}\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2\omega}\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

En remplaçant $\omega$ par sa valeur $\dfrac{1}{2\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}}$, il vient

$$(65) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

On applique ici aussi une transformation de Legendre ; l'équation précédente s'écrit

$$(66) \qquad RX^2 + TY^2 = 0,$$

dont les caractéristiques sont

$$(67) \qquad X^2 dY^2 + Y^2 dX^2 = 0$$

et les variables caractéristiques

$$(68) \qquad \begin{cases} \alpha = \operatorname{Log} Y - i \operatorname{Log} X, \\ \beta = \operatorname{Log} Y + i \operatorname{Log} X. \end{cases}$$

Inversement,

$$X = e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}, \qquad P = \frac{i}{X}\left(\frac{\partial Z}{\partial \alpha} - \frac{\partial Z}{\partial \beta}\right);$$

$$Y = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}, \qquad Q = \frac{i}{Y}\left(\frac{\partial Z}{\partial \alpha} + \frac{\partial Z}{\partial \beta}\right),$$

où Z vérifie l'équation

$$(69) \qquad 4\frac{\partial^2 Z}{\partial \alpha \partial \beta} - (1+i)\frac{\partial Z}{\partial \beta} - (1-i)\frac{\partial Z}{\partial \alpha} = 0,$$

équation de Laplace à invariants égaux.

Comme dans le cas général, on posera

$$Z = \Lambda\theta, \qquad \text{avec} \quad \operatorname{Log}\Lambda = -\frac{1}{4}[\alpha(1+i) + \beta(1-i)],$$

$\theta$ satisfait à

$$(70) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{1}{8}\theta.$$

C'est l'équation dite « des télégraphistes », dont l'intégrale est connue.

En utilisant les formules données au début du présent numéro, on établit l'équation aux dérivées partielles (41), que vérifient les surfaces S. On trouve, par un calcul facile,

$$(71) \qquad 4(s^2 - rt) + t^2 = 0.$$

3° *Cas où* $A = C^m$ $(m \not= -1)$. — On posera $\omega = C^2$. Le calcul se fait de la même manière que pour le cas précédent. $\theta$ est donné par

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{(m-1)^2}{(8m)^2}\frac{1}{\alpha\beta}\theta. \tag{72}$$

En posant

$$\alpha_1 = \frac{4m}{m-1}\alpha^2, \qquad \beta_1 = \frac{4m}{m-1}\beta^2,$$

on trouve

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial\alpha_1\partial\beta_1} = \theta. \tag{73}$$

L'équation aux dérivées partielles des surfaces S est

$$4ms^2 + rt(m-1)^2 = 0. \tag{74}$$

**33. Équation non homogène.** — Legendre, dès 1787, avait proposé comme méthode de résolution, de prendre comme inconnue auxiliaire $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Soit donc l'équation

$$r = f(s, t). \tag{75}$$

En la dérivant par rapport à $y$, il vient

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial^2 q}{\partial x\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}. \tag{76}$$

C'est une équation linéaire, de la forme $r + As + Bt = 0$, à condition de lui appliquer une transformation de Legendre, ce qui revient à prendre comme fonction inconnue

$$u = q - sx - ty$$

et $s$ et $t$ comme variables indépendantes.

On obtient alors l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = 0 \tag{77}$$

qui est bien de la forme annoncée et où les coefficients $\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}$ ne dépendent que des variables indépendantes (*voir* § IV, n° 25).

On a également cherché des cas où le système différentiel des caractéristiques admet une deuxième intégrale première. Il s'écrit en effet

$$(78) \qquad \left\{ \begin{aligned} dy &= m_1 \, dx, \\ dz &= (p + q m_1) \, dx, \\ dp &= (f + s m_1) \, dx, \\ dq &= (s + t m_1) \, dx, \\ ds + m_2 dt &= 0 ; \end{aligned} \right.$$

$$(78') \qquad \left\{ \begin{aligned} dy &= m_2 \, dx, \\ dz &= (p + q m_2) \, dx, \\ dp &= (f + s m_2) \, dx, \\ dq &= (s + t m_2) dx, \\ ds + m_1 \, dt &= 0, \end{aligned} \right.$$

où $m_1$ et $m_2$ sont les racines de l'équation caractéristique

$$(79) \qquad m^2 + m \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

et ne dépendent que de $s$ et $t$ ; les dernières équations (78) et (78') sont donc des équations différentielles ordinaires et donnent une combinaison intégrable pour chaque système.

Soit donc $u(s, t) = C$ l'intégrale de $ds + m_2 dt = 0$ ; $u$ est donc une intégrale de

$$(80) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - m_2 \frac{\partial u}{\partial s} = 0.$$

Pour trouver une autre intégrale première, on remarque que, si $m_1$, $f + s m_1$, ou $s + t m_1$ satisfont à (80), on a une seconde intégrale

$$y - m_1 x = C, \qquad p - (f + s m_1) x = C, \qquad q - (s + t m_1) x = C,$$

respectivement.

Cette méthode nous conduit donc à trois cas où l'équation (75) est intégrable par la méthode de Darboux.

34. Voyons quel progrès la méthode de Drach apporte à la solution

de l'équation (75). Le système ($\Omega$) s'écrit

$$
(\Omega)\quad \left\{\begin{array}{l}
dz - p\,dx - q\,dy = 0,\\
dp - f\,dx - s\,dy = 0,\\
dq - s\,dx - t\,dy = 0;\\
\dfrac{\partial y}{\partial \alpha} - m_1 \dfrac{\partial x}{\partial \alpha} = 0, \qquad \dfrac{\partial y}{\partial \beta} - m_2 \dfrac{\partial x}{\partial \beta} = 0;\\
\dfrac{\partial s}{\partial \alpha} + m_2 \dfrac{\partial t}{\partial \alpha} = 0, \qquad \dfrac{\partial s}{\partial \beta} + m_1 \dfrac{\partial t}{\partial \beta} = 0;\\
(\mathrm{X})\quad \dfrac{\partial}{\partial \beta}\left(m_1 \dfrac{\partial x}{\partial \alpha}\right) = \dfrac{\partial}{\partial \alpha}\left(m_2 \dfrac{\partial x}{\partial \beta}\right),\\
(\mathrm{T})\quad \dfrac{\partial}{\partial \beta}\left(m_2 \dfrac{\partial t}{\partial \alpha}\right) = \dfrac{\partial \alpha}{\partial t}\left(m_1 \dfrac{\partial t}{\partial \beta}\right).
\end{array}\right.
$$

Les variables d'Ampère $\alpha$ et $\beta$ sont définies par les intégrales des deux équations

$$
ds + m_2 dt = 0,\qquad ds + m_1 dt = 0;
$$

nous poserons

$$
ds + m_2 dt = \mathrm{M}_2 d\alpha,\qquad ds + m_1 dt = \mathrm{M}_1 d\beta.
$$

Les variables $\alpha$ et $\beta$ sont ainsi définies en fonction de $s$ et $t$. Inversement, on pourra exprimer $s$ et $t$ en fonction de $\alpha$ et $\beta$, puis $m_1$ et $m_2$ en fonction des mêmes variables.

Dans ces conditions, les équations (X) et (T) sont des équations de Laplace et la solution de l'équation (75) est ramenée à l'étude des équations de Laplace (X) et (T).

Une transformation habile a permis à Drach de ramener l'étude de ces équations à celle du système

$$
(\Delta)\quad \left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial u}{\partial \beta} = \lambda v,\\
\dfrac{\partial v}{\partial \alpha} = \lambda u,
\end{array}\right.
$$

dans lequel $u$ et $v$ sont solutions de deux équations de Laplace, dont l'une est l'adjointe de l'autre.

On pose, en appliquant ici aussi la transformation de Legendre,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Z} &= z - (px + qy) + \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2),\\
\mathrm{P} &= rx + sy - p,\\
\mathrm{Q} &= sx + ty - q.
\end{aligned}
$$

Le système $(\Omega)$ devient

$$\begin{aligned} 2\,dL &= x\,dP + y\,dQ, \\ dP &= x\,dr + y\,ds, \\ dQ &= x\,ds + y\,dt, \end{aligned}$$

les autres équations n'étant pas changées.

Calculons $dZ$ :

$$\begin{aligned} 2\,dZ &= x^2\,dr + 2xy\,ds + y^2\,dt \\ &= \left(x^2\frac{\partial r}{\partial\alpha} + 2xy\frac{\partial s}{\partial\alpha} + y^2\frac{\partial t}{\partial\alpha}\right)d\alpha + \left(x^2\frac{\partial r}{\partial\beta} + 2xy\frac{\partial s}{\partial\beta} + y^2\frac{\partial t}{\partial\beta}\right)d\beta. \end{aligned}$$

Or

$$\frac{\partial r}{\partial\alpha} = -m_2\frac{\partial s}{\partial\alpha} = m_2^2\frac{\partial t}{\partial\alpha}, \qquad \frac{\partial r}{\partial\beta} = -m_1\frac{\partial s}{\partial\alpha} = -m_1^2\frac{\partial t}{\partial\alpha}.$$

Donc

$$2\,dZ = (y - m_2x)^2\frac{\partial t}{\partial\alpha}d\alpha + (y - m_1x)^2\frac{\partial t}{\partial\beta}d\beta,$$

ce qui donne $\frac{\partial Z}{\partial\alpha}, \frac{\partial Z}{\partial\beta}$. En dérivant la première par rapport $\beta$ et la deuxième par rapport à $\alpha$, on en déduit deux valeurs de $\frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\,\partial\beta}$ :

1°
$$\begin{aligned} 2\frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\,\partial\beta} &= (y - m_2x)^2\frac{\partial^2 t}{\partial\alpha\,\partial\beta} - 2(y - m_2x)\,x\frac{\partial m_2}{\partial\beta}\frac{\partial t}{\partial\alpha} \\ &= 2\frac{\dfrac{\partial Z}{\partial\alpha}}{\dfrac{\partial t}{\partial\alpha}}\frac{\partial^2 t}{\partial\alpha\,\partial\beta} - 2\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\dfrac{\partial Z}{\partial\alpha}}{\dfrac{\partial t}{\partial\alpha}}\right)\frac{\partial t}{\partial\alpha}; \end{aligned}$$

2°
$$\begin{aligned} 2\frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\,\partial\beta} &= (y - m_1x)^2\frac{\partial^2 t}{\partial\alpha\,\partial\beta} - 2(y - m_1x)\,x\frac{\partial m_1}{\partial\alpha}\frac{\partial t}{\partial\beta} \\ &= 2\frac{\dfrac{\partial Z}{\partial\beta}}{\dfrac{\partial t}{\partial\beta}}\frac{\partial^2 t}{\partial\alpha\,\partial\beta} - 2\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\dfrac{\partial Z}{\partial\beta}}{\dfrac{\partial t}{\partial\beta}}\right)\frac{\partial t}{\partial\beta}. \end{aligned}$$

En multipliant membre à membre les deux valeurs trouvées pour $\frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\,\partial\beta}$, on en déduit

$$(81) \qquad \frac{\dfrac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\,\partial\beta}}{\sqrt{\dfrac{\partial Z}{\partial\alpha}\dfrac{\partial Z}{\partial\beta}}} = \frac{\dfrac{\partial^2 t}{\partial\alpha\,\partial\beta}}{\sqrt{\dfrac{\partial t}{\partial\alpha}\dfrac{\partial t}{\partial\beta}}}.$$

Comme $t$ est donné en fonction de $\alpha$ et $\beta$, nous poserons

$$\frac{\dfrac{\partial^2 t}{\partial\alpha\,\partial\beta}}{\sqrt{\dfrac{\partial t}{\partial\alpha}\dfrac{\partial t}{\partial\beta}}} = 2\lambda(\alpha, \beta).$$

L'équation (81) prend la forme $s^2 = 4\lambda pq$.

Posant, avec Goursat,

$$\frac{\partial Z}{\partial\alpha} = u^2, \qquad \frac{\partial Z}{\partial\beta} = v^2,$$

on obtient

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 2u\frac{\partial u}{\partial\beta} = 2v\frac{\partial v}{\partial\alpha} = 2\lambda uv$$

et l'équation (81) se ramène au système $(\Delta)$ [9].

Si, au lieu d'éliminer $\frac{\partial r}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial r}{\partial\beta}$, $\frac{\partial s}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial s}{\partial\beta}$ des équations qui donnent $\frac{\partial Z}{\partial\alpha}$ et $\frac{\partial Z}{\partial\beta}$, on voit, en éliminant $\frac{\partial s}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial s}{\partial\beta}$, $\frac{\partial t}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial t}{\partial\beta}$, que Z vérifie la même équation (81) où on a remplacé $t$ par $r$ ; $r$ est donc aussi une solution de l'équation

$$\frac{\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)^2}{4\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}\dfrac{\partial f}{\partial\beta}} = \lambda^2(\alpha, \beta).$$

***En résumé***, on opérera de la manière suivante pour résoudre les équations (75) :

1° On détermine $\alpha$ et $\beta$ en $s$ et $t$, puis on fait l'inversion, qui donne $s$ et $t$ puis $r$ en $\alpha$ et $\beta$.

