Mémorial des sciences mathématiques

Pierre Samuel

Algèbre locale

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 123 (1953)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1953__123__1_0>

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

Henri VILLAT

Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE CXXIII

Algèbre locale

Par M. Pierre SAMUEL
Professeur à l'Université de Clermont-Ferrand

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1953

ALGÈBRE LOCALE

Par Pierre SAMUEL

INTRODUCTION

Nous entendrons par « Algèbre locale » le corps de doctrines algébriques qui s'est développé afin de rendre possible l'étude d'une variété algébrique ou analytique au voisinage d'un point. Lorsqu'on quitte le corps des nombres complexes pour des corps de base plus généraux, la notion topologique de voisinage d'un point perd son sens, mais il reste à notre disposition un certain nombre de situations algébriques, dont la théorie constituera, par définition, « l'étude locale de la variété V au voisinage du point P ». *Grosso modo*, on considère d'abord l'anneau A des fonctions (rationnelles ou méromorphes, selon le cas) sur V qui ne sont pas infinies en P (c'est un anneau local). Sur le corps des nombres complexes, chacune de ces fonctions admet un développement en série de Taylor au voisinage de P, et il est naturel de considérer l'anneau de toutes les séries de Taylor convergentes; mais, par bonheur pour les généralisations à un corps de base quelconque, le fait, pour une série de puissances, de converger dans un voisinage de P, n'a aucune espèce d'importance, au moins dans les questions locales. On introduit donc une sorte d'anneau de séries formelles contenant A (l'anneau local complété de A), dont la formation à partir de A est possible sur tout corps de base.

On rejoint ici un autre courant d'idées, celui des développements p-adiques des nombres entiers, et des corps et anneaux p-adiques. Là aussi on est dans la situation « anneau local-anneau local complété ». Et l'Algèbre locale va contenir l'étude des anneaux p-adiques comme cas particulier.

D'autre part, l'étude d'un nombre fini de points d'une variété a amené les algébristes à considérer certains anneaux, plus généraux que les anneaux locaux, appelés « anneaux semi-locaux ». Si l'on veut aller plus loin, par exemple pour l'étude d'une variété V en tous les points d'une sous-variété W, s'introduisent des anneaux naturellement munis d'une topologie définie par les puissances d'un idéal (« anneaux $\mathfrak{m}$-adiques ») qui généralisent encore les anneaux semi-locaux.

L'étude des anneaux locaux, semi-locaux et $\mathfrak{m}$-adiques a constitué, depuis une quinzaine d'années, un des secteurs les plus actifs de l'Algèbre commutative. Si l'étude d'anneaux locaux particuliers (p-adiques, séries formelles) remonte à Hensel et Hilbert, c'est en 1938 que Krull [45] entreprit l'étude systématique des anneaux locaux. Ceux-ci furent aussitôt utilisés par Zariski dans ses beaux Mémoires de Géométrie algébrique et son élève I. S. Cohen élucida, vers 1943, la structure des anneaux locaux complets [20]. Simultanément, Chevalley développa beaucoup cette théorie, qui devait lui servir de base à celle des multiplicités d'intersection des variétés algébriques et algébroïdes [16], et introduisit les anneaux semi-locaux [18]. En 1946, enfin, Zariski dégagea la notion d'anneau $\mathfrak{m}$-adique [93], comme préliminaire nécessaire à sa démonstration du principe de dégénérescence. Depuis cette époque, la théorie a reçu divers perfectionnements.

Le but de cet Ouvrage est de donner un compte rendu aussi complet que possible de la théorie des anneaux locaux et de leurs généralisations. Cependant, nous avons laissé de côté les anneaux p-adiques et les anneaux de séries formelles à une variable ; ce sont là, en effet, des « anneaux locaux de dimension 1 », pour lesquels une grande partie des résultats démontrés ici sont triviaux et dont l'étude arithmétique fine (par exemple au moyen des valuations) n'a pas d'analogue pour les anneaux de dimension supérieure. Nous nous sommes donc borné, en général, aux propriétés valables pour les anneaux de dimension quelconque. Faute de place, nous avons renoncé à inclure les applications géométriques (points simples, multiplicités d'intersection), pour lesquelles nous renvoyons le lecteur aux Mémoires originaux [16], [84], [63].

Nous énumérerons plus loin les connaissances préliminaires qu'exige la lecture de cet Ouvrage. Comme il est coutumier dans la collection du « *Mémorial* », les démonstrations ont été souvent réduites à leur plus simple expression; il est cependant espéré qu'un lecteur attentif et quelque peu coutumier des anneaux commutatifs, n'aura pas de difficulté à les suivre. Nous avons, naturellement, donné plus de détails dans les démonstrations publiées ici pour la première fois (au moins sous cette forme), que dans celles de résultats que l'on peut trouver textuellement dans les Mémoires originaux; dans ce cas, un numéro entre crochets ([54], par exemple) réfère à la bibliographie. Seuls, certains résultats importants ont été érigés en propositions ou théorèmes. Mais, afin de faciliter les références, les paragraphes ont été découpés en alinéas numérotés par des lettres latines; ainsi (I, 6, *c*) désigne l'alinéa *c*. du paragraphe 6 du chapitre I.

Terminologie. — Nous avons, en général, suivi l'usage de N. Bourbaki et de ses collaborateurs. De plus (il ne s'agit ici que d'anneaux commutatifs) :

a. Un anneau A est dit *noethérien* si tout idéal de A admet une base finie; autrement dit, toute famille non vide d'idéaux de A, ordonnée par inclusion, contient un élément maximal. Un anneau A est appelé un *anneau d'Artin* si toute famille non vide d'idéaux de A, ordonnée par inclusion, contient un élément minimal;

b. Un élément x d'un anneau contenant A est dit *entier sur* A s'il satisfait à une équation de la forme $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \, (a_i \in A)$ (équation dite *de dépendance intégrale*). Un anneau A est dit *intégralement fermé* dans un anneau B contenant A si tout élément de B entier sur A est élément de A. Un anneau A est dit *intégralement clos* s'il est intégralement fermé dans son anneau des fractions (*cf.* [5], § 9, n° 4);

c. Un anneau A est appelé un *anneau local* s'il est noethérien, et si l'ensemble des éléments non inversibles de A est un idéal $\mathfrak{m}$ (qui est alors l'unique idéal maximal de A);

d. Un anneau A est dit *normal*, s'il est anneau d'intégrité, et s'il est intersection d'une famille Φ d'anneaux de valuations discrètes de son corps des fractions, telle que tout x non nul de A ne soit non inversible que dans un nombre fini d'anneaux de valuations $V \in \Phi$ (ce sont les « endliche diskrete Hauptordnungen » de Krull ([42], § 37)]. Parmi les anneaux normaux figurent les anneaux où tout élément admet une unique décomposition en facteurs irréductibles; ces anneaux seront dits *factoriels*.