2° On calcule

$$\frac{\dfrac{\partial^2 t}{\partial\alpha\,\partial\beta}}{2\sqrt{\dfrac{\partial t}{\partial\alpha}\dfrac{\partial t}{\partial\beta}}} = \lambda(\alpha, \beta).$$

3° On calcule

$$dt = u_1^2\,d\alpha + v_1^2\,d\beta,$$
$$dr = u_2^2\,d\alpha + v_2^2\,d\beta.$$

D'autre part, comme

$$\frac{\partial s}{\partial\alpha} = \sqrt{\frac{\partial r}{\partial\alpha}\frac{\partial t}{\partial\alpha}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial s}{\partial\beta} = \sqrt{\frac{\partial r}{\partial\beta}\frac{\partial t}{\partial\beta}},$$

on a

$$ds = u_1 u_2 d\alpha + v_1 v_2 d\beta.$$

4° Soit $u$, $v$ la solution générale du système $(\Delta)$, dont $u_1$, $v_1$ et $u_2$, $v_2$ sont des solutions particulières, on a

$$dZ = \frac{1}{2}(u^2 d\alpha + v^2 d\beta)$$

qui donne Z par quadratures. Puis $x$ et $y$ sont donnés par le système algébrique

$$(82)\quad \begin{cases} y - m_2 x = \sqrt{2\dfrac{\dfrac{\partial Z}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial t}{\partial \alpha}}} = \sqrt{\dfrac{u^2}{u_1^2}} = \dfrac{u}{u_1}, & \text{avec} \quad m_2 = \dfrac{\dfrac{\partial r}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial s}{\partial \alpha}} = -\dfrac{u_2}{u_1}; \\[2ex] y - m_1 x = \sqrt{2\dfrac{\dfrac{\partial Z}{\partial \beta}}{\dfrac{\partial t}{\partial \beta}}} = \sqrt{\dfrac{v^2}{v_1^2}} = \dfrac{v}{v_1}, & \text{avec} \quad m_1 = \dfrac{\dfrac{\partial r}{\partial \beta}}{\dfrac{\partial s}{\partial \beta}} = -\dfrac{v_2}{v_1}. \end{cases}$$

La solution de ce système est

$$x = \frac{u v_1 - v u_1}{u_2 v_1 - u_1 v_2}, \qquad y = \frac{u v_2 - v u_2}{u_1 v_2 - u_2 v_1}.$$

En substituant ces valeurs dans les expressions de $dP$ et $dQ$, on a

$$dP = u_2(x u_2 + y u_1)\,d\alpha + v_2(x v_2 + y v_1)\,d\beta = u u_2\,d\alpha + v v_2\,d\beta,$$
$$dQ = u_1(x u_2 + y u_1)\,d\alpha + v_1(x v_2 + y v_1)\,d\beta = u u_1\,d\alpha + v v_1\,d\beta,$$

qui donnent aussi P et Q par quadratures. Enfin

$$p = rx + sy - P, \qquad q = sx + ty - Q,$$
$$z = Z - Px - Qy + \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2).$$

*Remarque.* — On peut partir d'une fonction donnée $\lambda(\alpha, \beta)$. Deux solutions particulières du système $(\Delta)$ $u_1$, $v_1$ ; $u_2$, $v_2$ donnent $r$, $s$, $t$ par quadratures à partir des relations aux différentielles totales obtenues. On en déduit alors une équation

$$(75)\qquad r = f(s, t),$$

dont la solution est donnée par la solution générale $u$, $v$ du système $(\Delta)$. Dans ce cas, $f$ dépend de quatre fonctions arbitraires, deux de $\alpha$, deux de $\beta$.

**35. Exemple.** — Posons

$$\lambda = \frac{1}{\alpha+\beta}.$$

L'intégration du système ($\Delta$) donne

$$u = \frac{F(\alpha)+G(\beta)}{\alpha+\beta} - F'(\alpha),$$
$$v = \frac{F_1(\alpha)+G_1(\beta)}{\alpha+\beta} - G_1'(\beta).$$

Prenons deux solutions particulières :

1° $$F = F_1 = -\frac{1}{\alpha}, \qquad G = G_1 = -\frac{1}{\beta}.$$

On en déduit

$$u_1 = \frac{\alpha-\beta}{\alpha^2\beta}, \qquad v_1 = \frac{\beta-\alpha}{\beta^2\alpha};$$

2° $$F = F_1 = \alpha^2, \qquad G = G_1 = \beta^2.$$

On en déduit

$$u_2 = -\frac{\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2}{\alpha+\beta}, \qquad v_2 = -\frac{\beta^2+2\alpha\beta-\alpha^2}{\alpha+\beta}.$$

Puis $dr = u_2^2\,d\alpha + v_2^2\,d\beta$, dont l'intégration donne

$$r = \frac{1}{3}(\alpha+\beta)^3 - \frac{4\alpha^2\beta^2}{\alpha+\beta}$$

De même $dt = u_1^2\,d\alpha + v_1^2\,d\beta$, dont l'intégration donne

$$t = \frac{(\alpha-\beta)^3}{3\alpha^3\beta^3}.$$

Enfin

$$ds = u_1 u_2\,d\alpha + v_1 v_2\,d\beta \qquad \text{et} \qquad s = 4\operatorname{Log}\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha\beta}.$$

On a ainsi une représentation paramétrique de l'équation (75) en fonction des deux paramètres $\alpha$ et $\beta$.

Puis Z est donné par

$$dZ = \frac{1}{2}(u^2\,d\alpha + v^2\,d\beta).$$

Pour intégrer cette équation, nous prendrons $F'(\alpha)$ et $G_1'(\beta)$ comme variables indépendantes au lieu de $\alpha$ et $\beta$ et nous poserons

$$\alpha = \varphi''(F'), \qquad \beta = \psi''(G_1').$$

## CHAPITRE III.

### Invariants et involutions de l'équation $s = f(x, y, z, p, q)$.

#### I. — Invariants entiers.

**36.** Drach [4] a su aussi renouveler la méthode de Darboux, qui s'était révélée si fructueuse entre les mains de ses successeurs : Goursat, Gosse, Gau et Lainé. En l'occurrence, la méthode de Drach est ici une méthode de récurrence, qui permet d'étudier les invariants d'ordre $n$, alors que la méthode de Goursat ne se prête pas à ce genre de généralisations, et n'a guère permis de dépasser le second ou le troisième ordre.

Soit donc l'équation

$$s = f(x, y, z, p, q), \tag{1}$$

pour laquelle les variables caractéristiques $\alpha$ et $\beta$ sont ici simplement $x$ et $y$, et qui possède évidemment des caractéristiques du premier ordre.

Les équations des caractéristiques sont

$$\left\{\begin{aligned} dx &= 0, \\ dp &= f\,dy; \end{aligned}\right. \tag{2}$$

$$\left\{\begin{aligned} dy &= 0, \\ dq &= f\,dx. \end{aligned}\right. \tag{2'}$$

Les éléments paramétriques sont donc $x$, $y$, $z$, $p$, $q$ et les dérivées successives de $p$ par rapport à $x$ et celles de $q$ par rapport à $y$. Nous les désignerons, conformément aux considérations de « poids » vues précédemment (chap. II, § II), par

$$\begin{array}{llll} p_1 = \dfrac{\partial p}{\partial x}, & p_2 = \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}, & \ldots, \quad p_n = \dfrac{\partial^n p}{\partial x^n}, & \ldots; \\ q_1 = \dfrac{\partial q}{\partial y}, & q_2 = \dfrac{\partial^2 q}{\partial y^2}, & \ldots, \quad q_n = \dfrac{\partial^n q}{\partial y^n}, & \ldots. \end{array}$$

Un invariant d'ordre $n$ relatif à la caractéristique $x$, s'écrira

$$\varphi(x, y, z, p, p_1, \ldots, p_n) = \mathrm{F}(x). \tag{3}$$

Il devra former avec l'équation proposée (1) un système complètement intégrable.

Nous écrirons

$$\left[\frac{d\varphi}{dy}\right] = 0,$$

où les éléments non paramétriques seront calculés à partir des équations (2).

37. Nous supposerons que $\varphi$ est l'invariant d'ordre minimum, relatif à la caractéristique $x$. Nous avons vu qu'on peut supposer $\varphi$ linéaire en $p_n$. Comme il doit rester invariant en forme pour toute transformation ponctuelle opérée sur $x, y, z$, tous ses termes sont au plus de poids $n$, si l'on affecte les $p_i$ d'un poids égal à leur indice [1]. Nous écrirons donc

$$\varphi = \lambda p_n + A_1 p_1 p_{n-1} + \ldots, \tag{4}$$

où $\lambda$, $A_1$, ... ne dépendent que de $x, y, z, p$.

En identifiant à zéro $\left[\frac{d\varphi}{dy}\right]$, c'est-à-dire en annulant les coefficients des éléments paramétriques, on obtient des équations qui permettent de calculer $\lambda$, $A_1$, ....

38. Faisons donc ce calcul

$$\left[\frac{d\varphi}{dy}\right] = \frac{d\lambda}{dy} p_n + \lambda \frac{dp_n}{dy} + \ldots.$$

Or

$$\frac{dp}{dy} = f, \qquad \frac{dp_1}{dy} = \left[\frac{df}{dx}\right] = \frac{\partial f}{\partial p} p_1 + \left(\frac{df}{dx}\right), \qquad \ldots, \qquad \frac{dp_n}{dy} = \frac{\partial f}{\partial p} p_n + \ldots.$$

Le coefficient du terme en $p_n$ est donc $\frac{d\lambda}{dy} + \frac{\partial f}{\partial p}\lambda$

$\lambda$ est donc déterminé par

$$\frac{d\lambda}{dy} + \frac{\partial f}{\partial p}\lambda = 0 \tag{5}$$

ou, en développant,

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} + q\frac{\partial \lambda}{\partial z} + f\frac{\partial \lambda}{\partial p} + \lambda \frac{\partial f}{\partial p} = 0.$$

---

(1) C'est, on l'a vu, la raison pour laquelle nous avons modifié la notation classique.

Nous poserons

$$(6) \qquad \lambda = \frac{\partial\theta}{\partial p},$$

où $\theta$ est une nouvelle fonction de $x, y, z, p$. On peut alors intégrer l'équation (5) par rapport à $p$. La constante d'intégration est ici une fonction de $x, y, z, q$

$$(7) \qquad \frac{\partial\theta}{\partial y} + q\frac{\partial\theta}{\partial z} + f\frac{\partial\theta}{\partial p} = \mu(x, y, z, q).$$

Cette équation donne $f$ à l'aide de deux fonctions arbitraires de quatre arguments : $\theta(x, y, z, p)$ et $\mu(x, y, z, q)$, *pour toutes les équations* (1), *qui admettent un invariant entier*

$$f = \frac{\mu - \dfrac{\partial\theta}{\partial y} - q\dfrac{\partial\theta}{\partial z}}{\dfrac{\partial\theta}{\partial p}}.$$

Or, d'après (1), $s = f$ ; donc le premier membre de (7) est $\frac{d\theta}{dy}$. Nous écrirons dans la suite l'équation (1) sous la forme

$$(8) \qquad \frac{d\theta}{dy} = \mu.$$

*Remarques.* — 1° Si l'on ajoute à $\theta$ une fonction $a(x, y, z)$, il faut ajouter à $\mu$

$$\frac{da}{dy} = \frac{\partial a}{\partial y} + q\frac{\partial a}{\partial z}.$$

2° Si l'on remplace $\theta$ par $X\theta + X_1$, où $X$ et $X_1$ sont des fonctions de $x$, $\mu$ est multiplié par $X$.

D'autre part, $\varphi$ s'écrit

$$\varphi = \frac{\partial\theta}{\partial p} p_n + \ldots.$$

Or, $\frac{\partial\theta}{\partial p} p_n$ est le premier terme de $\frac{d^n\theta}{dx^n}$. Nous écrirons donc

$$(9) \qquad \varphi = \frac{d^n\theta}{dx^n} + A_1 \frac{d\theta}{dx}\frac{d^{n-1}\theta}{dx^{n-1}} + \ldots + A_n\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^n + \ldots,$$

où les termes sont de poids $n$ ou inférieur à $n$, $\frac{d^k}{dx^k}$ étant de poids $k$.

De (8), on déduit

$$\frac{d^{n+1}\theta}{dy\,dx^n} = \frac{d^n\mu}{dx^n}.$$

La condition $\left[\frac{d\varphi}{dy}\right] = 0$, où $\varphi$ a la forme (9), s'écrit

$$(10)\quad \frac{d^{n+1}\theta}{dx^n\,dy} + A_1\left(\frac{d^2\theta}{dx\,dy}\frac{d^{n-1}\theta}{dx^{n-1}} + \frac{d\theta}{dx}\frac{d^n\theta}{dx^{n-1}dy}\right) + \frac{dA_1}{dy}\frac{d\theta}{dx}\frac{d^{n-1}\theta}{dx^{n-1}} + \ldots = 0.$$

Les opérateurs $\frac{d^n\mu}{dx^n}$ et $\frac{d\theta}{dy}$ sont permutables, donc (10) devient

$$(11)\quad \frac{d^n\mu}{dx^n} + A_1\left(\frac{d\mu}{dx}\frac{d^{n-1}\theta}{dx^{n-1}} + \frac{d\theta}{dx}\frac{d^{n-1}\mu}{dx^{n-1}}\right) + \frac{dA_1}{dy}\frac{d\theta}{dx}\frac{d^{n-1}\theta}{dx^{n-1}} + \ldots = 0.$$

Au lieu de considérer la fonction $\theta = \theta(x, y, z, p)$, nous allons prendre $p$ comme fonction et $\theta$ comme variable

$$(12)\qquad p = p(x, y, z, \theta).$$

Les dérivées se calculeront à l'aide des égalités suivantes :

$$\frac{\partial p}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial p} = 1, \qquad \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$$

et les égalités analogues à la deuxième où l'on remplace $x$ par $y$ et $z$ successivement.

Calculons $\frac{dp}{dy}$, il vient

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\partial p}{\partial y} + q\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{d\theta}{dy}\frac{\partial p}{\partial \theta}.$$

Or $\frac{dp}{dy} = s$, et, d'après (8), $\frac{d\theta}{dy} = \mu$.

Donc l'égalité précédente s'écrit

$$(13)\qquad \frac{dp}{dy} = \frac{\partial p}{\partial y} + q\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\frac{\partial p}{\partial \theta} = f,$$

et remplace l'équation proposée sous la forme (1) ou (8).

On fera le changement de variable également dans (11) : on calculera au préalable

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\partial \mu}{\partial x} + q\frac{\partial \mu}{\partial z} + \frac{dp}{dy}\frac{\partial \mu}{\partial q} = \mu_1,$$

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} = \frac{d\mu_1}{dx} = \frac{\partial \mu_1}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dx} + \frac{\partial \mu_1}{\partial x} + p\frac{\partial \mu_1}{\partial z} + \frac{dp}{dy}\frac{\partial \mu_1}{\partial q},$$

.........................................

Quand on aura remplacé $\frac{d\mu}{dx}, \frac{d^2\mu}{dx^2}, \ldots, \frac{d^n\mu}{dx^n}$ par les valeurs précédentes dans (11), cette égalité devra être identiquement vérifiée, quels que soient $\frac{d\theta}{dx}, \frac{d^2\theta}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}\theta}{dx^{n-1}}$. Ces dernières expressions remplacent les $p_i$ comme éléments paramétriques. L'identification en question permettra de calculer les coefficients $A_k$ en fonction de $x$, $y$, $z$, $\theta$.

**39. Invariant du second ordre.** — L'équation étant écrite sous la forme (13), l'invariant est ici

$$\varphi = \frac{d\theta}{dx} + \sigma = F(x). \tag{14}$$

La condition d'existence est

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d^2\theta}{dx\,dy} + \frac{d\sigma}{dy} = 0$$

ou

$$\frac{d\mu}{dx} + \frac{d\sigma}{dy} = 0, \tag{15}$$

où $\mu$ est une fonction de $x$, $y$, $z$, $q$ ; $\sigma$, une fonction de $x$, $y$, $z$, $\theta$, $p$ étant aussi une fonction de $x$, $y$, $z$, $\theta$.

Développée, l'équation (15) s'écrit

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} + p\frac{\partial\mu}{\partial z} + \frac{dp}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial q} + \frac{\partial\sigma}{\partial y} + q\frac{\partial\sigma}{\partial z} + \mu\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} = 0.$$

Si on la dérive par rapport à $\theta$, en posant

$$\frac{\partial p}{\partial\theta} = P, \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial\theta} = \Sigma,$$

on a

$$P\frac{\partial\mu}{\partial z} + \left(\frac{\partial P}{\partial y} + q\frac{\partial P}{\partial z} + \mu\frac{\partial P}{\partial\theta}\right)\frac{\partial\mu}{\partial q} + \frac{\partial\Sigma}{\partial y} + q\frac{\partial\Sigma}{\partial z} + \mu\frac{\partial\Sigma}{\partial\theta} = 0. \tag{16}$$

C'est cette équation qu'il s'agit de discuter. Nous supposerons $\mu$, P, $\Sigma$ indépendants de $x$. Cette équation (16) est linéaire et homogène en P, $\Sigma$. La discussion s'ordonne par rapport à $q$, qui ne figure que dans $\mu$ et non dans P et $\Sigma$ ; nous réintroduirons $x$ en déduisant $p$ et $\sigma$ de P et $\Sigma$.

1° *$\mu$ non linéaire en $q$.* — Comme P et $\frac{\partial P}{\partial\theta}$ sont essentiellement différents de zéro, $\frac{\partial\mu}{\partial z}$ et $\mu\frac{dp}{\partial q}$, qui sont leurs coefficients, sont des combinaisons linéaires et non homogènes de $q$ et $\mu$, coefficients des dérivées de $\Sigma$.

Posons donc

$$\frac{\partial\mu}{\partial z} = a + bq + c\mu, \tag{17}$$

$$\mu\frac{\partial\mu}{\partial q} = a_1 + b_1 q + c_1\mu, \tag{18}$$

où $a$, $b$, $c$, $a_1$, $b_1$, $c_1$ sont des fonctions de $y$ et $z$.

En écrivant la condition d'intégrabilité $\frac{\partial^2\mu}{\partial z\partial q} = \frac{\partial^2\mu}{\partial q\partial z}$, nous en déduisons

$$b\mu^2 + c\mu(a_1 + b_1 q + c_1\mu) = \mu\left(\frac{\partial a_1}{\partial z} + \frac{\partial b_1}{\partial z}q + \frac{\partial c_1}{\partial z}\mu\right) + c_1\mu(a + bq + c\mu). \tag{19}$$

D'où, en procédant par identification, puisque $\mu$ dépend seul de $q$ et ce, non linéairement

$$\left\{\begin{aligned} b + cc_1 &= \frac{\partial c_1}{\partial z}, \\ 2ca_1 &= \frac{\partial a_1}{\partial z}, \\ 2cb_1 &= \frac{\partial b_1}{\partial z}, \\ aa_1 &= 0, \\ ab_1 + ba_1 &= 0, \\ bb_1 &= 0. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

On peut satisfaire les trois dernières équations de deux manières, soit en annulant $a$ et $b$, soit en annulant $a_1$ et $b_1$. La deuxième hypothèse est impossible, car dans ce cas, $\mu$ serait linéaire en $q$, ce qui est exclu. Donc

$$a = b = 0; \qquad \text{puis} \quad \frac{\partial\mu}{\partial z} = c\mu.$$

Nous poserons $c = \frac{\partial C}{\partial z}$. D'où

$$\mu = \varphi(y, q)\, e^{C(y,z)}.$$

Ensuite (18) donne

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q} = \frac{1 + q + \varphi}{\varphi}.$$

C'est une équation différentielle ordinaire que l'on sait intégrer. On obtient, $\lambda$ désignant un paramètre,

$$q+1=\frac{Y\sqrt{\lambda-1}}{\left(\lambda-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{\frac{\sqrt{5}+5}{10}}\left(\lambda+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}},$$

$$\varphi=\frac{Y}{\sqrt{\lambda-1}\left(\lambda-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\left(\lambda+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}}.$$

Puis $\mu$ est donné par $\mu=\varphi e^{C(y,z)}$, où C est arbitraire.

2° $\mu$ *linéaire en* $q$. — Nons poserons $\mu=\mu_1 q+\mu_2$, et l'équation (16) se décompose en deux :

$$(21)\qquad \begin{cases} P\dfrac{\partial\mu_1}{\partial z}+\mu_1\dfrac{\partial P}{\partial z}+\mu_1^2\dfrac{\partial P}{\partial\theta}+\dfrac{\partial\Sigma}{\partial z}+\mu_1\dfrac{\partial\Sigma}{\partial\theta}=0,\\ P\dfrac{\partial\mu_2}{\partial z}+\mu_1\dfrac{\partial P}{\partial y}+\mu_1\mu_2\dfrac{\partial P}{\partial\theta}+\dfrac{\partial\Sigma}{\partial y}+\mu_2\dfrac{\partial\Sigma}{\partial\theta}=0. \end{cases}$$

En formant la condition d'intégrabilité de $\Sigma$, on obtient

$$(22)\qquad \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{\partial\mu_1}{\partial y}-\frac{\partial\mu_2}{\partial z}\right)P\right]=\left(\frac{\partial\mu_1}{\partial y}-\frac{\partial\mu_2}{\partial z}\right)\left(2\mu_1\frac{\partial P}{\partial\theta}-\frac{\partial\Sigma}{\partial\theta}\right).$$

Il y a donc deux cas à considérer :

*a.* $\dfrac{\partial\mu_1}{\partial y}=\dfrac{\partial\mu_2}{\partial z}$. — On posera

$$\mu=\frac{\partial\nu}{\partial y}+q\frac{\partial\nu}{\partial z}.$$

Le système (21) prend alors la forme

$$(23)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial z}+\dfrac{\partial\nu}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\Sigma+\dfrac{\partial\nu}{\partial z}P\right)=0,\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial y}+\dfrac{\partial\nu}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\Sigma+\dfrac{\partial\nu}{\partial z}P\right)=0. \end{cases}$$

Il en résulte que la fonction $\Sigma+\dfrac{\partial\nu}{\partial z}P$ est une fonction arbitraire de l'argument $\nu-\theta$ : $\Phi(\nu-\theta)$.

D'où

$$\Sigma=-\frac{\partial\nu}{\partial z}P+\Phi(\nu-\theta).$$

En intégrant par rapport à $\theta$ et en réintroduisant la variable $x$,

$$\sigma = -\frac{\partial \nu}{\partial z} p + \varphi(\nu - \theta, x). \tag{24}$$

La valeur ainsi obtenue de $\sigma$ doit vérifier (15), qui s'écrit, après substitution de la valeur (24) de $\sigma$; et toutes réductions faites,

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial x\, \partial y} + q \frac{\partial^2 \nu}{\partial x\, \partial z} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 \nu}{\partial x\, \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \nu}{\partial x\, \partial z} = 0.$$

$\nu$ s'écrira donc

$$\nu = \nu_1(y, z) + \nu_2(x).$$

*b*. $\frac{\partial \mu_1}{\partial y} \neq \frac{\partial \mu_2}{\partial z}$. — Il y a alors trois équations (21) et (22) pour déterminer la fonction $\Sigma$ de trois variables $y$, $z$, $\theta$. La seule solution possible est donc $\Sigma = \text{const}$. Ce cas est donc à écarter.

40. **Invariant du troisième ordre.** — D'après le n° 37, nous savons qu'il est de la forme

$$\varphi(x) = \frac{d^2\theta}{dx^2} + \mathrm{A}\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 + \mathrm{B}\frac{d\theta}{dx} + \mathrm{C}.$$

On peut, en multipliant $\theta$ par une fonction convenable de $x$, rendre le coefficient A constant. Deux cas se présentent suivant que cette constante est nulle ou non :

$$\varphi(x) = \frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 + g\frac{d\theta}{dx} + l, \tag{I}$$

$$\varphi(x) = \frac{d^2\theta}{dx^2} + g\frac{d\theta}{dx} + l. \tag{II}$$

I. En différentiant par rapport à $y$, il vient, en utilisant (8),

$$\frac{d\theta}{dx}\left[\frac{dg}{dy} - \frac{d\mu}{dx} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{d\mu}{dx}\right)\right] + \frac{dl}{dy} + g\frac{d\mu}{dx} + \frac{d^2\mu}{dx^2} = 0 \tag{25}$$

qui se décompose en deux, puisqu'elle doit être identiquement vérifiée,

$$\frac{dg}{dy} - \frac{d\mu}{dx} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{d\mu}{dx}\right) = 0, \tag{26}$$

$$\frac{dl}{dy} + g\frac{d\mu}{dx} + \frac{d^2\mu}{dx^2} = 0. \tag{27}$$

En posant $l = h - \frac{1}{2}g^2$, et en tenant compte de (26), (27) devient

$$\frac{dh}{dy} + g\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{d\mu}{dx}\right) + \frac{d^2\mu}{dx^2} = 0. \tag{28}$$

L'équation (26), en posant $g = -\Sigma$, $p - \frac{\partial p}{\partial\theta} = \mathrm{P}$, devient

$$\frac{d\Sigma}{ly} + \frac{\partial\mu}{\partial x} + \mathrm{P}\frac{\partial\mu}{\partial z} + \frac{d\mathrm{P}}{dy}\frac{\partial\mu}{\partial q} = 0 \tag{29}$$

ou

$$\frac{d\Sigma}{dy} + \frac{d\mu}{dx} = 0.$$

C'est l'équation (15).

D'où le résultat fondamental : *Les invariants du troisième ordre se trouvent parmi les formes déjà trouvées pour les invariants du second ordre.*

On prend donc pour $\mu$ une des formes trouvées au numéro précédent. Si P est la valeur correspondante, on en déduit $p$ en intégrant

$$p - \frac{\partial p}{\partial\theta} = \mathrm{P}$$

ou

$$p = p_0 + \mathrm{B}(x, y, z)\,e^{\theta},$$

$g$ est donné immédiatement par

$$g = -\Sigma + \mathrm{X} \qquad (\mathrm{X} \text{ fonction de } x \text{ seul})$$

et l'on cherche à déterminer $h$ par l'équation (28).

II. En différentiant également par rapport à $y$, on obtient de même

$$\frac{d\theta}{dx}\left[\frac{dg}{dy} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{d\mu}{dx}\right)\right] + \frac{dl}{dy} + g\frac{d\mu}{dx} + \frac{d^2\mu}{dx^2} = 0 \tag{30}$$

qui se décompose en

$$\frac{dg}{dy} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{d\mu}{dx}\right) = 0, \tag{31}$$

$$\frac{dl}{dy} + g\frac{d\mu}{dx} + \frac{d^2\mu}{dx^2} = 0. \tag{32}$$

Posant $\frac{\partial p}{\partial\theta} = \mathrm{P}$, l'équation (31) s'écrit

$$\frac{dg}{dy} + \mathrm{P}\frac{\partial\mu}{\partial z} + \frac{d\mathrm{P}}{dy}\frac{\partial\mu}{\partial q} = 0. \tag{33}$$

On prendra encore cette fois-ci, pour $\mu$, une des formes déjà trouvées, mais indépendantes de $x$ $\left(\text{à cause de l'absence du terme } \frac{\partial\mu}{\partial x}\right)$. D'où l'on déduit P puis $p$ par intégration de l'équation (33), dans laquelle on a pris $g = \Sigma + X$. Enfin on cherche à déterminer $l$ par l'équation (32).

**41. Invariant d'ordre supérieur.** — Les résultats précédents s'étendent aux ordres supérieurs à partir du second. On n'utilise pour $\mu$ que les formes trouvées pour le second ordre et les formes de $p$ correspondantes.

### II. — Involutions et invariants rationnels.

42. Soit

$$\Phi = 0, \tag{34}$$

une relation invariante le long de la caractéristique $x$. Conformément à la théorie générale, on écrira

$$\left[\frac{d\Phi}{dy}\right] = M\Phi. \tag{35}$$

Dans le cas où l'involution est du troisième ordre, l'équation (1) prendra la forme canonique

$$\frac{d\theta}{dy} = \mu\theta + \nu, \tag{36}$$

où $\mu$ et $\nu$ sont des fonctions de $x$, $y$, $z$, $q$; $\theta$, une fonction de $x$, $y$, $z$, $p$.

Une relation invariante du second ordre prendra alors la forme

$$\chi = \frac{d\theta}{dx} + u(x, y, z, p), \tag{37}$$

où $u$ vérifie l'équation

$$\frac{du}{dy} = u\mu - \theta\frac{d\mu}{dx} - \frac{d\nu}{dx}. \tag{38}$$

Cette équation pourrait se discuter comme l'équation (15).

**43. Construction d'un invariant rationnel à partir de deux involutions.** — Si nous supposons que l'équation proposée admet les deux relations invariantes (34) et (37), nous pouvons à l'aide de ces deux relations relatives à la même caractéristique, construire un invariant rationnel.

En effet, si l'on pose

$$\Phi \frac{\partial \theta}{\partial p} = \Omega, \tag{39}$$

$\frac{\Omega}{\chi}$ est l'invariant cherché. $\Omega$ vérifie en effet aussi l'équation

$$\frac{d\Omega}{dy} = \mu\Omega, \tag{40}$$

comme on le voit facilement.

Si l'on forme maintenant

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\Omega}{\chi}\right) = \frac{1}{\chi^2}\left(\chi \frac{d\Omega}{dy} - \Omega \frac{d\chi}{dy}\right), \tag{41}$$

comme $\chi$ et $\Omega$ vérifient tous deux la relation (40), le second membre de la relation (41) est nul et notre proposition est démontrée.

*Remarque.* — Il est bien évident que la proposition qui fait l'objet du présent numéro, est générale et ne dépend pas de l'ordre des involutions considérées.

**44.** Nous terminerons cette étude de l'équation $s = f(x, y, z, p, q)$ par un exemple trouvé dans des papiers inédits de Drach.

Soit

$$s = \frac{e^z}{\varphi''(p)}$$

l'équation proposée. Nous allons montrer qu'elle admet un invariant du second ordre, sans qu'on puisse la ramener à un des types de Goursat.