Résultats supposés connus du lecteur. — *a.* Les notions générales sur les corps, anneaux, idéaux, modules et espaces vectoriels, telles qu'elles se trouvent dans Bourbaki [5], [6], [8], dans van der Waerden [77] ou dans tout autre traité d'Algèbre moderne. Certains rudiments de Topologie générale sont aussi utilisés quelquefois (*cf.* [9], [10]);

b. Le fait que, si A est un anneau noethérien, les anneaux de polynomes et de séries formelles sur A sont aussi noethériens;

c. Les notions d'idéal premier P(A/$\mathfrak{p}$ est anneau d'intégrité) et d'idéal primaire $\mathfrak{q}$ (dans A/$\mathfrak{q}$ tout diviseur de zéro est nilpotent);

d. Le fait que, dans un anneau noethérien, tout idéal $\mathfrak{b}$ est intersection d'un nombre fini d'idéaux primaires $\mathfrak{q}_i$. Dans une décomposition « la plus courte possible », $\mathfrak{b} = \bigcap_i \mathfrak{q}_i$, les $\mathfrak{q}_i$ sont appelés les idéaux (ou composantes) primaires de $\mathfrak{b}$; les idéaux premiers $\mathfrak{p}_i$ des $\mathfrak{q}_i$ sont appelés les idéaux premiers de $\mathfrak{b}$. Parmi les idéaux premiers de $\mathfrak{b}$, certains ne contiennent aucun autre $\mathfrak{p}_i$; on les appelle idéaux premiers minimaux (ou isolés) de $\mathfrak{b}$; les composantes primaires correspondantes sont dites isolées et sont déterminées de façon unique ($\mathfrak{q}_i$ est l'ensemble des x pour lesquels il existe $s \notin \mathfrak{p}_i$ tel que $sx \in \mathfrak{b}$). Les autres composantes primaires de $\mathfrak{b}$ sont dites immergées. Si ($\mathfrak{p}_i$) est la famille des idéaux premiers de l'idéal (o) de A, les diviseurs de zéro de A sont les éléments de $\bigcup_i \mathfrak{p}_i$ et les éléments nilpotents de A sont ceux de $\bigcap_i \mathfrak{p}_i$ (Pour tout ceci, *voir*, par exemple, [77], chap. XII, [42], § 2 ou un prochain volume de N. Bourbaki.)

e. Les caractérisations des éléments entiers sur un anneau ([77], chap. XIV), en particulier celles qui font intervenir les spécialisations et valuations ([84], chap. II ou prochain volume de N. Bourbaki);

f. Le fait qu'un anneau d'intégrité noethérien et intégralement clos est un anneau normal ([42], n° 37).

Il va sans dire qu'une certaine connaissance de la Géométrie algébrique aidera beaucoup le lecteur à comprendre pourquoi diverses notions algébriques ont été introduites; mais une telle connaissance n'est nullement nécessaire pour la stricte intelligence de cet Ouvrage.

CHAPITRE I.

Anneaux de Zariski.

Sauf mention expresse du contraire, tous les anneaux considérés ici sont supposés commutatifs et munis d'un élément unité.

Soient A un anneau, $\mathfrak{m}$ un idéal de A. Les puissances $(\mathfrak{m}^n)$ forment un système fondamental de voisinages de o pour une topologie compatible avec la structure d'anneau de A ([10], chap. III, § 5). Pour que celle-ci soit *séparée*, il faut et il suffit que $\bigcap_n \mathfrak{m}^n = (0)$.

Proposition 1. — *Soient* A *un anneau noethérien et* $\mathfrak{m}$ *un idéal de* A; *pour que* $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n = (0)$, *il faut et il suffit qu'aucun élément de* $1+\mathfrak{m}$ *ne soit diviseur de zéro dans* A [42].

De $mx = x (m \in \mathfrak{m},\ x \neq 0)$, on déduit par récurrence

$$x = m^n x, \qquad \text{d'où} \qquad x \in \bigcap \mathfrak{m}^n.$$

Posons réciproquement $\mathfrak{b} = \bigcap \mathfrak{m}^n$; la considération de la décomposition primaire de $\mathfrak{b}\mathfrak{m}$ montre qu'il existe un exposant s tel que $\mathfrak{b}\mathfrak{m} \supset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{m}^s$ ([84], chap. III, lemme 3); d'où $\mathfrak{b}\mathfrak{m} = \mathfrak{b}$; si $(b_1, \ldots, b_r)$ est une base de $\mathfrak{b}$, on a

$$b_i = \sum_j m_{ij} b_j (m_{ij} \in \mathfrak{m}), \qquad \text{d'où} \qquad d b_j = 0$$

en posant $d = \mathrm{d}$ et $(\delta_{ij} - m_{ij})$; comme $d \in 1 + \mathfrak{m}$, ceci implique $b_j = 0$ et $B = (0)$.

Un anneau topologique séparé et noethérien A dont la topologie est définie par les puissances $(\mathfrak{m}^n)$ d'un idéal $\mathfrak{m}$ de A, est appelé un *anneau* $\mathfrak{m}$-*adique*.

1. Complétion et idéaux d'un anneau $\mathfrak{m}$-adique [43]. — *a.* Si A est un anneau $\mathfrak{m}$-adique et si $\mathfrak{m}'$ est un idéal tel que $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}' \supset \mathfrak{m}^s$, A est aussi $\mathfrak{m}'$-adique ; on peut donc remplacer $\mathfrak{m}$ par son « radical », intersection des idéaux premiers de $\mathfrak{m}$.

b. Soit $(m_1, \ldots, m_n)$ une base de $\mathfrak{m}$; l'*anneau complété* $\hat{A}$ de A est *noethérien* en tant qu'image de l'anneau de séries formelles $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ par l'homomorphisme continu φ défini par $\varphi(X_i) = m_i$; on voit, de même, que la topologie de $\hat{A}$ est définie par les idéaux $(\overline{\mathfrak{m}}^n)$, où $\overline{\mathfrak{m}} = \hat{A}\mathfrak{m}$ et que

$$\overline{\mathfrak{m}}^n = \hat{A}\,\mathfrak{m}^n \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{m}^n = \overline{\mathfrak{m}}^n \cap A.$$

c. Soit $\mathfrak{b}$ un idéal de l'anneau $\mathfrak{m}$-adique A, $\mathfrak{b} = \bigcap_i \mathfrak{q}_i$ une décomposition primaire de $\mathfrak{b}$. L'adhérence $\overline{\mathfrak{b}}$ de $\mathfrak{b}$ dans A est $\bigcap_n (\mathfrak{b} + \mathfrak{m}^n)$. En vertu de la proposition 1 appliquée à $A/\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}$ est un idéal *fermé* si et seulement si l'on a $(\mathfrak{b} : Ax) = \mathfrak{b}$ pour tout $x \in 1 + \mathfrak{m}$ ou encore si $\mathfrak{p}_i + \mathfrak{m} \neq A$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}_i$ de $\mathfrak{b}$ $\left(\text{puisque } \bigcap_i \mathfrak{p}_i/\mathfrak{b} \text{ est l'ensemble des diviseurs de zéro de } A/\mathfrak{b}\right)$. En particulier, tout idéal contenant $\mathfrak{m}$ est fermé. On en déduit aussi que l'adhérence de $\mathfrak{b}$ est l'intersection de celles des composantes primaires $\mathfrak{q}_i$ dont l'idéal premier $\mathfrak{p}_i$ satisfait à $\mathfrak{p}_i + \mathfrak{m} \neq A$.

d. Un anneau $\mathfrak{m}$-adique A est appelé un *anneau de Zariski*, s'il n'est pas discret et si tout idéal de A est fermé. Il revient au même de dire que l'on a $\mathfrak{p} + \mathfrak{m} \neq A$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A — ou que $\mathfrak{m}$ est contenu dans l'intersection $\mathfrak{r}$ des idéaux maximaux de A ($\mathfrak{r}$ est le radical de A, au sens de Jacobson [41]) — ou encore que tout élément de $1 + \mathfrak{m}$ est inversible. On notera que, si $\mathfrak{m}' \subset \mathfrak{r}$, on a $\bigcap_n \mathfrak{m}'^n = (0)$.

puisque tout élément de $1 + \mathfrak{r}$ est inversible (prop. 1). Les exemples les plus importants d'anneaux de Zariski sont les suivants :

1° L'anneau A est un *anneau local* et $\mathfrak{m}$ est son unique idéal maximal;

2° L'anneau A n'a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux et $\mathfrak{m}$ est leur intersection (ou leur produit, ce qui est ici la même chose) (anneaux *semi-locaux*);

3° L'anneau $\mathfrak{m}$-adique A est *complet* (en effet tout élément $1 - m$ de $1 + \mathfrak{m}$ admet $1 + m + m^2 + \ldots$ pour inverse).