Pour la ramener à la forme canonique, nous poserons

$$\theta = \varphi'(p), \qquad \mu = e^z.$$

L'équation proposée s'écrit donc

$$s \frac{d\theta}{dp} = \mu.$$

L'invariant est donc

$$\frac{d\theta}{dx} + \sigma = X,$$

où $\sigma$ vérifie

$$p\,e^z + \frac{d\sigma}{dy} = 0.$$

Donc $\sigma$ dépend de $\theta$ seul

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = -p.$$

En intégrant, puisque $d\theta = \varphi''\,dp$

$$\sigma = -(p\varphi' - \varphi).$$

L'invariant est donc

$$p_1\varphi''(p) - p\varphi' + \varphi = X.$$

## CHAPITRE IV.

### ÉQUATION $s = f(x, y, z, p, q, r)$ ADMETTANT UN INVARIANT DU SECOND ORDRE.

#### I. — Invariant du second ordre relatif à la caractéristique explicite.

**45.** Soit

$$(1) \qquad s = f(x, y, z, p, q, r)$$

l'équation proposée.

Le système $(\Sigma)$ s'écrit ici (*voir* chap. II, § II)

$$(\Sigma) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} (2) & \dfrac{\partial y}{\partial \alpha} = 0, & (2') & \dfrac{\partial y}{\partial \beta} = 1; \\ (3) & \dfrac{\partial z}{\partial \alpha} = p\dfrac{\partial x}{\partial \alpha}, & (3') & \dfrac{\partial z}{\partial \beta} = p\dfrac{\partial x}{\partial \beta} + q; \\ (4) & \dfrac{\partial p}{\partial \alpha} = p_1\dfrac{\partial x}{\partial \alpha}, & (4') & \dfrac{\partial p}{\partial \beta} = p_1\dfrac{\partial x}{\partial \beta} + f; \\ (5) & \dfrac{\partial q}{\partial \alpha} = f\dfrac{\partial x}{\partial \alpha}, & (5') & \dfrac{\partial q}{\partial \beta} = f\dfrac{\partial x}{\partial \beta} + q_1, \end{array} \right.$$

où $p_1 = r$, $q_1 = t$, avec les notations que nous avons adoptées.

L'équation différentielle des caractéristiques s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial p_1}dy^2 + dx\,dy = 0,$$

qui se décompose en

(6) $$dy = 0,$$

(7) $$\frac{\partial f}{\partial p_1} dy + dx = 0,$$

dont nous désignerons les intégrales par $\beta$ et $\alpha$ respectivement.

La caractéristique $\beta$ est donc la caractéristique explicite; $\alpha$, la caractéristique implicite.

L'équation (6) donne (2) et permet, en disposant de la fonction arbitraire, de poser (2').

(7) permet alors d'écrire

(8) $$\frac{\partial x}{\partial \beta} = -\frac{\partial f}{\partial p_1}$$

qui fait partie du système ($\Sigma$). On remplacera $\frac{\partial x}{\partial \beta}$ par sa valeur (8) dans les équations (3'), (4') et (5').

Pour former le système ($\Omega$), nous devons adjoindre au système ($\Sigma$) les conditions d'intégrabilité de $x$, $z$, $p$, $q$, $p_1$.

1° *Condition d'intégrabilité de $x$.* — Elle ne donne pas d'équation nouvelle, mais permet de calculer $\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \, \partial \beta}$

(9) $$\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \, \partial \beta} = -\frac{d}{d\alpha} \frac{\partial f}{\partial p_1} = -\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2} \frac{\partial p_1}{\partial \alpha},$$

avec

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} + p_1 \frac{\partial}{\partial p} + f \frac{\partial}{\partial q}.$$

Nous prenons soin ici, comme toujours, d'écrire à part le terme qui introduit un nouvel élément paramétrique.

2° *Condition d'intégrabilité de $z$.* — Elle est, comme dans le cas général, vérifiée identiquement.

3° *Condition d'intégrabilité de $p$.* — Elle s'écrit

$$\frac{\partial p_1}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \left( \frac{df}{dx} + \frac{\partial f}{\partial p_1} p_2 \right) \frac{\partial x}{\partial \alpha}.$$

Or, $\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} = p_2 \frac{\partial x}{\partial \alpha}$, et tenant compte de (8), il vient

(10) $$\frac{\partial p_1}{\partial \beta} = \frac{df}{dx}$$

qui exprime la condition

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x}.$$

4° *Condition d'intégrabilité de q.* — Elle introduit un nouvel élément paramétrique $q_1$; elle permet seulement de calculer $\frac{\partial q_1}{\partial \alpha}$ :

$$\frac{df}{d\beta}\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{df}{d\alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial q_1}{\partial \alpha}.$$

Or

$$\frac{df}{d\alpha} = \frac{df}{dx}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha},$$
$$\frac{df}{d\beta} = \frac{df}{dx}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial \beta} + \frac{df}{dy},$$

avec

$$\frac{d}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z} + f\frac{\partial}{\partial p} + q_1\frac{\partial}{\partial q}.$$

L'égalité devient donc

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{df}{dx} + \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial \beta} + \frac{df}{dy}\right)\frac{\partial x}{\partial \alpha} = -\frac{df}{dx}\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial x}{\partial \alpha} - \left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)^2\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial q_1}{\partial \alpha}$$

ou, enfin,

$$\frac{\partial q_1}{\partial \alpha} = \left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\right)\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)^2\frac{\partial p_1}{\partial \alpha}. \tag{11}$$

Nous avons ainsi établi le système ($\Omega$), obtenu en adjoignant (9) et (10) à ($\Sigma$).

Il est facile de voir quels sont ici les éléments paramétriques : $x$, $y$, $z$, $p$, $p_1$, $q$, les dérivées de $x$ par rapport à $\alpha$ seul, aucune dérivée de $y$ à cause de (2) et (2'), les dérivées de $p_1$ par rapport à $\alpha$ seul, $q_1$ et ses dérivées par rapport à $\beta$ seul.

Il y a donc, en définitive, trois suites de dérivées successives paramétriques : c'est un cas intermédiaire entre celui des équations étudiées au chapitre III, où il y en a deux, et le cas général, où il y en a quatre.

Le cas d'une équation (1) admettant un invariant du second ordre est le plus simple qui se présente à nous, l'invariant du premier ordre étant une « intégrale intermédiaire », cas étudié depuis longtemps.

Soit donc

$$\varphi(x, y, z, p, p_1, q, q_1) = F(\beta) \tag{12}$$

l'invariant considéré, relatif à la caractéristique explicite $\beta$.

Nous utiliserons les résultats généraux obtenus au n° 37. Ecrivons donc

$$\left[\frac{d\varphi}{d\alpha}\right] = 0,$$

soit

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial \alpha} = 0. \tag{13}$$

Les éléments $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial p_1}{\partial \alpha}$ sont paramétriques. Remplaçons $\frac{\partial q_1}{\partial \alpha}$ par sa valeur (11). Il vient

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\right)\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)^2\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} = 0.$$

En égalant à zéro les coefficients des deux éléments paramétriques $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial p_1}{\partial \alpha}$, on obtient

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} (14) & \dfrac{d\varphi}{dx} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial q_1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial p_1}\dfrac{df}{dx} + \dfrac{df}{dy}\right) = 0, \\ (15) & \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial q_1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial p_1}\right)^2 = 0. \end{cases}$$

On voit que, dans le système précédent où $\varphi$ est l'inconnue, $q_1$ n'entre dans les coefficients que linéairement et ce, dans le coefficient de $\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}$. Il en résulte que $\varphi$ est linéaire en $q_1$ [10].

Nous poserons

$$\varphi = A q_1 + B, \tag{16}$$

où A et B sont fonction des six arguments $x, y, z, p, p_1, q$.

Le système (I) prend la forme

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} (17) & \dfrac{\partial A}{\partial p_1} = 0, \\ (18) & \dfrac{dA}{dx} + A\dfrac{\partial f}{\partial q} = 0, \\ (19) & \dfrac{\partial B}{\partial p_1} + A\left(\dfrac{\partial f}{\partial p_1}\right)^2 = 0, \\ (20) & \dfrac{dB}{dx} + A\dfrac{\partial f}{\partial p_1}\dfrac{df}{dx} + \left(\dfrac{df}{dy}\right) = 0, \end{cases}$$

avec

$$\left(\frac{d}{dy}\right) = \frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z} + f\frac{\partial}{\partial p}.$$

Le système (II) est obtenu à partir du système (I) en remplaçant dans celui-ci $\varphi$ par sa valeur (16) et en annulant séparément le coefficient de $q_1$ et le terme indépendant de $q_1$.

*Remarque.* — A est essentiellement différent de zéro, c'est-à-dire que $\varphi$ dépend nécessairement de $q_1$, sinon, d'après (19), $\frac{\partial B}{\partial p_1} = 0$ et l'invariant se réduirait au premier ordre, cas que nous avons formellement exclu.

46. Nous allons maintenant mettre l'invariant sous forme canonique, en posant comme au n° 38

$$A = \frac{\partial \theta}{\partial q}, \tag{21}$$

A n'étant, d'après (17), fonction que des cinq arguments $x, y, z, p, q$.

On peut alors intégrer (18)

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \lambda(x, y, z, p, p_1). \tag{22}$$

Cette équation (22) remplace l'équation proposée (1), puisqu'on peut en tirer

$$f = \frac{\lambda - \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + p\frac{\partial \theta}{\partial z} + p_1\frac{\partial \theta}{\partial p}\right)}{\frac{\partial \theta}{\partial q}}. \tag{23}$$

L'invariant s'écrit alors

$$\varphi = \frac{\partial \theta}{\partial q} q_1 + B;$$

pour le mettre sous forme canonique, nous l'écrirons

$$\varphi = \frac{d\theta}{dy} + C(x, y, z, p, q, p_1) = F(\beta) \tag{24}$$

en posant

$$C = B - \left(\frac{\partial\theta}{\partial y} + q\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial z} + f\frac{\partial\theta}{\partial p}\right),$$

où $f$ a la valeur (23).

Le problème proposé : déterminer $f$ et $\varphi$ de façon que le système (1)-(12) soit compatible, est remplacé par le suivant : déterminer les trois fonctions $\theta$, $\lambda$, C vérifiant le système (22)-(24). Ce problème semble plus compliqué que le précédent, mais $\theta$ ne dépend que des cinq arguments $x, y, z, p, q$; $\lambda$, des cinq arguments $x, y, z, p, p_1$; et C, des six arguments $x, y, z, p, p_1, q$, alors que $f$ dépendait de six arguments et $\varphi$, de sept.

Dérivons l'équation (24) par rapport à $\alpha$, pour éliminer la fonction arbitraire et chercher les conditions que doit vérifier C

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{d\theta}{dy} + C\right) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d\theta}{dy} + C\right)\frac{\partial x}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial p_1}\left(\frac{d\theta}{dy} + C\right)\frac{\partial p_1}{\partial\alpha} = 0.$$

Cette équation se décompose en deux autres, obtenues en annulant les coefficients de $\frac{\partial x}{\partial\alpha}$ et de $\frac{\partial p_1}{\partial\alpha}$,

$$\frac{\partial C}{\partial p_1} + \frac{\partial}{\partial p_1}\frac{d\theta}{dy} = 0, \tag{25}$$

$$\frac{dC}{dx} + \frac{d}{dx}\frac{d\theta}{dy} = 0. \tag{26}$$

Les opérateurs $\frac{d}{dx}$ et $\frac{d}{dy}$ sont permutables; on peut donc écrire

$$\frac{d}{dx}\frac{d\theta}{dy} = \frac{d}{dy}\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\lambda}{dy}$$

et l'équation (26) prend la forme

$$\frac{dC}{dx} + \frac{d\lambda}{dy} = 0 \tag{27}$$

analogue à l'équation (15) du n° 39. Mais il y a ici une différence essentielle, provenant de ce que C vérifie un système de deux équations, alors que $\sigma$ vérifiait une équation unique.

Étudions d'abord la plus simple des deux : l'équation (25). Il faut calculer $\frac{\partial}{\partial p_1}\frac{d\theta}{dy}$

$$\frac{\partial}{\partial p_1}\frac{d\theta}{dy} = \frac{\partial}{\partial p_1}\left(\frac{\partial\theta}{\partial y} + q\frac{\partial\theta}{\partial z} + f\frac{\partial\theta}{\partial p} + q_1\frac{\partial\theta}{\partial q}\right) = \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial\theta}{\partial p} + \frac{\partial q_1}{\partial p_1}\frac{\partial\theta}{\partial q},$$

puisque $\theta$ est indépendant de $p_1$.

Pour calculer $\frac{\partial q_1}{\partial p_1}$, on remarque que le calcul se fait le long d'une caractéristique $\alpha$ ; c'est donc le coefficient de $\frac{\partial p_1}{\partial \alpha}$ dans l'équation (11), c'est-à-dire $\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)^2$.

L'équation (25) s'écrit donc

$$\frac{\partial C}{\partial p_1} + \frac{\partial f}{\partial p_1}\left(\frac{\partial\theta}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial\theta}{\partial q}\right) = 0.$$

Mais l'expression entre parenthèses n'est autre que $\frac{\partial\lambda}{\partial p_1}$ ; l'équation (25) prend donc la forme

$$\frac{\partial C}{\partial p_1} + \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial\lambda}{\partial p_1} = 0. \tag{28}$$

On est donc ramené à résoudre le système (27)-(28), où C est l'inconnue et où $f$ est donné par sa valeur (23).

47. Pour étudier le système (27)-(28), nous prendrons d'abord, avec Drach, $q$ comme fonction et $\theta$ comme variable indépendante. L'équation (23) prend la forme très simple

$$f = \frac{\partial q}{\partial x} + p\frac{\partial q}{\partial z} + p_1\frac{\partial q}{\partial p} + \lambda\frac{\partial q}{\partial\theta} = \frac{dq}{dx}. \tag{29}$$

L'équation (28) s'écrit alors

$$\frac{\partial C}{\partial p_1} + \frac{\partial\lambda}{\partial p_1}\left(\frac{\partial q}{\partial p} + \frac{\partial\lambda}{\partial p_1}\frac{\partial q}{\partial\theta}\right) = 0, \tag{30}$$

où $q$ est fonction des cinq arguments $x$, $y$, $z$, $p$, $\theta$.

Cette équation est intégrable, si l'on sait calculer $\int\left(\frac{\partial\lambda}{\partial p_1}\right)^2 dp_1$, puisque $q$ ne dépend pas de $p_1$. Pour y parvenir, nous poserons

$$\frac{\partial\lambda}{\partial p_1} = \mu \tag{31}$$

et nous prendrons $\mu$ comme variable indépendante au lieu de $p_1$.

Il suffit de poser maintenant

$$p_1 = \frac{\partial^2 P_1}{\partial \mu^2}, \tag{32}$$

où $P_1$ est fonction des cinq arguments $x$, $y$, $z$, $p$, $\mu$, pour pouvoir intégrer l'équation (30).