e. On remarquera que les seuls anneaux de Zariski tels que $A/\mathfrak{m}$ soit un anneau d'Artin sont les anneaux semi-locaux; en effet, si $A/\mathfrak{m}$ est un anneau d'Artin, il n'a qu'un nombre fini d'idéaux premiers (d'ailleurs maximaux); comme tout idéal maximal de A contient $\mathfrak{m}$, les idéaux maximaux de A sont en nombre fini, et le radical de $\mathfrak{m}$ est leur intersection (I, 1, *a*).

f. On déduit de (I, 1, *d*) et des propriétés de la complétion d'un espace uniforme, que $\mathfrak{b}\hat{A} \cap A$ est l'adhérence de l'idéal $\mathfrak{b}$ dans l'anneau $\mathfrak{m}$-adique A et que l'on a $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\hat{A} \cap A$ pour tout idéal $\mathfrak{b}$ d'un anneau de Zariski A.

g. Dans un anneau $\mathfrak{m}$-adique A, $S = 1 + \mathfrak{m}$ est un ensemble multiplicativement stable d'éléments qui ne sont pas diviseurs de zéro (prop. 1). On peut alors former l'anneau de fractions A_S; c'est un anneau de Zariski pour la topologie définie par les $(\mathfrak{m}^n A_S)$, puisque tout élément de $1 + \mathfrak{m}A_S$ est inversible dans A_S. Dire que A est un anneau de Zariski équivaut donc à $A = A_S$. Dans le cas général, A est un sous-anneau et un sous-espace topologique de A_S [en effet, de $a(1 - m) \in \mathfrak{m}^n (m \in \mathfrak{m})$, on déduit $a \equiv am(\mathfrak{m}^n)$ et, par récurrence, $a \equiv am^i(\mathfrak{m}^n)$, d'où $a \in \mathfrak{m}^n$ et $\mathfrak{m}^n A_S \cap A = \mathfrak{m}^n$]; les complétés de A et de A_S sont identiques, puisque tout élément de S a un inverse dans $\hat{A}$.

2. Homomorphismes d'anneaux $\mathfrak{m}$-adiques. — *a*. Soit φ une représentation *continue* d'un anneau $\mathfrak{m}$-adique A dans un anneau $\mathfrak{m}'$-adique A'; la continuité veut dire que $\overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{m}'^n) \supset \mathfrak{m}^{s(n)}$ pour tout n, ou encore que $\varphi(\mathfrak{m}^n) \subset \mathfrak{m}'^{t(n)}$, où $t(n)$ tend vers l'infini avec n. En supposant (I, 1, a) que $A'/\mathfrak{m}'$ n'a pas d'éléments nilpotents, on en déduit $\varphi(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}'$, puisque $\varphi(\mathfrak{m}^n) = (\varphi(\mathfrak{m}))^n$; la condition $\varphi(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}'$, implique d'ailleurs à elle seule la continuité de φ.

b. Considérons, en particulier, deux idéaux $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$ d'un même anneau, tels que $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}'$; nous noterons A (resp. A$'$) cet anneau muni de la topologie définie par $\mathfrak{m}$ (resp. $\mathfrak{m}'$). Alors l'application identique φ de A sur A$'$ est continue. Elle se prolonge donc en une application continue $\bar{\varphi}$ du complété $\hat{A}$ dans le complété $\hat{A}'$. Si A$'$ est un anneau de Zariski, l'application $\bar{\varphi}$ est *biunivoque* (en effet, si $\bar{\varphi}(\alpha) = 0 (\alpha \in \hat{A})$, on a, en posant $\alpha = \lim a_n (a_n \in A)$, $a_n - a_i \in \mathfrak{m}^{s(n)}$ pour $i > n$ et $a_i \in \mathfrak{m}'^{t(i)}$, où $s(n)$ et $t(i)$ tendent vers l'infini; d'où $a_n \in \mathfrak{m}^{s(n)} + \mathfrak{m}'^{t(i)}$ et $a_n \in \mathfrak{m}^{s(n)}$, puisque $\mathfrak{m}^{s(n)}$ est un idéal fermé de A; par conséquent, $\alpha = 0$); ainsi $\hat{A}$ s'identifie à un sous-anneau de $\hat{A}'$; il est clair que $\hat{A}'$ est le complété de $\hat{A}$ pour la topologie définie par $\mathfrak{m}'\hat{A}$. En particulier, si A$'$ est complet, il en est de même de A. (*Cf.* [93], th. 8; le raisonnement ci-dessus est d'ailleurs classique dans la théorie des espaces vectoriels topologiques).

c. Supposons maintenant que $\varphi(A) = A'$. Pour que φ soit un *homomorphisme* ([10], chap. III, § 2, n° 7), il faut et il suffit que, de plus, l'image par φ d'un voisinage de 0 dans A soit un voisinage de 0 dans A$'$, c'est-à-dire que l'on ait $\varphi(\mathfrak{m}^n) \supset \mathfrak{m}'^{u(n)}$ pour tout n. Le fait que φ est un homomorphisme s'écrit donc $\mathfrak{m}'^a \subset \varphi(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}'$; on peut alors supposer que $\varphi(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}'$(I, 1, a). L'anneau $\mathfrak{m}'$-adique A$'$ est isomorphe au *quotient* de A par l'idéal fermé noyau de φ.

d. Dans ces conditions, la relation $\varphi(1 + \mathfrak{m}) = 1 + \mathfrak{m}'$ montre que, si A est un anneau de Zariski et si A$'$ n'est pas discret, alors A$'$ est un anneau de Zariski. Comme un anneau $\mathfrak{m}$-adique est métrisable, A$'$ est complet lorsque A est complet ([11], § 3, prop. 4); par conséquent, si $\mathfrak{b}$ est un idéal fermé de l'anneau $\mathfrak{m}$-adique A, le complété de $A/\mathfrak{b}$ s'identifie canoniquement à $\hat{A}/\hat{A}\mathfrak{b}$; si, en particulier, on a $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{m}$, les anneaux $A/\mathfrak{b}$ et $\hat{A}/\hat{A}\mathfrak{b}$ coïncident, puisque $A/\mathfrak{b}$ est discret et donc complet. Si l'on prend $\mathfrak{b} = \mathfrak{m}$, ceci, et la remarque sur les anneaux d'Artin (I, 1, e) montre que, si A est un anneau semi-local (resp. local), il en est de même de $\hat{A}$.

3. Intersections d'idéaux :

Proposition 1. — *Soient* A *un anneau de Zariski*, c *un élément de* A *et* $\mathfrak{b}$ *un idéal de* A; *on a*

$$(\hat{A}\mathfrak{b}:\hat{A}c) = \hat{A}(\mathfrak{b}:Ac) \quad \text{et} \quad \hat{A}c \cap \hat{A}\mathfrak{b} = \hat{A}(Ac \cap \mathfrak{b}) \quad (cf.\ [95].$$

La seconde formule se déduit aussitôt de la première, puisque

$$Ac \cap \mathfrak{b} = c(\mathfrak{b}:Ac).$$

Pour la première, il suffit de montrer que, si $bc \in \hat{A}\mathfrak{b}$, b est adhérent à $(\mathfrak{b}:\mathfrak{a}c)$; posons $b = b_n + m_n$, où $b_n \in A$ et $m_n \in \hat{\mathfrak{m}}^n$; on a

$$b_n c \in (\hat{A}\mathfrak{b} + \hat{A}\mathfrak{m}^n c) \cap A = \mathfrak{b} + \mathfrak{m}^n c,$$

puisque A est un anneau de Zariski; d'où

$$b_n c = d + m'_n c, \quad \text{avec} \quad d \in \mathfrak{b} \text{ et } m'_n \in \mathfrak{m}^n;$$

alors b est limite de la suite $(b_n - m'_n)$, dont les éléments appartiennent à $(\mathfrak{b}:Ac)$.