*Remarque.* — Pour que les changements de variables précédents soient possibles, il est nécessaire que $\frac{\partial \lambda}{\partial p_1}$ dépende effectivement de $p_1$, donc que $\lambda$ ne soit pas linéaire en $p_1$. Nous verrons plus loin que dans ce cas, l'équation proposée est elle-même linéaire en $p_1$ et nous étudierons ce cas particulier en détail au paragraphe suivant.

L'équation (30) prend la forme

$$\frac{\partial C}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial^3 P_1}{\partial \mu^3}\left(\frac{\partial q}{\partial p} + \mu \frac{\partial q}{\partial \theta}\right) = 0, \tag{33}$$

qui s'intègre

$$C + \frac{\partial q}{\partial p}\left(\mu \frac{\partial^2 P_1}{\partial \mu^2} - \frac{\partial P_1}{\partial \mu}\right) + \frac{\partial q}{\partial \theta}\left(\mu^2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial \mu^2} - 2\mu \frac{\partial P_1}{\partial \mu} + 2 P_1\right) = C_1, \tag{34}$$

où $C_1$ est une fonction de $x$, $y$, $z$, $p$, $\theta$.

Nous porterons la valeur de C ainsi obtenue, dans l'équation (27), après avoir calculé $\lambda$ à l'aide des nouvelles variables $\mu$ et $P_1$. L'égalité évidente

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p_1} = \frac{\dfrac{\partial \lambda}{\partial \mu}}{\dfrac{\partial^3 P_1}{\partial \mu^3}} = \mu$$

s'intègre et donne $\lambda$

$$\lambda = \mu \frac{\partial^2 P_1}{\partial \mu^2} - \frac{\partial P_1}{\partial \mu}, \tag{35}$$

à laquelle il est inutile d'ajouter une constante d'intégration, puisqu'on peut faire entrer celle-ci dans $P_1$.

Calculons enfin $\frac{d\lambda}{dy}$ :

$$\frac{d\lambda}{dy} = \frac{\partial \lambda}{\partial y} + q \frac{\partial \lambda}{\partial z} + f \frac{\partial \lambda}{\partial p} + \frac{df}{dx}\frac{\partial \lambda}{\partial p_1} = \frac{\partial \lambda}{\partial y} + q \frac{\partial \lambda}{\partial z} + \frac{dq}{dx}\frac{\partial \lambda}{\partial p} + \frac{d^2 q}{dx^2}\frac{\partial \lambda}{\partial p_1}.$$

L'équation (27) devient ainsi

$$
\begin{aligned}
(36)\quad & \frac{\partial C_1}{\partial x} + p\frac{\partial C_1}{\partial z} + P''_1\frac{\partial C_1}{\partial p} + (\mu P''_1 - P'_1)\frac{\partial C_1}{\partial \theta} + \mu\frac{\partial P''_1}{\partial y} - \frac{\partial P'_1}{\partial y} \\
& + q\left(\mu\frac{\partial P''_1}{\partial z} - \frac{\partial P'_1}{\partial z}\right) + \mu P''_1\frac{\partial q}{\partial z} + \left(\mu\frac{\partial P''_1}{\partial p} - \frac{\partial P'_1}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x} + p\frac{\partial q}{\partial z}\right) \\
& - \left[\mu\frac{\partial P''_1}{\partial x} - \frac{\partial P'_1}{\partial x} + p\left(\mu\frac{\partial P''_1}{\partial z} - \frac{\partial P'_1}{\partial z}\right)\right]\frac{\partial q}{\partial p} \\
& + \Bigg[\mu\frac{\partial P'_1}{\partial x} - 2\frac{\partial P_1}{\partial x} \\
& \qquad + P''_1\left(\mu\frac{\partial P'_1}{\partial p} - 2\frac{\partial P_1}{\partial p}\right) \\
& \qquad + p\left(\mu\frac{\partial P'_1}{\partial z} - 2\frac{\partial P_1}{\partial z}\right) + \left(\mu\frac{\partial P''_1}{\partial p} - \frac{\partial P'_1}{\partial p}\right)(\mu P''_1 - P'_1)\Bigg]\frac{\partial q}{\partial \theta} \\
& + \mu\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 2p\frac{\partial^2 q}{\partial x\,\partial z} + p^2\frac{\partial^2 q}{\partial z^2}\right) + (\mu P''_1 + P'_1)\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x\,\partial p} + p\frac{\partial^2 q}{\partial z\,\partial p}\right) \\
& + P'_1 P''_1\frac{\partial^2 q}{\partial p^2} + (\mu P''_1 - 2P_1)\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x\,\partial \theta} + p\frac{\partial^2 q}{\partial z\,\partial \theta}\right) \\
& + (2\mu P'_1 P''_1 - P'^2_1 - 2P_1 P''_1)\frac{\partial^2 q}{\partial p\,\partial \theta} \\
& + (\mu P''_1 - P'_1)(\mu P'_1 - 2P_1)\frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2} = 0,
\end{aligned}
$$

où les dérivées de $P_1$ par rapport à $\mu$ sont désignées par des accents.

Cette équation est unique comme dans le cas des équations $s = f(x, y, z, p, q)$, mais elle contient trois fonctions de cinq arguments : $C_1(x, y, z, p, \theta)$, $q(x, y, z, p, \theta)$, $P_1(x, y, z, p, \mu)$, au lieu de trois fonctions de quatre arguments : $\mu(x, y, z, q)$, $\sigma(x, y, z, \theta)$, $p(x, y, z, \theta)$.

**48.** L'étude de l'équation (36) permet de résoudre le problème que nous nous sommes posé; malheureusement, cette étude paraissant inabordable d'une façon générale, nous avons dû nous borner à un certain nombre de cas particuliers. Considérons donc des équations définies par

$$(37)\qquad P_1 = h(\mu - k)^n + a\mu + b,$$

où $h$, $k$, $a$, $b$ sont des fonctions de $x$, $y$, $z$, $p$ et $n$ une constante. Le binome que nous avons ajouté, provient de ce que le changement de variables qui sert à le définir, porte en réalité sur $P''_1$ et non sur $P_1$.

En substituant la valeur (37) de $P_1$ dans (36), seul le terme d'exposant $2n-1$ est unique et il s'écrit

$$n(n-2)^2 h^2 \frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2};$$

le cas $n=2$ est exclu, puisque $P''_1$ ne dépendrait pas effectivement de $\mu$. Il reste donc deux hypothèses :

1° $\frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2}=0$ : $q$ est linéaire en $\theta$; nous étudierons ce cas plus loin;

2° $\frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2}\neq 0$ : $2n-1$ doit être égal à un des autres exposants, qui sont : $2n-2$, $2n-3$, $2n-4$, $2n-5$, $n$, $n-1$, $n-2$, $n-3$, $1$, $0$. Les valeurs $0$, $1$, $2$ étant exclues pour $n$, il reste les cas suivants :

*a.* $n=\frac{1}{2}$; *b.* $n=-1$; *c.* $n=-2$, ce dernier seulement si $k\neq 0$.

**49.** Nous avons étudié en détail le cas où

$$P_1 = 4h\sqrt{\mu}+b\mu+c$$

dont nous avons obtenu la solution suivante :

$$\begin{aligned}
P_1 &= 4(ax+bz)^{-\frac{2}{3}}\mu^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{\partial B}{\partial x}+p\frac{\partial B}{\partial z}\right)\mu+c,\\
q &= (px-z)(ax+bz)(Y_1\omega^2+Y_2\omega+Y_3),\\
C_1 &= 2c\frac{\partial q}{\partial \omega}+\frac{\partial B}{\partial y}-(ax+bz)\left(x\frac{\partial B}{\partial x}+z\frac{\partial B}{\partial z}\right)(Y_1\omega^2+Y_2\omega+Y_3)\\
&\qquad -\frac{36zY_1}{a(ax+bz)}+Y,
\end{aligned}$$

où $a$ et $b$ sont des constantes absolues, $c$ une fonction de $x$, $y$, $z$, $p$; B, une fonction de $x$, $y$, $z$, et enfin $\omega=\theta+B$.

Dans le cas où $q$ est linéaire en $\theta$, nous avons déterminé les différentes valeurs possibles de l'exposant $n$, chacune conduisant à un cas particulier qu'il conviendra d'étudier ultérieurement en détail, comme le cas précédent. En définitive, il ne subsiste que deux possibilités : $n=3$, $n=\frac{3}{2}$.

### II. — Invariant du second ordre relatif à la caractéristique explicite, cas de l'équation linéaire.

**50.** Nous écrirons l'équation sous la forme (22) et l'invariant sous la forme (24), où C vérifie le système (27) et (28).

Mais si l'équation proposée est linéaire en $p_1$, $\lambda$ est aussi linéaire en $p_1$, d'après l'équation (22'). Soit

$$\lambda = \lambda_1 p_1 + \lambda_2, \tag{38}$$

où $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont fonctions de $x$, $y$, $z$, $p$.

Nous poserons ensuite

$$\lambda_1 = \frac{\partial \mu}{\partial p}, \tag{39}$$

$$\lambda_2 = \frac{\partial \mu}{\partial x} + p\frac{\partial \mu}{\partial z} + \Lambda, \tag{40}$$

où $\Lambda$ et $\mu$ sont deux autres fonctions de $x$, $y$, $z$, $p$.

Il suffit de poser enfin

$$\theta - \mu = \Theta \tag{41}$$

pour que l'équation (22) prenne la forme

$$\frac{d\Theta}{dx} = \Lambda, \tag{42}$$

où $\Lambda$ ne dépend que de $x$, $y$, $z$, $p$.

Mais alors, l'équation (28) devient simplement

$$\frac{\partial C}{\partial p_1} = 0 \tag{43}$$

et C ne vérifie plus que la seule équation (27) et n'est d'autre part, fonction que des cinq arguments $x$, $y$, $z$, $p$, $q$; dans cette même équation, $\Lambda$ n'est plus fonction que des quatre arguments $x$, $y$, $z$, $p$.

Pour conserver les notations habituelles, nous écrirons $\lambda$ au lieu de $\Lambda$, sans pour autant modifier le nombre d'arguments dont il dépend.

Pour poursuivre le calcul, nous allons, comme au paragraphe précédent, prendre $q$ comme fonction et $\theta$ comme variable indépendante. Puis l'équation (27) se décompose en deux autres, puisqu'elle est linéaire en $p_1$ et doit être identiquement vérifiée, quelle que soit la valeur de $p_1$. On obtient

$$\frac{\partial C}{\partial p} + \frac{\partial \lambda}{\partial p}\frac{\partial q}{\partial p} = 0, \tag{44}$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} + p\frac{\partial C}{\partial z} + \lambda\frac{\partial C}{\partial \theta} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} + q\frac{\partial \lambda}{\partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial p}\left(\frac{\partial q}{\partial x} + p\frac{\partial q}{\partial z} + \lambda\frac{\partial q}{\partial \theta}\right) = 0. \tag{45}$$

Si l'on pose

$$C = C' - q\frac{\partial \lambda}{\partial p}, \tag{46}$$

le système précédent devient

$$\frac{\partial C'}{\partial p} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2} q = 0, \tag{47}$$

$$\frac{\partial C'}{\partial x} + p\frac{\partial C'}{\partial z} + \lambda\frac{\partial C'}{\partial \theta} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} + q\left[\frac{\partial \lambda}{\partial z} - \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p\,\partial x} + p\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p\,\partial q}\right)\right] = 0. \tag{48}$$

Si $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2} \neq 0$, on peut tirer $q$ de (47) et le porter dans (48); on obtient alors

$$\frac{\partial C'}{\partial x} + p\frac{\partial C'}{\partial z} + \lambda\frac{\partial C'}{\partial \theta} + \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial z} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p\,\partial x} - p\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p\,\partial z}}{\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2}}\frac{\partial C'}{\partial p} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0, \tag{49}$$

où $C'$ est fonction de $x, y, z, p$, $\theta$ et $\lambda$, de $x, y, z, p$.

A toute solution $C'$ de l'équation (49), correspond une valeur de $q$, donnée par (47), puis une équation $s = \frac{dq}{dx}$ et un invariant $\frac{d\theta}{dy} + C = F(\beta)$ ou, en utilisant $C'$,

$$C' - \frac{\partial \lambda}{\partial p} q - \lambda\frac{\partial q}{\partial p} + \frac{q_1 - \left[\frac{\partial q}{\partial y} + q\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial p}\left(\frac{\partial q}{\partial x} + p\frac{\partial q}{\partial z} + p_1\frac{\partial q}{\partial p}\right)\right]}{\frac{\partial q}{\partial \theta}} = F(\beta). \tag{50}$$

Si l'on peut résoudre l'équation (47) en $\theta$, on prendra l'équation sous la forme $\frac{d\theta}{dx} = \lambda$, et l'invariant sous la forme

$$\frac{d\theta}{dy} + C' - \frac{\partial \lambda}{\partial p} q = F(\beta). \tag{50'}$$

**51. Cas particulier : $\lambda$ est linéaire en $p$.** — Avant l'étude générale de l'équation (49), nous allons examiner les différents cas particuliers qui se présentent. Étudions d'abord le cas où $\lambda$ est linéaire en $p$ : dans ce cas, l'équation (47) ne contient pas $q$; d'après cette même équation, $C'$ est indépendant de $p$. Nous poserons

$$\lambda = \lambda_1(x, y, z)p + \lambda_2(x, y, z), \tag{51}$$

puis

$$\lambda_1 = \frac{\partial \mu}{\partial z}. \tag{52}$$

L'équation proposée sous la forme (22) devient

$$\frac{d(\theta-\mu)}{dx}=\lambda_2(x, y, z)-\frac{\partial\mu}{\partial x}$$

ou, en changeant de notations,

$$\frac{d\theta}{dx}=\lambda(x, y, z). \tag{53}$$

Par une transformation ponctuelle,

$$X=x, \qquad Y=y, \qquad Z=\lambda(x, y, z),$$

nous obtenons la forme canonique

$$\frac{d\theta}{dx}=z. \tag{54}$$

L'équation (48), la seule que vérifie C', s'écrit

$$\frac{\partial C'}{\partial x}+p\frac{\partial C'}{\partial z}+z\frac{\partial C'}{\partial\theta}+q=0. \tag{55}$$

Le problème est donc résolu de la manière suivante : on prend pour C' une fonction arbitraire des quatre arguments $x$, $y$, $z$, $\theta$, puis

$$q=-\frac{dC'}{dx},$$

$$f=-\frac{d^2C'}{dx^2}, \qquad \text{avec} \quad \lambda=z.$$

L'invariant s'écrit sous la forme (50)

$$C'+z\frac{\partial C'}{\partial z}+\frac{q_1-\left[\frac{\partial q}{\partial y}+q\frac{\partial q}{\partial z}+\frac{\partial q}{\partial p}\left(\frac{\partial q}{\partial x}+p\frac{\partial q}{\partial z}+p_1\frac{\partial q}{\partial p}\right)\right]}{\frac{\partial q}{\partial\theta}}=F(\beta).$$

Il nous reste à examiner les deux cas plus particuliers où l'on ne peut effectuer la transformation ponctuelle indiquée.

*a. $\lambda$ dépend de $x$ et $y$ mais non de $z$.* — Par une transformation ponctuelle analogue, on posera $\lambda=x$. L'équation s'écrit

$$\frac{d\theta}{dx}=x \tag{56}$$

et l'équation (48), que vérifie C', devient

$$(57) \qquad \frac{\partial C'}{\partial x} + p\frac{\partial C'}{\partial z} + x\frac{\partial C'}{\partial \theta} = 0.$$

C' ne dépendant pas de $p$, $\frac{\partial C'}{\partial z}$ est aussi nul et C' ne dépend plus que de $x$, $y$, $\theta$. On peut alors intégrer l'équation (57) et C' est une fonction arbitraire de $y$ et $\theta - \frac{x^2}{2}$, $q$ restant ici entièrement arbitraire pour les cinq arguments $x$, $y$, $z$, $p$, $\theta$.

*b.* $\lambda$ *est une constante absolue.* — Nous prendrons $\lambda = 1$. L'équation est

$$(58) \qquad \frac{d\theta}{dx} = 1,$$

C' est une fonction arbitraire de $y$ et $\theta - x$, $q$ restant ici aussi entièrement arbitraire.

*c.* $\lambda = 0$. — Il y a une intégrale intermédiaire.

**52. Cas particulier : $\lambda$ est fonction de $y$ et $p$ seulement.** — L'équation (49) s'intègre immédiatement

$$C' = -x\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \varphi(p,\, z - px,\, \theta - \lambda x,\, y),$$

où $\varphi$ désigne une fonction arbitraire des arguments indiqués.

$q$ est alors donné par (47)

$$q = \frac{\dfrac{\partial C'}{\partial p}}{\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2}},$$

l'équation proposée conserve toujours la forme (29), où $q$ a la valeur précédente. L'invariant est donné par la formule (50).

**53. Cas particulier : $\lambda$ est indépendant de $y$.** — L'équation (49) s'écrit

$$(59) \qquad \frac{\partial C'}{\partial x} + p\frac{\partial C'}{\partial z} + \lambda\frac{\partial C'}{\partial \theta} + \frac{\dfrac{\partial \lambda}{\partial z} + \dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial p\, \partial x} - p\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial p\, \partial z}}{\dfrac{\partial^2 \gamma}{\partial p^2}}\frac{\partial C'}{\partial p} = 0.$$

Cette équation n'est autre que l'équation d'Euler, relative à la variation de l'intégrale $\int \lambda(x, z, p)\,dx$, où $p$ est la dérivée $\frac{dz}{dx}$ (puisque $y$ ne figure pas dans $\lambda$).

Il suffit de poser

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\frac{\partial C'}{\partial x} + p\frac{\partial C'}{\partial z} + \lambda\frac{\partial C'}{\partial \theta}}{\frac{\partial C'}{\partial p}} \tag{60}$$

pour obtenir l'équation classique.

Ainsi, à toute équation différentielle du second ordre,

$$z'' = \varphi(x, z, z') \tag{61}$$

que l'on sait intégrer, on peut faire correspondre un $\lambda$ et un $C'$, donc une équation du type cherché et l'invariant correspondant. Le calcul de $\lambda$ et de $C'$ se réduit d'ailleurs à des quadratures [11 *b*], [12].

**54. Cas général.** — Le calcul précédent s'étend au cas général, en différentiant l'équation (49) par rapport à $\theta$ et en posant

$$C'' = \frac{\partial C'}{\partial \theta}. \tag{62}$$

On trouve pour $C''$ l'équation (59) et les conclusions du numéro précédent restent valables pour $C''$. Une dernière quadrature permet de déduire $C'$ de $C''$. En somme, $y$ joue ici le rôle d'un paramètre.

**55. Critère permettant de reconnaître si une équation linéaire est du type cherché.** — Au lieu d'éliminer $q$ entre les équations (47) et (48), nous éliminerons $C'$. Les relations obtenues entre $\lambda$ et $q$ nous fourniront le critère cherché.

Dérivant (48) successivement deux fois par rapport à $p$ et tenant compte de (47), nous obtenons

$$\frac{\partial C'}{\partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial p}\frac{\partial C'}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p\,\partial y} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2}\frac{\delta q}{\delta x} = 0, \tag{63}$$

où l'on a posé

$$\frac{\delta}{\delta x} = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z} + \lambda\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p\,\partial x} + p\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p\,\partial z} - \frac{\partial \lambda}{\partial z}}{\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2}}\frac{\partial}{\partial p}$$

et

$$(64) \qquad \frac{\partial C'}{\partial \theta} + \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \theta} + \frac{\delta \operatorname{Log} \dfrac{\partial^2 \lambda}{\delta p^2}}{\delta y} + \frac{\partial}{\partial p}\frac{\delta q}{\delta x} = 0,$$

avec

$$\frac{\delta}{\delta y} = \frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\delta q}{\delta x}\frac{\partial}{\partial p}.$$

Les équations (47), (48), (63), (64) donnent les quatre dérivées de $C'$ par rapport à $x$, $z$, $p$, $\theta$. Les six conditions d'intégrabilité se réduisent à quatre, car la condition $x$, $p$ se réduit à (63) et la condition $z$, $p$ à (64).

La condition $p$, $\theta$ s'écrit

$$(65) \qquad \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial p}\frac{\partial q}{\partial \theta} + \frac{\delta}{\delta y}\operatorname{Log}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2} + \frac{\partial}{\partial p}\frac{\delta q}{\delta x}\right) + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2}\frac{\partial q}{\partial \theta} = 0.$$

De même, la condition $z$, $\theta$ s'écrit

$$(66) \qquad \frac{\partial M}{\partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial p}\frac{\partial M}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2}\frac{\delta \dfrac{\partial q}{\partial \theta}}{\delta x} = 0,$$

où l'on a posé

$$M = \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial p}\frac{\partial q}{\partial \theta} + \frac{\delta}{\delta y}\operatorname{Log}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2} + \frac{\partial}{\partial p}\frac{\delta q}{\delta x}.$$

Enfin, la condition $x$, $\theta$ s'écrit

$$(67) \qquad \frac{\partial M}{\partial x} + p\frac{\partial M}{\partial z} + \lambda\frac{\partial M}{\partial \theta} + \frac{\partial q}{\partial \theta}\left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p\, \partial x} + p\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p\, \partial z} - \frac{\partial \lambda}{\partial y}\right) = 0.$$

Si l'on tire $\frac{\partial q}{\partial \theta}$ de l'équation (65), on voit que M vérifie l'équation (59) et les conclusions du n° **53** sont valables pour M.

La condition $x$, $z$, compte tenu des définitions des opérateurs $\frac{\delta}{\delta x}$ et $\frac{\delta}{\delta y}$, se réduit à

$$(68) \qquad \frac{\delta^2 q}{\delta x^2} + \frac{\delta}{\delta y}\,\frac{\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial p\, \partial x} + p\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial p\, \partial z} - \dfrac{\partial \lambda}{\partial z}}{\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2}} = 0.$$

C'est la condition pour que les opérateurs $\frac{\delta}{\delta x}$ et $\frac{\delta}{\delta y}$ appliqués à une fonction indépendante de $\theta$, soient échangeables.

En définitive, $\lambda$ et $q$ doivent vérifier les deux conditions suivantes : ils doivent vérifier l'équation (68) et l'expression M, l'équation (59).

**56. Équation** $s = f(x, y, z, p, r)$. — Montrons d'abord [7, $e$] qu'une telle équation est nécessairement linéaire. En effet, si nous prenons l'invariant sous la forme (16), l'équation (18) s'écrit

$$\frac{\partial A}{\partial x} + p\frac{\partial A}{\partial z} + p_1\frac{\partial A}{\partial p} + f\frac{\partial A}{\partial q} = 0. \tag{69}$$

En dérivant par rapport à $p_1$, on obtient

$$\frac{\partial A}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial A}{\partial q} = 0, \tag{70}$$

ce qui prouve que $\frac{\partial f}{\partial p_1}$ ne dépend pas de $p_1$ et l'équation proposée est nécessairement linéaire.

Pour poursuivre l'étude de ces équations, il est inutile de prendre $\theta$ comme variable indépendante au lieu de $q$, car la condition $\frac{\partial f}{\partial q} = 0$ signifie que $\theta$ est linéaire en $q$

$$\theta = q + \theta_1(x, y, z, p) \tag{71}$$

et (22) devient

$$f = \lambda - \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x} + p\frac{\partial \theta_1}{\partial z} + p_1\frac{\partial \theta_1}{\partial p}\right). \tag{72}$$

L'équation proposée étant linéaire, on peut supposer $\lambda$ fonction de $x$, $y$, $z$, $p$ seulement (*voir* n° 50) et C fonction de $x$, $y$, $z$, $p$, $q$ vérifie l'équation (27) qui, développée, s'écrit

$$\frac{\partial C}{\partial x} + p\frac{\partial C}{\partial z} + p_1\frac{\partial C}{\partial p} + f\frac{\partial C}{\partial q} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} + q\frac{\partial \lambda}{\partial z} + f\frac{\partial \lambda}{\partial p} = 0. \tag{73}$$

En différentiant par rapport à $q$, il vient

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x\,\partial q} + p\frac{\partial^2 C}{\partial z\,\partial q} + p_1\frac{\partial^2 C}{\partial p\,\partial q} + f\frac{\partial^2 C}{\partial q^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0, \tag{74}$$

où $f$ a sa valeur (72).

En identifiant à zéro cette expression linéaire en $p_1$, il vient

$$\frac{\partial^2 C}{\partial p\,\partial q} - \frac{\partial \theta_1}{\partial p}\frac{\partial^2 C}{\partial q^2} = 0, \tag{75}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x\,\partial q} + p\frac{\partial^2 C}{\partial z\,\partial q} + \left(\lambda - \frac{\partial \theta_1}{\partial x} - p\frac{\partial \theta_1}{\partial z}\right)\frac{\partial^2 C}{\partial q^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0. \tag{76}$$

L'équation (75) s'intègre et donne

$$\frac{\partial C}{\partial q} = \varphi(x, y, z, \theta), \qquad \text{avec} \quad \theta = q + \theta_1. \tag{77}$$

L'équation (76) devient alors

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + p\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0. \tag{78}$$

En la différentiant par rapport à $\theta$, elle devient

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial \theta} + p\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\,\partial \theta} + \lambda\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0, \tag{79}$$

où $\lambda$ ne dépend pas de $\theta$. $\varphi$ ne doit donc dépendre que des deux arguments $y$ et $\theta + \mu(x, y, z)$, avec

$$\lambda = \frac{\partial \mu}{\partial x} + p\frac{\partial \mu}{\partial z} = \frac{d\mu}{dx}. \tag{80}$$

L'équation proposée, sous la forme (72), devient

$$\frac{d(\theta - \mu)}{dx} = 0.$$

Il y a donc une intégrale intermédiaire

$$\theta - \mu = F(\beta)$$

ou, en écrivant $\theta$ au lieu de $\theta - \mu$, l'équation s'écrit

$$s = \frac{d\theta_1}{dx}$$

et l'intégrale intermédiaire

$$q + \theta_1 = F(\beta),$$

où $\theta_1$ est une fonction de $x, y, z, p$.

Nous énoncerons donc :

*Si une équation $s = f(x, y, z, p, r)$ ne contient pas la variable $q$, elle n'admet pas d'invariant du second ordre relatif à la caractéristique explicite. Si elle en admettait un, elle serait linéaire et admettrait une intégrale intermédiaire.*

### III. — Invariant du second ordre relatif à la caractéristique implicite.

57. D'après la théorie générale, un invariant s'écrira

$$\varphi(x, y, z, p, p_1, q) = \mathrm{A}(x, y, z, p, p_1, q)\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \mathrm{B}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} = \mathrm{F}(\alpha) \tag{81}$$

puisque les dérivées de $x$ et de $p_1$ par rapport à $\alpha$ sont paramétriques.

Cet invariant doit vérifier la condition

$$\frac{d\varphi}{d\beta} = 0. \tag{82}$$

Pour expliciter cette condition, nous utiliserons les équations établies au paragraphe I qui constituent le système ($\Omega$).

Le problème se révélant aussitôt comme d'une très grande complexité, nous nous sommes borné dans ce qui suit, au cas où $\mathrm{B} = 0$. L'invariant se réduit donc à

$$\varphi = \mathrm{A}\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \mathrm{F}(\alpha). \tag{83}$$

La condition (82) se développe de la manière suivante :

$$\frac{d\varphi}{d\beta} = -\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{d\mathrm{A}}{dx}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{d\mathrm{A}}{dy}\frac{\partial x}{\partial \alpha} - \mathrm{A}\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha}\right) = 0. \tag{84}$$

Les dérivées $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial p_1}{\partial \alpha}$ étant paramétriques, l'équation précédente se décompose en deux autres :

$$\mathrm{A}\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2} = 0, \tag{85}$$

$$-\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{d\mathrm{A}}{dx} + \frac{d\mathrm{A}}{dy} - \mathrm{A}\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p_1} = 0. \tag{86}$$

De l'équation (85) il résulte que l'équation proposée est nécessairement linéaire ; nous poserons

$$s = a(x, y, z, p, q)p_1 + b(x, y, z, p, q). \tag{87}$$

Explicitons maintenant l'équation (86)

$$\begin{aligned} -a\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} + p\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z} + p_1\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial p}\right) + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y} + q\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z} + (ap_1 + b)\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial p} \\ + q_1\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial q} + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial p_1}\left(\frac{da}{dx}p_1 + \frac{db}{dx}\right) - \mathrm{A}\frac{da}{dx} = 0. \end{aligned} \tag{88}$$

Mais l'élément $q_1$ est paramétrique; l'équation (88) se décompose aussi en deux :

$$(89) \qquad \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial q} = 0,$$

$$(90) \quad \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y} - a\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} + (q - ap)\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z} + b\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial p} + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial p_1}\left(\frac{da}{dx}p_1 + \frac{ab}{dx}\right) - \mathrm{A}\frac{da}{dx} = 0.$$

D'après l'équation (89), A est indépendant de $q$. Développons l'équation (90) en l'ordonnant par rapport à $p_1$

$$\begin{aligned}(90') \quad \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial p_1}\Bigg[\left(\frac{\partial a}{\partial p} + a\frac{\partial a}{\partial q}\right)p_1^2 \\ + \left(\frac{\partial a}{\partial x} + p\frac{\partial a}{\partial z} + b\frac{\partial a}{\partial q} + a\frac{\partial b}{\partial q} + \frac{\partial b}{\partial p}\right)p_1 \\ + \frac{\partial b}{\partial x} + p\frac{\partial b}{\partial z} + b\frac{\partial b}{\partial q}\Bigg] \\ - \mathrm{A}\left[\left(\frac{\partial a}{\partial p} + a\frac{\partial a}{\partial q}\right)p_1 + \frac{\partial a}{\partial x} + p\frac{\partial a}{\partial z} + b\frac{\partial a}{\partial q}\right] \\ + b\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial p} + (q - ap)\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y} - a\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} = 0,\end{aligned}$$

où A dépend de $x, y, z, p, p_1$ et $a$ et $b$, de $x, y, z, p, q$.