Corollaire 1. — *Si c n'est pas diviseur de zéro dans l'anneau de Zariski* A, *il n'est pas diviseur de zéro dans le complété* $\hat{A}$.

Il suffit de prendre $\mathfrak{b} = (0)$.

Corollaire 2. — *Si* A *est un anneau de Zariski et si* $\mathfrak{q}$ *est un idéal de* A *primaire pour l'idéal premier* $\mathfrak{p}$, *on a* $\bar{\mathfrak{q}} \cap A \subset \mathfrak{p}$ *pour toute composante primaire* $\bar{\mathfrak{q}}$ *de* $\hat{A}\mathfrak{q}$.

Il suffit de remarquer que les éléments de $\bar{\mathfrak{q}}/\hat{A}\mathfrak{q}$ sont diviseurs de zéro dans $\hat{A}/\hat{A}\mathfrak{q}$ et que les seuls diviseurs de zéro de $A/\mathfrak{q}$ sont les éléments de $\mathfrak{p}/\mathfrak{q}$.

Dans le cas où A est semi-local et complet, on a le résultat suivant :

Proposition 2. — *Soient* A *un anneau* $\mathfrak{m}$*-adique semi-local et complet*, $(\mathfrak{b}_n)$ *une suite décroissante d'idéaux de* A *telle que* $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{b}_n = (0)$. *On a alors* $\mathfrak{b}_n \subset \mathfrak{m}^{s(n)}$, *où* $s(n)$ *tend vers l'infini avec* n [13].

Remarquons que tout $A/\mathfrak{m}^s$ est un anneau d'Artin (I, 1, a et I, 1, e). Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe s tel que $\mathfrak{b}_n \not\subset \mathfrak{m}^s$, quel que soit n. Alors les idéaux $\mathfrak{b}_n + \mathfrak{m}^s$ forment une suite décroissante et sont distincts de $\mathfrak{m}^s$; il existe, par conséquent, $x_s \notin \mathfrak{m}^s$ tel que $x_s \in \mathfrak{b}_n + \mathfrak{m}^s$ pour tout n. On peut, de même, définir

$$x_{s+1} \in \mathfrak{b}_n + \mathfrak{m}^{s+1}$$

pour tout n et tel que $x_{s+1} - x_s \in \mathfrak{m}^s$. D'où, par récurrence, une suite de Cauchy (x_{s+j}) dont la limite x est telle que $x \notin \mathfrak{m}^s$ et $x \notin \mathfrak{b}_n + \mathfrak{m}^{s+j}$ pour tous j et n; d'où $x \notin \mathfrak{b}_n$ pour tout n et $x = 0$ contrairement à $x \notin \mathfrak{m}^s$.

Corollaire 1. — *Si* A *est un anneau semi-local complet, sous-anneau d'un anneau* $\mathfrak{m}$*-adique* B *tel que* $\mathfrak{m} \cap A$ *soit l'intersection* $\mathfrak{r}$ *des idéaux maximaux de* A, *alors* A *est un sous-espace topologique de* B.

En effet, $\mathfrak{m}^n \cap A$ contient $\mathfrak{r}^n$ et est contenu dans $\mathfrak{r}^{s(n)}$.

Corollaire 2. — *Soient* A *un anneau semi-local,* $\mathfrak{b}$ *un idéal de* A, *et* $a \in A$; *on a* $(\mathfrak{b} + \mathfrak{m}^n : Aa) \subset (\mathfrak{b} : Aa) + \mathfrak{m}^{s(n)}$, *où* $s(n)$ *tend vers l'infini.*

On applique la proposition 2 à la suite d'idéaux

$$\hat{A}((\mathfrak{b} + \mathfrak{m}^n) : Aa)/\hat{A}(\mathfrak{b} : Aa),$$

en tenant compte de la proposition 1.

Corollaire 3. — *Si* a *n'est pas diviseur de zéro dans l'anneau semi-local* A, *on a* $(\mathfrak{m}^n : Aa) \subset \mathfrak{m}^{s(n)}$.

Il suffit de prendre $\mathfrak{b} = (0)$ dans le corollaire 2.

Lorsque A est un anneau semi-local *non complet*, il peut exister des suites d'idéaux $\mathfrak{b}_n$ telles que $\bigcap_n \mathfrak{b}_n = (0)$ et que le filtre $\mathcal{F}$ ayant pour base les $\mathfrak{b}_n$ ne soit pas plus fin que le filtre $\mathfrak{V}$ des voisinages de 0 dans A. Il faut et il suffit pour cela que $\mathfrak{v} = \bigcap_n \hat{A}\mathfrak{b}_n \neq (0)$; on a alors $\mathfrak{v} \cap A = (0)$. Il correspondra une telle famille $(\mathfrak{b}_n)$ à tout idéal non nul $\mathfrak{v}$ de $\hat{A}$ tel que $\mathfrak{v} \cap A = (0)$, par exemple une base du filtre des voisinages de o de A considéré comme sous-espace de $\hat{A}/\mathfrak{v}$; si $\mathcal{F}$ est moins fin que $\mathfrak{V}$, il est d'ailleurs identique au filtre des voisinages de o pour cette topologie de A. Une courbe analytique plane qui n'est branche d'aucune courbe algébrique permet de construire un exemple d'un tel idéal $\mathfrak{v}$.

Proposition 3. — *Soient* A *un anneau semi-local,* $\mathfrak{m}$ *un idéal contenu dans l'intersection* $\mathfrak{r}$ *des idéaux maximaux de* A, $\mathfrak{b}$ *et* $\mathfrak{c}$ *deux idéaux de* A, *et* $\hat{A}$ *le complété de* A *pour la topologie* $\mathfrak{m}$-*adique. On a alors*

$$\hat{A}\mathfrak{b} \cap \hat{A}\mathfrak{c} = (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c})\hat{A} \quad [64].$$

Soit $\bar{A}$ le complété $\mathfrak{r}$-adique de A. On montre d'abord que l'on a $\bar{A}\mathfrak{b} \cap \bar{A}\mathfrak{c} = (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c})\bar{A}$ [remarquer que $\bar{A}\mathfrak{b} \cap \bar{A}\mathfrak{c}$ est la réunion des $\bar{A}\mathfrak{b} \cap \bar{A}\mathfrak{c} = b(\bar{A}\mathfrak{c} : \bar{A}\mathfrak{b})$, où b parcourt $\bar{A}\mathfrak{b}$; approcher alors b par $b_n \in \mathfrak{b}$ et appliquer le cor. 2 de la prop. 2]. On remarque ensuite (I, 2, b) que $\hat{A}$ est un sous-anneau de $\bar{A}$ et que $\bar{A}$ est le complété de $\hat{A}$ pour une certaine topologie semi-locale; d'où

$$\hat{A}\mathfrak{b} \cap \hat{A}\mathfrak{c} = \bar{A}\mathfrak{b} \cap \hat{A} \cap \bar{A}\mathfrak{c} \cap \hat{A} = (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c})\bar{A} \cap \hat{A} = (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c})\hat{A}.$$

4. Anneaux de fractions d'anneaux $\mathfrak{m}$-adiques. — *a*. Soient A un anneau commutatif et S une partie multiplicativement stable de A ne contenant pas o (mais pouvant contenir des diviseurs de o). La construction d'un « anneau de fractions » A_S se ramène, suivant Uzkov [76] au problème *d'application universelle* suivant (*cf.* [7], App. III et [56]); appelons S-homomorphisme de A dans un anneau B un homomorphisme v tel que tout élément de $v(S)$ soit inversible dans B; il s'agit de construire un anneau B_0 et un S-homomorphisme v_0 de A dans B_0 tels que, pour tout S-homomorphisme v de A dans un anneau B, il existe un homomorphisme w de B_0 dans B tel que $v = w \circ v_0$. On peut appliquer ici la méthode générale exposée en [56] : on considère la famille v_α de tous les S-homomorphismes de A dans les anneaux B_α de puissance inférieure à celle de $A \times A$; soit v_0 l'application produit des v_α; c'est une application de A dans $\prod B_\alpha$ et c'est un S-homomorphisme puisque les éléments inversibles d'un anneau produit sont ceux dont toutes les composantes sont inversibles; alors v_0 et l'anneau B_0 engendré par $v_0(A)$ et les inverses d'éléments de $v_0(S)$ fournissent la solution cherchée. On voit aussitôt que celle-ci est unique à un isomorphisme près.

b. Le noyau de v_0 est l'intersection des noyaux des v_α, et la connaissance de $\overset{-1}{v_0}(o)$ déterminera B_0. Or, remarquons que tout $x \in A$ pour lequel il existe $s \in S$ tel que $sx = o$ est nécessairement dans $\overset{-1}{v_0}(o)$. Réciproquement, l'ensemble de ces éléments x est un idéal $\mathfrak{n}$ et $ys \in \mathfrak{n}$, avec $s \in S$ entraîne $y \in \mathfrak{n}$, puisque S est multiplicativement stable. Donc l'image canonique $\bar{S}$ de S dans $A/\mathfrak{n}$ ne contient pas de diviseurs de zéro et l'on peut prendre pour B_0 l'anneau de fractions (au sens ordinaire) $(A/\mathfrak{n})_{\bar{S}}$, v_0 étant la composée des deux applications canoniques.

c. Nous noterons A_S l'anneau $(A/\mathfrak{n})_{\bar{S}}$ et v_0 l'application canonique de A dans A_S. Par abus de langage, nous écrirons $\mathfrak{b}' \cap A$ pour $\overset{-1}{v_0}(\mathfrak{b}')$ $(\mathfrak{b}' \subset A_S)$, et $\mathfrak{b}A_S$ pour $v_0(\mathfrak{b})A_S(\mathfrak{b} \subset A)$. On a alors, pour tout idéal $\mathfrak{b}'$ de A_S, $(\mathfrak{b}' \cap A)A_S = \mathfrak{b}'$. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A tel que $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, et $\mathfrak{q}$ un idéal primaire pour $\mathfrak{p}$, alors $\mathfrak{p}A_S$ est premier, et $\mathfrak{q}A_S$ primaire pour $\mathfrak{p}A_S$ (remarquons que $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ et $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset$ sont équivalentes). Si $\mathfrak{b} = \bigcap_i \mathfrak{q}_i$ est une intersection, la plus courte possible, d'idéaux primaires de A, alors $\mathfrak{b}A_S$ est intersection des idéaux primaires $\mathfrak{q}_iA_S$ pour lesquels $\mathfrak{q}_i \cap S = \emptyset$, et cette représentation est la plus courte possible. Dans tout ceci nous pouvons, sans inconvénient, adjoindre à S les éléments de A qui sont inversibles $\bmod \mathfrak{n}$.

d. D'après sa définition, le noyau $\mathfrak{n}$ de v_0 est contenu dans tout idéal primaire $\mathfrak{q}$ de A tel que $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset$. Lorsque A est *noethérien*, la décomposition primaire de (o) dans A et les résultats de (I, 4, *c*) montrent que $\mathfrak{n}$ est l'intersection de celles des composantes primaires de (o) qui ne rencontrent pas S; il est d'ailleurs facile de voir directement qu'il en est bien ainsi. Donc $\mathfrak{n}$ est l'intersection de tous les idéaux primaires $\mathfrak{q}$ qui ne rencontrent pas S (*cf.* [14]). L'anneau A_S est noethérien avec A.

e. Le cas le plus important est celui où S est le complément d'un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A. Alors A_S se note $A_\mathfrak{p}$ et s'appelle l'anneau des fractions de l'idéal premier P. L'idéal $\mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}}$ est l'unique idéal maximal de $A_{\mathfrak{p}}$ et $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau local lorsque A est noethérien.

f. Considérons maintenant un anneau noethérien A et un idéal $\mathfrak{m}$ de A que nous supposerons sans composantes immergées (ce sera le cas si $\mathfrak{m}$ est son radical). Considérons, dans A_S, la topologie définie par les puissances de $\mathfrak{m} A_S$. Posons $(\mathfrak{m}^n)_S = \mathfrak{m}^n A_S \cap A$; c'est l'ensemble des x de A pour lesquels il existe $s \in S$ tel que $xs \in \mathfrak{m}^n$; comme cet idéal a une base finie, il existe $s_n \in S$ tel que $s_n(\mathfrak{m}^n)_S \subset \mathfrak{m}^n$. [Dans le cas où S est l'intersection des compléments des idéaux premiers de $\mathfrak{m}$, $(\mathfrak{m}^n)_S$ s'appelle la *puissance symbolique* $n^{\text{ième}}$ de $\mathfrak{m}$ et se note $\mathfrak{m}^{(n)}$; on remarquera que $\mathfrak{m}^{(n)}$ est l'intersection des composantes isolées de $\mathfrak{m}^n$]. Pour que A_S soit un anneau $(\mathfrak{m} A_S)$-adique, il faut et il suffit que l'on ait $\bigcap_n (\mathfrak{m}^n)_S = \mathfrak{n}$, ou encore que tout élément de la forme $s' + m' = s'(1 + m'/s')$ $(s' \in \varphi_0(S),\ m' \in \mathfrak{m}\varphi_0(A))$ ne soit pas diviseur de zéro dans $A/\mathfrak{n} = \varphi_0(A)$ (ceci implique en particulier $\mathfrak{m} \cap S = \varnothing$). Ceci aura lieu en particulier si $S + \mathfrak{m} \subset S$, ce qui est le cas lorsque S est intersection de compléments d'idéaux premiers contenant $\mathfrak{m}$.

g. Pour que, de plus, A_S soit un anneau de Zariski, il faut et il suffit que tout idéal maximal $\mathfrak{p}'$ de A_S contienne $(\mathfrak{m} + \mathfrak{n})/\mathfrak{n}$ (I, 1, *d*). Une condition équivalente est que tout élément de $\varphi_0(S) + (\mathfrak{m} + \mathfrak{n})/\mathfrak{n}$ soit inversible dans A_S, ce qui a encore lieu lorsque $S + \mathfrak{m} \subset S$.

h. Soit A un anneau de Zariski et soit S une partie multiplicativement stable de A ne contenant pas 0. Considérons l'anneau de fractions $\hat{A}_S$; le noyau $\bar{\mathfrak{n}}$ de l'homomorphisme canonique de $\hat{A}$ dans $\hat{A}_S$ est contenu dans $\hat{A}\mathfrak{n}$, puisque aucun élément de $\varphi_0(S)$ n'est diviseur de zéro dans $\hat{A}/\hat{A}\mathfrak{n}$ (I, 3, cor. 1 de la prop. 1 et I, 4, *b*) ; que $\bar{\mathfrak{n}}$ contienne $\mathfrak{n}$ est clair, d'après leur définition (I, 4, *b*). Ainsi $\bar{\mathfrak{n}} = \hat{A}\mathfrak{n}$, et A_S s'identifie à un sous-anneau de $\hat{A}_S$. Or, on voit aisément que $\mathfrak{m}^n \hat{A}_S \cap A_S = \mathfrak{m}^n A_S$; donc A_S est un sous-espace de $\hat{A}_S$, et il est clair que A_S est dense dans $\hat{A}_S$. Mais, même si $\hat{A}_S$ est un anneau de Zariski (I, 4, *g*), ce n'est pas nécessairement un anneau complet.

On prend $A = Z[[X]]$, et pour S l'ensemble des séries formelles de terme constant non nul. Ici A est complet, mais A_S ne contient pas la série formelle $1 + X + \ldots + X^n/n! + \ldots$, qui est élément du complété $Q[[X]]$ de A_S.