En vertu de la théorie générale des invariants, on peut affirmer que A est un polynome en $p_1$. Pour préciser le degré de ce polynome, nous dériverons quatre fois de suite l'équation précédente par rapport à $q$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}(91) \quad & -\frac{\partial a}{\partial q}\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} + p\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z}\right) + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z} + \frac{\partial b}{\partial q}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial p} \\ & + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial p_1}\left(p_1\frac{\partial}{\partial q}\frac{da}{dx} + \frac{\partial}{\partial q}\frac{db}{dx}\right) - \mathrm{A}\frac{\partial}{\partial q}\frac{da}{dx} = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(92) \quad & -\frac{\partial^2 a}{\partial q^2}\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} + p\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z}\right) + \frac{\partial^2 b}{\partial q^2}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial p} \\ & + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial p_1}\left(p_1\frac{\partial^2}{\partial q^2}\frac{da}{dx} + \frac{\partial^2}{\partial q^2}\frac{db}{dx}\right) - \mathrm{A}\frac{\partial^2}{\partial q^2}\frac{da}{dx} = 0.\end{aligned}$$

En divisant par $\frac{\partial^2 a}{\partial q^2}$ supposé différent de zéro, et en dérivant une troisième fois

$$(93) \quad \frac{\partial}{\partial q}\frac{\frac{\partial^2 b}{\partial q^2}}{\frac{\partial^2 a}{\partial q^2}}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial p} + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial p_1}\left(p_1\frac{\partial}{\partial q}\frac{\frac{\partial^2}{\partial q^2}\frac{da}{dx}}{\frac{\partial^2 a}{\partial q^2}} + \frac{\partial}{\partial q}\frac{\frac{\partial^2}{\partial q^2}\frac{db}{dx}}{\frac{\partial^2 a}{\partial q^2}}\right) - \mathrm{A}\frac{\partial}{\partial q}\frac{\frac{\partial^2}{\partial q^2}\frac{da}{dx}}{\frac{\partial^2 a}{\partial q^2}} = 0.$$

En divisant par $\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial^2 b}{\partial q^2} : \frac{\partial^2 a}{\partial q^2}\right)$ supposé différent de zéro et en dérivant une quatrième fois

$$
(94) \qquad \left(p_1 \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial p_1} - \mathrm{A}\right) \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial}{\partial q} \frac{\frac{\partial^2}{\partial q^2} \frac{da}{dx}}{\frac{\partial^2 a}{\partial q^2}} : \frac{\partial}{\partial q} \frac{\frac{\partial^2 b}{\partial q^2}}{\frac{\partial^2 a}{\partial q^2}} \right) + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial p_1} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial}{\partial q} \frac{\frac{\partial^2}{\partial q^2} \frac{db}{dx}}{\frac{\partial^2 a}{\partial q^2}} : \frac{\partial}{\partial q} \frac{\frac{\partial^2 b}{\partial q^2}}{\frac{\partial^2 a}{\partial q^2}} \right) = 0,
$$

ce qui est de la forme

$$
(94') \qquad \left(p_1 \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial p_1} - \mathrm{A}\right) \mathrm{M} + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial p_1} \mathrm{N} = 0,
$$

où M est linéaire en $p_1$, à condition que

$$
\frac{\partial a}{\partial p} + a \frac{\partial a}{\partial q} \neq 0
$$

et N, à condition que

$$
\frac{\partial b}{\partial p} + a \frac{\partial b}{\partial q} \neq 0.
$$

Si ces deux conditions sont réalisées, A est nécessairement du premier degré en $p_1$. Sinon, dans l'équation (94), le degré du coefficient de M serait supérieur d'une unité à celui du coefficient de N.

Avant de poursuivre l'étude du cas général, nous allons énumérer les cas particuliers que nous avons écartés et dont nous ferons ensuite l'étude.

1° $$\frac{\partial^2 a}{\partial q^2} = 0;$$

2° $$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial^2 b}{\partial q^2} : \frac{\partial^2 a}{\partial q^2}\right) = 0;$$

3° $$\frac{\partial a}{\partial p} + a \frac{\partial a}{\partial q} = 0;$$

4° $$\frac{\partial b}{\partial p} + a \frac{\partial b}{\partial q} = 0;$$

5° $$\frac{\partial a}{\partial p} + a \frac{\partial a}{\partial q} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial b}{\partial p} + a \frac{\partial b}{\partial q} = 0;$$

6° $$\frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{\partial^2 \left(\frac{\partial a}{\partial p} + a \frac{\partial a}{\partial q}\right)}{\partial q^2} : \frac{\partial^2 a}{\partial q^2}\right] = 0.$$

**58.** Dans le cas général, nous pourrons donc poser

$$\varphi = (A_1 p_1 + B_1)\frac{\partial x}{\partial \alpha}, \tag{95}$$

où $A_1$ et $B_1$ sont des fonctions de $x$, $y$, $z$, $p$ seulement; ces fonctions vérifient le système déduit de l'équation (90) en égalant à zéro les coefficients des différentes puissances de $p_1$

$$\begin{aligned}(96)\quad & \frac{\partial A_1}{\partial y} - a\frac{\partial A_1}{\partial x} + (q - ap)\frac{\partial A_1}{\partial z} + b\frac{\partial A_1}{\partial p} \\ & \quad + A_1\left(\frac{\partial b}{\partial p} + a\frac{\partial b}{\partial q}\right) - B_1\left(\frac{\partial a}{\partial p} + a\frac{\partial a}{\partial q}\right) = 0, \\ (97)\quad & \frac{\partial B_1}{\partial y} - a\frac{\partial B_1}{\partial x} + (q - ap)\frac{\partial B_1}{\partial z} + b\frac{\partial B_1}{\partial p} \\ & \quad + A_1\left(\frac{\partial b}{\partial x} + p\frac{\partial b}{\partial z} + b\frac{\partial b}{\partial q}\right) - B_1\left(\frac{\partial a}{\partial x} + p\frac{\partial a}{\partial z} + b\frac{\partial a}{\partial q}\right) = 0,\end{aligned}$$

où les inconnues $A_1$ et $B_1$ dépendent de $x$, $y$, $z$, $p$, alors que les coefficients dépendent de $x$, $y$, $z$, $p$, $q$.

Sans pouvoir donner la solution complète de ce système, nous allons étudier le cas où $a$ et $b$, dépendent de $p$ et $q$ seulement et, par suite $A_1$ et $B_1$, de $p$ seul. On obtient alors

$$b\frac{dA_1}{dp} + A_1\left(\frac{\partial b}{\partial p} + a\frac{\partial b}{\partial q}\right) - B_1\left(\frac{\partial a}{\partial p} + a\frac{\partial a}{\partial q}\right) = 0, \tag{98}$$

$$\frac{dB_1}{dp} + A_1\frac{\partial b}{\partial q} - B_1\frac{\partial a}{\partial p} = 0. \tag{99}$$

D'où l'on déduit, en remplaçant dans la première équation $A_1\frac{\partial b}{\partial q} - B_1\frac{\partial a}{\partial q}$ par $-\frac{dB_1}{dp}$,

$$\frac{\partial}{\partial p}(A_1 b - B_1 a) = 0 \tag{100}$$

ou

$$A_1 b - B_1 a = Q,$$

Q désignant une fonction de $q$ seul.

D'après (99), on voit que $Q'$ est une constante $C_1$, donc

$$Q = C_1 q + C_2.$$

Puis

$$B_1 = -C_1 p + C_3.$$

D'ailleurs

$$A_1 = B_1 \frac{a}{b} + \frac{Q}{b}.$$

Donc

$$\frac{a}{b} = P_1 \quad \text{et} \quad \frac{Q}{b} = \frac{1}{P},$$

P et $P_1$ désignant deux fonctions de $p$ seul.

D'où la solution du problème :

$$\begin{aligned} a &= PP_1(C_1 q + C_2), \\ b &= P(C_1 q + C_2), \\ A_1 &= (-C_1 p + C_3)P_1 + \frac{1}{P}, \\ B_1 &= -C_1 p + C_3. \end{aligned}$$

59. **Cas particulier : $a$ et $b$ linéaires en $q$.** — Remarquons tout de suite qu'il est impossible que l'un des coefficients $a$ ou $b$ soit linéaire, sans que l'autre le soit en même temps. Supposons en effet que $a$ soit seul linéaire en $q$. D'après l'équation (96), $b$ est exponentiel en $q$; mais l'équation (97), à cause de la présence du terme $b\frac{\partial b}{\partial q}$, montre que cette hypothèse est inadmissible. Le raisonnement est le même si l'on suppose $b$ seul linéaire en $q$. Nous poserons donc

$$a = a_1 q + a_2, \qquad b = b_1 q + b_2$$

et le système (96)-(97) se décompose en quatre équations où les coefficients et les inconnues dépendent des mêmes variables $x, y, z, p$.

60. **Cas particulier où $\frac{\partial a}{\partial p} + a\frac{\partial a}{\partial q} = 0$ et $\frac{\partial b}{\partial p} + a\frac{\partial b}{\partial q} = 0$.** — Si $\frac{\partial b}{\partial p} + a\frac{\partial b}{\partial q}$ était seul nul, le premier terme de l'équation (94′) serait d'un degré supérieur en $p_1$ à celui du deuxième terme et l'équation en question n'aurait pas de solution. Ce cas est donc à exclure. Il reste, au contraire, à étudier le cas où $\frac{\partial a}{\partial p} + a\frac{\partial a}{\partial q}$ est seul nul.

Ces préliminaires étant établis, abordons l'étude du cas où ces deux expressions sont simultanément nulles. Ici, A est encore linéaire en $p_1$ et les équations (96) et (97) s'écrivent

$$(101) \qquad \frac{\partial A_1}{\partial y} - a\frac{\partial A_1}{\partial x} + (q-ap)\frac{\partial A_1}{\partial z} + b\frac{\partial A_1}{\partial p} = 0,$$

$$(102) \quad \frac{\partial B_1}{\partial y} - a\frac{\partial B_1}{\partial x} + (q-ap)\frac{\partial B_1}{\partial z} + b\frac{\partial B_1}{\partial p} + A\left(\frac{\partial b}{\partial x} + p\frac{\partial b}{\partial z} + b\frac{\partial b}{\partial q}\right) - B_1\left(\frac{\partial a}{\partial x} + p\frac{\partial a}{\partial z} + b\frac{\partial a}{\partial q}\right) = 0.$$

La relation $\frac{\partial a}{\partial p} + a\frac{\partial a}{\partial q} = 0$ s'intègre et donne

$$(103) \qquad q = ap + \varphi(a, x, y, z),$$

où $\varphi$ est une fonction arbitraire des arguments indiqués.

Prenons maintenant $a$ comme variable indépendante au lieu de $q$. La deuxième relation $\frac{\partial b}{\partial p} + a\frac{\partial b}{\partial q} = 0$ devient simplement

$$(104) \qquad \frac{\partial b}{\partial p} = 0$$

et $b$ est une fonction de $x$, $y$, $z$, $a$.

L'équation (101) s'intègre : en effet, les coefficients ne doivent pas dépendre de $q$, donc, après le changement de variable, de $a$ :

*Première solution :*

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} = 0, \qquad \varphi = aX'_1, \qquad b = aX'_2,$$

où $X_1$ et $X_2$ sont des fonctions de $x$ seul.

On obtient

$$A_1 = \Phi(X_1 - z, X_2 + p),$$

où $\Phi$ est arbitraire.

L'équation (102) devient alors

$$(105) \qquad \frac{\partial B_1}{\partial y} = 0,$$

$$(106) \quad -\frac{\partial B_1}{\partial x} + X'_1\frac{\partial B_1}{\partial z} + X'_2\frac{\partial B_1}{\partial p} + \Phi\left(X''_2 + \frac{X'_2}{p+X'_1}\right) - B_1\left(\frac{X''_1}{p+X'_1} + \frac{X'_2}{p+X'_1}\right) = 0$$

que l'on peut intégrer si l'on se donne $\Phi$.

*Deuxième solution :*

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial A_1}{\partial y} = 0, \qquad b = \lambda(z, p)\varphi.$$

Dans ces conditions, l'équation (101) se réduit à

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \lambda(z, p)\frac{\partial A_1}{\partial p} = 0. \tag{107}$$

C'est l'équation linéaire aux dérivées partielles correspondant à l'équation différentielle du premier ordre la plus générale. A chaque équation différentielle : $\frac{dp}{dz} = \lambda(z, p)$, que l'on sait intégrer correspond une fonction $A_1$. Il s'agit maintenant de déterminer $B_1$ ; nous supposerons que $B_1$, comme $A_1$, est indépendant de $x$ et $y$. Alors l'équation (102) s'écrit

$$\frac{\partial B_1}{\partial z} + \frac{\partial B_1}{\partial p} + A_1\left[\lambda\left(\frac{\partial \operatorname{Log}\varphi}{\partial x} + p\frac{\partial \operatorname{Log}\varphi}{\partial z} + \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial a}}{p + \frac{\partial \varphi}{\partial a}}\right) + p\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right] - B_1\frac{\frac{\partial \operatorname{Log}\varphi}{\partial x} + p\frac{\partial \operatorname{Log}\varphi}{z} - \lambda}{p + \frac{\partial \varphi}{\partial a}} = 0. \tag{108}$$

Pour que les coefficients de cette équation soient indépendants de $x$, $y$ et $a$, il est nécessaire que $\varphi$ soit exponentiel en $x$, linéaire en $a$ et indépendant de $y$. Dans ce cas, l'équation (108) s'intègre en même temps que l'équation (107), puisque c'est la même équation avec second membre.