5. Idéaux connexes. Structure des anneaux semi-locaux complets. — Un idéal $\mathfrak{b}$ d'un anneau A est dit *connexe* s'il n'est pas intersection de deux idéaux $\mathfrak{v}$ et $\mathfrak{v}'$ distincts de A et de $\mathfrak{b}$ et tels que $\mathfrak{v}+\mathfrak{v}'=\mathrm{A}$; autrement dit, $\mathrm{A}/\mathfrak{b}$ n'est pas composé direct de deux idéaux non triviaux. Si A est noethérien et si $\mathfrak{b}$ est non connexe, $\mathrm{A}/\mathfrak{b}$ est canoniquement isomorphe à un produit fini $\mathrm{A}/\mathfrak{v}_i$ où les $\mathfrak{v}_i$ sont des idéaux connexes (raisonnement « noethérien » classique); alors $\mathrm{A}/\mathfrak{b}$ est composé direct des $\mathfrak{u}_i/\mathfrak{b}$, où $\mathfrak{u}_i=\bigcap_{j\neq i}\mathfrak{v}_j$.

Proposition 1. — *Soient* A *un anneau* $\mathfrak{m}$*-adique complet tel que* $\mathfrak{m}$ *soit non connexe,* $\mathfrak{v}$ *et* $\mathfrak{v}'$ *des idéaux non triviaux de* A *tels que* $\mathfrak{v}+\mathfrak{v}'=\mathrm{A}$ *et* $\mathfrak{v}\cap\mathfrak{v}'=\mathfrak{m}$. *Alors* A *est composé direct des idéaux* $\mathfrak{n}=\bigcap_n\mathfrak{v}^n$ *et* $\mathfrak{n}'=\bigcap_n\mathfrak{v}'^n$ (*cf.* [13], [93]).

Écrivons $1=b+b'(b\in\mathfrak{v},\ b'\in\mathfrak{v}')$ et posons $b_n=1-(1-b^n)^n$ et $b'_n=1-(1-b'^n)^n$; on a $b_n\in\mathfrak{v}^n$, $b'_n\in\mathfrak{v}'^n$, $b_n\equiv 1\,(\mathfrak{v}'^n)$, $b'_n\equiv 1\,(\mathfrak{v}^n)$ et $b_n+b'_n\equiv 1\,(\mathfrak{v}^n\cap\mathfrak{v}'^n)$. Or $\mathfrak{v}^n\cap\mathfrak{v}'^n=\mathfrak{m}^n$, car, de $x\in\mathfrak{v}^n$ et $x\in\mathfrak{v}'^n$, on déduit $x=xb_n+x(1-b_n)\in\mathfrak{v}^n\mathfrak{v}'^n$. On a donc $b_n+b'_n\equiv 1\,(\mathfrak{m}^n)$. D'autre part, $b_{n+1}-b_n=(1-b^n)^n-(1-b^{n+1})^{n+1}$ est multiple de b^n et de $(1-b)^n\equiv b'^n$; d'où $b_{n+1}-b_n\in\mathfrak{v}^n\cap\mathfrak{v}'^n=\mathfrak{m}^n$. Les suites (b_n) et (b'_n) sont donc des suites de Cauchy, dont les limites d et d' ont les propriétés suivantes : $d\in\mathfrak{n}$, $d'\in\mathfrak{n}'$, $dd'\in\bigcap_n\mathfrak{m}^n=(0)$, $d+d'=1$; d'où $d=d^2$, $d'=d'^2$, et A est composé direct des idéaux $\mathrm{A}d$ et $\mathrm{A}d'$, qui sont évidemment égaux à $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}'$, puisque $\mathfrak{n}\cap\mathfrak{n}'=(0)$.

Corollaire 1. — *Soient* A *un anneau* $\mathfrak{m}$*-adique complet,* $\mathfrak{m}=\bigcap_i\mathfrak{v}_i$ *une décomposition de* $\mathfrak{m}$ *comme intersection d'idéaux connexes* $\mathfrak{v}_i$ *telle que* $\mathrm{A}/\mathfrak{m}$ *soit composé direct des idéaux* $\mathfrak{u}_i/\mathfrak{m}$, *où* $\mathfrak{u}_i=\bigcap_{j\neq i}\mathfrak{v}_j$; *alors* A *est composé direct des idéaux* $\mathfrak{n}_i=\bigcap_n\mathfrak{u}_i^n$; *et l'anneau* $\mathfrak{n}_i$ *est canoniquement isomorphe à* $\mathrm{A}/\left(\bigcap_n\mathfrak{v}_i^n\right)$, *qui est un anneau* $\left(\mathfrak{v}_i/\left(\bigcap_n\mathfrak{v}_i^n\right)\right)$*-adique complet.*

Ceci se déduit de la proposition 1 par récurrence.

Remarque. — Les considérations précédentes s'appliquent aussi bien à un anneau d'Artin qu'à un anneau noethérien. On en déduit, en prenant pour $\mathfrak{m}$ le radical d'un anneau d'Artin A et en remarquant que $\mathfrak{m}$ est nilpotent, que A est isomorphe à un produit fini d'anneaux d'Artin primaires (c'est-à-dire admettant un seul idéal maximal, d'ailleurs nilpotent). Le théorème de Jordan-Hölder montre alors que A est noethérien.

COROLLAIRE. 2. — *Un anneau semi-local complet est isomorphe à un produit fini d'anneaux locaux complets.*

Remarque. — Soient A un anneau semi-local, $\mathfrak{p}$ uu idéal maximal de A, $\mathfrak{m}$ l'intersection des idéaux maximaux de A. Alors $\hat{A}\mathfrak{p}$ est un idéal maximal de $\hat{A}$, et il existe un idempotent $e \in \hat{A}$ tel que $1 - e \in \mathfrak{p}^n \hat{A}$ pour tout n. L'anneau $\hat{A}e$ est un anneau local complet d'idéal maximal $\mathfrak{p}\hat{A}e$. Pour tout $x \in A$, $xe = 0$ équivaut à $x \in \mathfrak{n} = \bigcap_n \mathfrak{p}^n$, puisque $1 - e \in \hat{A}\mathfrak{p}^n$; donc Ae s'identifie au sous-anneau $A/\mathfrak{n}$ de $A_\mathfrak{p}$; et $A/\mathfrak{n}$ est un sous-espace de $\hat{A}e$ (comme $1 - e \in \hat{A}\mathfrak{p}^n$ pour tout n, on a $\hat{A}\mathfrak{p}^n e \cap Ae = \mathfrak{p}^n e$), évidemment partout dense (I, 4). Par conséquent, le complété de $A/\mathfrak{n}$ (qui est évidemment le même que celui de $A_\mathfrak{p}$ puisque $\mathfrak{p}$ est maximal) s'identifie à $\hat{A}e = \hat{A}_{\mathfrak{p}\hat{A}}$.