En résumé, $A_1$ et $B_1$ sont des fonctions de $z$ et $p$ obtenues par intégration du système (107)-(108), $\varphi$ étant arbitraire en $z$, exponentiel en $x$, linéaire en $a$ et indépendant de $y$, avec $b = \lambda(z, p)\varphi$, où $\lambda$ est arbitraire, sous la seule réserve que l'on sache intégrer l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{dp}{dz} = \lambda(z, p).$$

*Troisième solution*

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial A_1}{\partial z} = 0.$$

La solution se ramène ici aussi à celle de l'équation différentielle ordinaire du premier ordre, à condition de poser

$$b = \lambda(x, p)a,$$

$\varphi$ restant ici indépendant de $y$ et $z$ et linéaire en $a$.

*Quatrième solution :*

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial A_1}{\partial p} = 0.$$

Même résultat que précédemment, à condition de poser

$$\varphi = \lambda(x, z)a$$

et

$$b = \mu(x, z)a,$$

où $\lambda$ et $\mu$ sont des fonctions arbitraires des arguments indiqués.

*Cinquième solution :*

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial A_1}{\partial p} = 0.$$

Ici, $\varphi$ doit être fonction de $y$ et $z$ seulement; on trouve ensuite

$$b = p\,\lambda(y, z).$$

*Sixième solution :*

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial A_1}{\partial z} = 0.$$

La solution est ici beaucoup plus particulière que dans les cas précédents : $b$ est fonction de $y$ seul et $\varphi = bz$.

61. **Cas particulier** : $\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial^2 b}{\partial q^2} : \frac{\partial^2 a}{\partial q^2}\right) = 0$. Cette condition intégrée s'écrit

$$b = la + mq + n, \tag{109}$$

où $l$, $m$, $n$ sont des fonctions de $x$, $y$, $z$, $p$.

En dérivant trois fois l'équation (90) par rapport à $q$, après division par $\dfrac{\partial^2 a}{\partial q^2}$, on obtient

$$(110)\quad \left[\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial p_1}(p_1+l)-\mathrm{A}\right]\left[p_1\frac{\partial}{\partial q}\,\frac{\dfrac{\partial^2}{\partial q^2}\left(\dfrac{\partial a}{\partial p}+a\dfrac{\partial a}{\partial q}\right)}{\dfrac{\partial^2 a}{\partial q^2}}+\frac{\partial}{\partial q}\,\frac{\dfrac{\partial^2}{\partial q^2}\left(\dfrac{\partial a}{\partial x}+p\dfrac{\partial a}{\partial z}+b\dfrac{\partial a}{\partial q}\right)}{\dfrac{\partial^2 a}{\partial q^2}}\right]=0.$$

Le cas étudié se subdivise donc en deux suivant que l'on annule le premier ou le deuxième crochet.

*Première solution :*

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial p_1}(p_1+l)-\mathrm{A}=0.$$

Cette condition s'intègre

$$(111)\qquad \mathrm{A}=\mathrm{A}_1(x,y,z,p)(p_1+l).$$

En identifiant à zéro l'équation (90), dans laquelle $b$ a la valeur (109) et A, la valeur (111), il vient

$$(112)\quad a\left(m+\frac{\partial l}{\partial p}+l\frac{\partial \operatorname{Log}\mathrm{A}_1}{\partial p}-\frac{\partial \operatorname{Log}\mathrm{A}_1}{\partial x}-p\frac{\partial \operatorname{Log}\mathrm{A}_1}{\partial z}\right)+q\frac{\partial m}{\partial p}+\frac{\partial n}{\partial p}+(mq+n)\frac{\partial \operatorname{Log}\mathrm{A}_1}{\partial p}+\frac{\partial \operatorname{Log}\mathrm{A}_1}{\partial y}+q\frac{\partial \operatorname{Log}\mathrm{A}_1}{\partial z}=0,$$

$$\begin{aligned}(113)\quad & la\left(m+\frac{\partial l}{\partial p}+l\frac{\partial \operatorname{Log}\mathrm{A}_1}{\partial p}-\frac{\partial \operatorname{Log}\mathrm{A}_1}{\partial x}-p\frac{\partial \operatorname{Log}\mathrm{A}_1}{\partial z}\right)\\ &+q\left(\frac{\partial m}{\partial x}+p\frac{\partial m}{\partial z}\right)+\frac{\partial n}{\partial x}+p\frac{\partial n}{\partial z}\\ &+(mq+n)\left(m+\frac{\partial l}{\partial p}+l\frac{\partial \operatorname{Log}\mathrm{A}_1}{\partial p}\right)\\ &+l\left(\frac{\partial \operatorname{Log}\mathrm{A}_1}{\partial y}+q\frac{\partial \operatorname{Log}\mathrm{A}_1}{\partial z}\right)+\frac{\partial l}{\partial y}+q\frac{\partial l}{\partial z}=0.\end{aligned}$$

Dans les deux équations précédentes, seul $a$ dépend de $q$ et l'on suppose essentiellement qu'il n'en dépend pas linéairement. Or, ces équations sont linéaires en $a$ et $q$. Il en résulte donc une double identification en $a$ et $q$. D'où le système :

$$(114) \qquad m + \frac{\partial l}{\partial p} + l\frac{\partial \operatorname{Log} A_1}{\partial p} - \frac{\partial \operatorname{Log} A_1}{\partial x} - p\frac{\partial \operatorname{Log} A_1}{\partial z} = 0,$$

$$(115) \qquad \frac{\partial m}{\partial p} + m\frac{\partial \operatorname{Log} A_1}{\partial p} + \frac{\partial \operatorname{Log} A_1}{\partial z} = 0,$$

$$(116) \qquad \frac{\partial n}{\partial p} + n\frac{\partial \operatorname{Log} A_1}{\partial p} + \frac{\partial \operatorname{Log} A_1}{\partial y} = 0,$$

$$(117) \quad \frac{\partial m}{\partial x} + p\frac{\partial m}{\partial z} + m\left(m + \frac{\partial l}{\partial p} + l\frac{\partial \operatorname{Log} A_1}{\partial p}\right) + l\frac{\partial \operatorname{Log} A_1}{\partial z} + \frac{\partial l}{\partial z} = 0,$$

$$(118) \quad \frac{\partial n}{\partial x} + p\frac{\partial n}{\partial z} + n\left(m + \frac{\partial l}{\partial p} + l\frac{\partial \operatorname{Log} A_1}{\partial p}\right) + l\frac{\partial \operatorname{Log} A_1}{\partial y} + \frac{\partial l}{\partial y} = 0$$

que l'on peut écrire sous la forme équivalente :

$$(119) \qquad \frac{\partial A_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial p}[(l + mp)A_1],$$

$$(120) \qquad \frac{\partial A_1}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial p}(nA_1),$$

$$(121) \qquad \frac{\partial A_1}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial p}(mA_1),$$

$$(122) \qquad \frac{\partial m}{\partial x} + p\frac{\partial m}{\partial z} + m^2 + m\frac{\partial l}{\partial p} - l\frac{\partial m}{\partial p} + \frac{\partial l}{\partial z} = 0,$$

$$(123) \qquad \frac{\partial n}{\partial x} + p\frac{\partial n}{\partial z} + mn + n\frac{\partial l}{\partial p} - l\frac{\partial n}{\partial p} + \frac{\partial l}{\partial y} = 0.$$

Les équations (119), (120) et (121) définissent $A_1$. Les conditions d'intégrabilité de $A_1$ sont précisément les équations (122) et (123) et

$$(124) \qquad \frac{\partial m}{\partial y} - \frac{\partial n}{\partial z} + n\frac{\partial m}{\partial p} - m\frac{\partial n}{\partial p} = 0.$$

Le système (122)-(123) où $l$ est l'inconnue, conduit précisément à la condition d'intégrabilité (124). D'où la solution : On choisit deux fonctions $m$ et $n$ des quatre variables $x$, $y$, $z$, $p$ qui vérifient l'équation (124); puis $l$ est déterminé par le système (122)-(123). Enfin, $A_1$ est obtenu par la résolution du système (119)-(120)-(121). L'équation proposée est alors

$$s = a(p_1 + l) + mq + n$$

et l'invariant

$$\Phi = A_1(p_1 + l)\frac{dx}{d\alpha} = F(\alpha).$$

Il est facile de trouver des solutions assez générales de l'équation (124). Soit M une fonction de $x$, $y$, $z$, $p$. Nous poserons

$$m = \frac{\partial M}{\partial z}, \qquad n = \frac{\partial M}{\partial y},$$

M devra vérifier la condition

$$\frac{\partial M}{\partial p} = \varphi(M, x, p),$$

où $\varphi$ est une fonction arbitraire des arguments indiqués.

C'est en somme l'équation différentielle du premier ordre la plus générale où $x$, $y$, $z$ apparaissent comme des paramètres.

*Exemple :* $m = e^p$, $n = e^p$. — On en déduit

$$l = -p\, e^p,$$

puis

$$A_1 = e^{-p}\,\varphi(y + z + e^{-p}),$$

$\varphi$ étant une fonction arbitraire de l'argument indiqué.

*Deuxième solution.* — Le deuxième crochet de l'équation (110) doit être nul, quel que soit $p_1$. On obtient donc les deux conditions

$$(125)\qquad \frac{\partial}{\partial q}\,\frac{\dfrac{\partial^2}{\partial q^2}\left(\dfrac{\partial a}{\partial p} + a\dfrac{\partial a}{\partial q}\right)}{\dfrac{\partial^2 a}{\partial q^2}} = 0,$$

$$(126)\qquad \frac{\partial}{\partial q}\,\frac{\dfrac{\partial^2}{\partial q^2}\left[\dfrac{\partial a}{\partial x} + p\dfrac{\partial a}{\partial z} + (la + mq + n)\dfrac{\partial a}{\partial q}\right]}{\dfrac{\partial^2 a}{\partial q^2}} = 0.$$

En intégrant ces deux relations,

$$(127)\qquad \frac{\partial a}{\partial p} + a\frac{\partial a}{\partial q} = \lambda a + \mu q + \nu,$$

$$(128)\qquad \frac{\partial a}{\partial x} + p\frac{\partial a}{\partial z} + (la + mq + n)\frac{\partial a}{\partial q} = \rho a + \sigma q + \tau,$$

$\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\rho$, $\sigma$, $\tau$, étant des fonctions arbitraires de $x$, $y$, $z$, $p$.

En tirant $a\dfrac{\partial a}{\partial q}$ de (127) et le portant dans (128) et en ajoutant à $a$

une expression linéaire convenablement choisie par rapport à $q$, il vient

$$\frac{\partial a}{\partial x}+p\frac{\partial a}{\partial z}-l\frac{\partial a}{\partial p}+(mq+n)\frac{\partial a}{\partial q}=0. \tag{129}$$

Reprenant l'équation (90) où l'on remplace $b$ par sa valeur (109), $\frac{\partial a}{\partial p}+a\frac{\partial a}{\partial q}$ par sa valeur (127) et $\frac{\partial a}{\partial x}+p\frac{\partial a}{\partial z}+b\frac{\partial a}{\partial q}$ par sa valeur (128) et en opérant, comme plus haut, la double identification à zéro par rapport à $a$ et $q$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A}{\partial p_1}\left[\lambda p_1^2+\left(l\lambda+m+\frac{\partial \lambda}{\partial p}\right)p_1+\frac{\partial l}{\partial x}+p\frac{\partial l}{\partial z}+lm\right] \\
&\qquad -A\lambda p_1+l\frac{\partial A}{\partial p}-\left(\frac{\partial A}{\partial x}+p\frac{\partial A}{\partial z}\right)=0,
\end{aligned} \tag{130}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A}{\partial p_1}\left[\mu p_1^2+\left(l\mu+\frac{\partial m}{\partial p}\right)p_1+\frac{\partial m}{\partial x}+p\frac{\partial m}{\partial z}+m^2\right] \\
&\qquad -A\mu p_1+m\frac{\partial A}{\partial p}+\frac{\partial A}{\partial z}=0,
\end{aligned} \tag{131}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A}{\partial p_1}\left[\nu p_1^2+\left(l\nu+\frac{\partial n}{\partial p}\right)p_1+\frac{\partial n}{\partial x}+p\frac{\partial n}{\partial z}+mn\right] \\
&\qquad -A\nu p_1+n\frac{\partial A}{\partial p}+\frac{\partial A}{\partial y}=0,
\end{aligned} \tag{132}$$

où la fonction inconnue A dépend seule de $p_1$.

Comme on l'a vu plus haut, de la forme de ces équations, on peut conclure que A est linéaire en $p_1$. Nous poserons

$$A=A_1p_1+B_1 \tag{133}$$

et les trois équations précédentes se décomposeront chacune en deux.

On obtiendra ainsi un système que vérifient $A_1$ et $B_1$ mais nous ne sommes pas parvenu à mener à bien l'étude de ce système.

## BIBLIOGRAPHIE.


[1] DRACH, *Thèse*, Paris, 1898.

[2] DRACH, *Bull. Soc. math. France*, 1924.

[3] DRACH, *Intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par l'usage explicite des caractéristiques d'Ampère*, Bologna, 1928.

[4] DRACH, *C. R. Acad. Sc.*, t. 208, 1939, p. 1181-1185.

[5] AMPÈRE, *J. Éc. Roy. Polytech.*, XVII^e^ et XVIII^e^ cahiers, 1815-1820.

[6] GOURSAT, *Cours d'Analyse* (Paris, Gauthier-Villars) :

*a.* t. II, p. 656;
*b.* t. III.

[7] GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre :*

*a.* t. I, p. 24-29 et 171-175;
*b.* t. I, p. 62 et suiv.;
*c.* t. I, p. 216;
*d.* t. I, chap. VI;
*e.* t. II, p. 171.

[8] GOURSAT, *C. R. Acad. Sc.*, t. 120, 1895, p. 712.

[9] GOURSAT, *Bull. Soc. math. France*, 1897 et 1900.

[10] GOURSAT, *Ann. Fac. Sc. Toulouse*, t. 1, 1899.

[11] DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces :*

*a.* t. II, livre IV, chap. IX;
*b.* t. III, n^os^ 604-605;
*c.* t. III, n^o^ 716.

[12] HEILBRONN, *C. R. Acad. Sc.*, t. 208, 1939, p. 1380-1382.

# TABLE DES MATIÈRES.

## CHAPITRE I.

A. — Généralités sur les équations du second ordre.



B. — Invariants et involutions.



## CHAPITRE II.

Intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par l'usage explicite des caractéristiques d'Ampère.



## CHAPITRE III.

Invariants et involutions de l'équation $s = f(x, y, z, p, q)$.



## CHAPITRE IV.

Équations $s = f(x, y, z, p, q, r)$ admettant un invariant du second ordre.