6. **Extensions finies d'anneaux $\mathfrak{m}$-adiques.** — *Rappel* [22]. — Soient A un anneau, B un anneau contenant A et dont tout élément soit entier sur A. Alors, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, il existe un idéal premier $\mathfrak{p}'$ de B tel que $\mathfrak{p}' \cap A = \mathfrak{p}$; pour que $\mathfrak{p}$ soit maximal, il faut et il suffit que $\mathfrak{p}'$ le soit. Si $\mathfrak{i}$ est un idéal de B contenant $\mathfrak{p}'$ et distinct de $\mathfrak{p}'$, alors $\mathfrak{i} \cap A \neq \mathfrak{p}$. Si $\mathfrak{v}$ est un idéal de A, les éléments du radical de $B\mathfrak{v}$ sont ceux qui satisfont à une équation de la forme

$$x^n + v_1 x^{n-1} + \ldots + v_n = 0 \qquad \text{avec} \quad v_i \in \mathfrak{v}.$$

Nous dirons qu'un anneau B est une *extension finie* d'un anneau A si B contient A et est un A-module de type fini; ceci implique que tout élément de B est entier sur A.

a. Soit B une extension finie de l'anneau $\mathfrak{m}$-adique A; nous pouvons supposer que $\mathfrak{m}$ est intersection d'idéaux premiers (I, 1, *a*). Considérons sur B la topologie définie par les $(\mathfrak{m}^n B)$. Remarquons que l'on a $\mathfrak{m}B \cap A = \mathfrak{m}$; posons, en effet, $\mathfrak{m} = \bigcap_i \mathfrak{p}_i$ et soit $\mathfrak{p}'$ un idéal premier de B tel que $\mathfrak{p}'_i \cap A = \mathfrak{p}_i$ (*rappel*); alors $\mathfrak{p}'_i \supset \mathfrak{m}B$, $\mathfrak{p}_i \supset \mathfrak{m}B \cap A$ et $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}B \cap A$.

b. Pour que B soit un anneau $(\mathfrak{m}B)$-adique, il suffit (et il faut naturellement aussi) que tout élément de $1 + \mathfrak{m}$ ne soit pas diviseur de o dans B : en effet, si l'on a $(1 - m')b = 0$ $(m' \in \mathfrak{m}B,\ b \in B)$, on déduit par multiplication par b de l'équation de dépendance intégrale $m'^n + m'^{n-1}a_1 + \ldots + a_n = 0$, que l'on a

$$b(1 + a_1 + \ldots + a_n) = 0;$$

or on peut supposer que l'on a $a_i \in \mathfrak{m}$ (rappel), ce qui implique $b = 0$.

Cette condition n'est pas toujours réalisée : on prend pour A l'anneau de polynomes K[X] ((X)-adique), et pour B l'anneau $A + Kv$, avec la table de multiplication $1 \times v = v$, $v^2 = 0$, $vX^j = v$ pour tout $j \geqq 1$.

c. Lorsque A est un *anneau de Zariski*, B est un anneau $(B\mathfrak{m})$-adique en vertu de (I, 6, *b*), puisque tout élément de $1 + \mathfrak{m}$ est inversible dans A(I, 1, *d*). Dans ce cas, B est même un anneau de Zariski : en effet, pour tout idéal maximal $\mathfrak{p}'$ de B, $\mathfrak{p}' \cap A$ est maximal (*rappel*) et contient donc $\mathfrak{m}$; par conséquent, $\mathfrak{p}' \supset B\mathfrak{m}$.

d. Lorsque A est *complet*, il en est de même de B. Soit, en effet, $B = \sum_i Ab_i$, et soit (v_n) une suite de Cauchy dans B; on a

$$u_n = v_{n+1} - v_n \in \mathfrak{m}^{s(n)} B,$$

où $s(n)$ tend vers l'infini; on peut écrire

$$u_n = \sum_i a_{ni} b_i, \qquad \text{avec} \quad a_{ni} \in \mathfrak{m}^{s(n)};$$

si a_i désigne la somme de la série (a_{ni}) (qui est convergente dans A), on a $\sum_i a_i b_i = \lim v_n$.

e. Remarquons d'ailleurs que, si A est complet et si B est un anneau $(\mathfrak{m}B)$-adique quelconque contenant A et tel que $B/B\mathfrak{m}$ soit un module de type fini sur $A/\mathfrak{m}$, alors B est lui-même un A-module de type fini. Soit, en effet, $(\bar{b}_i)$ un système de générateurs de $B/B\mathfrak{m}$ sur $A/\mathfrak{m}$, et soient (b_i) des représentants des $\bar{b}_i$ dans B; pour tout $x \in B$, on détermine par récurrence sur n des y_{in} dans A tels que $x \equiv \sum_i y_{in} b_i \pmod{\mathfrak{m}^n B}$, et que $y_{i,n+1} - y_{i,n} \in \mathfrak{m}^n$ si $y_i = \lim y_{i,n}$, on a $x - \sum_i y_i b_i \in \bigcap_n \mathfrak{m}^n B = (0)$. On déduit de cette construction que, si $B/B\mathfrak{m} = A/\mathfrak{m}$, on a $B = A$.

f. Lorsque A est un anneau $\mathfrak{m}$-adique *semi-local*, l'anneau $(B\mathfrak{m})$-adique B est aussi semi-local puisque $B/B\mathfrak{m}$ est un anneau d'Artin, en tant que module de type fini sur l'anneau d'Artin $A/\mathfrak{m}$ (I, 1, *e*).

g. On peut enfin se demander si l'anneau $\mathfrak{m}$-adique A est un *sous-espace* de l'anneau $(\mathfrak{m}B)$-adique B, ou s'il a une topologie strictement plus fine que la topologie induite par celle de B. L'identité des topologies à lieu dans les cas suivants :

1° B est somme directe de A et d'un A-module supplémentaire B' (en effet pour tout idéal $\mathfrak{v}$ de A, on a $\mathfrak{v}B = \mathfrak{v} + \mathfrak{v}B'$ et $\mathfrak{v}B \cap A = \mathfrak{v}$). C'est, en particulier, le cas si B est un A-module libre qui admet une base contenant 1, plus particulièrement si $B = A[b]$, b étant racine d'un polynome unitaire de degré n sur A, mais d'aucun polynome de degré $< n$ (*cf.* [20], lemma 4);

2° A est un anneau semi-local complet (I, 3, cor. 1 de la prop. 2) ou, plus généralement, un anneau ayant la propriété décrite dans la proposition 2 (I, 3) (par exemple l'anneau d'une valuation discrète, * ou un anneau local analytiquement irréductible de dimension 1*);

3° A est un anneau semi-local, et aucun élément non nul de A n'est diviseur de zéro *dans* B : en effet, on considère un système maximal et contenant 1 (y_j) d'éléments de B linéairement indépendants sur A; alors, comme B est de type fini sur A, il existe c non nul dans A tel que $cB \subset \sum_j Ay_j$; on en déduit $c(B\mathfrak{m}^n \cap A) \subset \mathfrak{m}^n$ et l'on applique le corollaire 3 de la prop. 2 (I, 3).

h. Lorsque A est un sous-espace de B, $\hat{A}$ s'identifie à un sous-anneau de $\hat{B}$, et $\hat{B}$ est un $\hat{A}$-module de type fini (si $B = \sum Ax_i$, alors $\sum \hat{A} x_i$ est un sous-anneau B′ de $\hat{B}$, contenant B et complet (I, 6, *d*) donc $B' = \hat{B}\Big)$. Supposons, de plus, qu'aucun élément $\neq 0$ de A ne soit diviseur de zéro dans B [par exemple, dans le cas 3° de (I, 6, *f*)]. Alors, des éléments b_i de B qui sont linéairement indépendants, restent linéairement indépendants sur $\hat{A}$; autrement dit, B et $\hat{A}$ sont *linéairement disjoints* sur A. $\Big[$Si $\sum a_i b_i = 0 \big(a_i \in \hat{A}\big)$ on pose $a_i \equiv a_{in} \big(\bmod \hat{A}\mathfrak{m}^n\big)$ $(a_{in} \in A)$, d'où $\sum_i a_{in} b_i \in B\mathfrak{m}^n \cap B = B\mathfrak{m}^n$; on peut supposer la famille (b_i) maximale; il existe alors $c \neq 0$ dans A tel que $cB \subset \sum A b_i$; on a ainsi $\sum c a_{in} b_i \in \sum \mathfrak{m}^n b_i$, $c a_{in} \in \mathfrak{m}^n$, et $\lim (c a_{in}) = c a_i = 0$; d'où $a_i = 0$ en vertu du cor. 1 de la prop. 1 (I, 3)$\Big]$. De plus, tout élément $a \in \hat{A}$ qui est diviseur de zéro dans $\hat{B}$, l'est déjà dans $\hat{A}$ $\Big[$de $ab = 0 \big(b \in \hat{B},\ b \neq 0\big)$, on déduit, avec les notations précédentes, $0 = acb = \sum_i a u_i b_i \big(u_i \in \hat{A}\big)$; d'où $a u_i = 0$; et les u_i ne sont pas tous nuls, puisque c n'est diviseur de zéro, ni dans B, ni donc dans $\hat{B}$ (I, 3, cor. 1, prop. 1)$\Big]$ (*cf.* [13]).

Historique. — La plus grande partie des résultats du chapitre I proviennent essentiellement de Zariski [93], de Chevalley [13] et d'un cours professé par Chevalley à Princeton en 1946-1947. Nous avons cependant énoncé certains résultats sous une forme plus générale que ces auteurs.

CHAPITRE II.

Polynomes caractéristiques.

1. **Anneau de formes d'un idéal** [45], [63]. — *a*. Soient A un anneau, $\mathfrak{v}$ un idéal de A tel que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{v}^n = (0)$. Les groupes additifs $\mathfrak{v}^n/\mathfrak{v}^{n+1}$ sont canoniquement munis de structures de $(A/\mathfrak{v})$-

modules. Pour tout élément non nul $a \in A$, il existe un exposant s et un seul tel que $a \in \mathfrak{v}^s$, $a \notin {}^{s+1}$; la classe de a dans $\mathfrak{v}^s/\mathfrak{v}^{s+1}$ est appelée la *forme initiale* de a. Étant donnés des éléments $\bar{x} \in \mathfrak{v}^n/\mathfrak{v}^{n+1}$ et $\bar{y} \in \mathfrak{v}^s/\mathfrak{v}^{s+1}$, la forme initiale de xy (dans $\mathfrak{v}^{n+s}/\mathfrak{v}^{n+s+1}$) ne dépend pas des représentants x et y de $\bar{x}$ et $\bar{y}$; on a ainsi défini un « produit » de $\bar{x}$ et $\bar{y}$. En étendant par linéarité cette multiplication aux éléments de la somme directe $F(V) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{v}^n/\mathfrak{v}^{n+1}$, on obtient sur $F(\mathfrak{v})$ une structure d'anneau commutatif, comme on le vérifie aisément. Muni de cette structure, $F(\mathfrak{v})$ est appelé l'*anneau de formes* de l'idéal $\mathfrak{v}$; un éléments de $\mathfrak{v}^n/\mathfrak{v}^{n+1}$ est appelé une $\mathfrak{v}$-*forme* de degré n, On notere que, si $\hat{A}$ est le complété de A pour une topologie $\mathfrak{m}$-adique dans laquelle $\mathfrak{v}$ est un idéal ouvert, les anneaux de formes $F(\mathfrak{v})$ et $F(\mathfrak{v}\hat{A})$ sont isomorphes (I, 2, *d*).

On remarquera que $F(\mathfrak{v})$ est l'anneau gradué associé à l'anneau A filtré par les $(\mathfrak{v}^n)$ [12].

b. Si $\mathfrak{b}$ est un idéal de $\mathfrak{a}$ tel que $\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{b} + \mathfrak{v}^n) = \mathfrak{b}$, l'application canonique φ de $\mathfrak{v}^n$ sur $(\mathfrak{v}^n + B)/B$ applique $\mathfrak{v}^{n+1}$ sur $(\mathfrak{v}^{n+1} + \mathfrak{b})/\mathfrak{b}$, et définit donc, par passage aux quotients, une application de $\mathfrak{v}^n/\mathfrak{v}^{n+1}$ sur $(\mathfrak{v}^n + \mathfrak{b})/(\mathfrak{v}^{n+1} + \mathfrak{b})$. Par conséquent, $F((\mathfrak{v} + \mathfrak{b})/\mathfrak{b})$ s'identifie canoniquement à un anneau quotient $F(\mathfrak{v})/\bar{\mathfrak{b}}$. L'idéal $\bar{\mathfrak{b}}$ est engendré par les formes initiales d'éléments de $\mathfrak{b}$, et est appelé l'*idéal directeur* (« Leitideal » de [45]) de $\mathfrak{b}$; tout élément homogène de $\bar{\mathfrak{b}}$ est d'ailleurs forme initiale d'un élément de $\mathfrak{b}$.

c. Si l'anneau de formes $F(\mathfrak{v})$ est un *anneau d'intégrité*, alors A est aussi un anneau d'intégrité, et $\mathfrak{v}$ est un idéal premier; dans ce cas, si l'on désigne par $\nu(x)$ $(x \in A^*)$ le plus petit entier s tel que $x \notin \mathfrak{v}^{s+1}$ (c'est-à-dire le « degré » de la forme initiale de x), on a $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$ [et non plus seulement $\nu(xy) \geqq \nu(x) + \nu(y)$]; comme la relation $\nu(x+y) \geqq \mathrm{Min}(\nu(x), \nu(y))$ est vraie dans tous les cas, ν est une valuations du corps des fractions de A, et $\mathfrak{v}$ est le centre de ν sur A; remarquons aussi que l'on a $(\mathfrak{v}^n : Ax) = \mathfrak{v}^{n-\nu(x)}$ pour tout $x \in A^*$.

d. Supposons maintenant A quelconque, et soit $\mathfrak{b}$ un idéal fermé pour la topologie $\mathfrak{v}$-adique. On déduit de ce qui précède (*b* et *c*) que, si l'idéal directeur $\overline{\mathfrak{b}}$ de $\mathfrak{b}$ est premier dans $F(\mathfrak{v})$, alors $\mathfrak{b}$ est *premier*; lorsque $\mathfrak{b}$ n'est pas fermé, c'est son adhérence $\bigcap_n (\mathfrak{b} + \mathfrak{v}^n)$ qui est un idéal premier (*cf.* [45]). Par contre, il existe des idéaux premiers fermés $\mathfrak{b}$ dont l'idéal directeur n'est pas premier : par exemple $(X^2 - Y^3)$ dans $K[[X, Y]]$ muni de la topologie (X, Y)-adique.

e. Si tout idéal principal de A est fermé pour la topologie $\mathfrak{v}$-adique (par exemple si A est un anneau de Zariski), et si $F(\mathfrak{v})$ est un anneau *normal*, alors A est un anneau d'intégrité *intégralement clos*. En effet, le fait que A n'a pas de diviseurs de zéro résulte de *c*. Considérons, d'autre part, un élément $y/x (y \in A,\ x \in A)$ entier sur A, et soit s un entier tel que $y \in Ax + \mathfrak{v}^s$; il existe alors $z \in A$ tel que $y - zx = u \in \mathfrak{v}^s$, et $u' = u/x$ est entier sur A; on peut alors trouver un élément non nul $d \in A$ tel que $du'^n \in A$ pour tout n. Donc du^n est divisible par x^n et, en passant aux formes initiales, $\overline{d}\,\overline{u}^n$ est multiple de $\overline{x}^n$ quel que soit n. Comme $F(\mathfrak{v})$ est intersection d'anneaux de valuations discrètes, la considération de celles-ci montre $\overline{u}$ est multiple de $\overline{x}$; en posant $\overline{u} = \overline{v}\,\overline{x}$, on en déduit $u - vx \in \mathfrak{v}^{s+1}$, et $y \in Ax + \mathfrak{v}^{s+1}$. Il en résulte, par récurrence, que $y \in Ax + \mathfrak{v}^n$ pour tout n, et que $y \in Ax$ puisque Ax est un idéal fermé (*cf.* [45], Satz 6).

f. Soit (a_α) une base de l'idéal $\mathfrak{v}$; les monomes de degré n en les a forment une base de $\mathfrak{v}^n$, et leurs formes initiales constituent un système de générateurs du $(A/\mathfrak{v})$-module $\mathfrak{v}^n/\mathfrak{v}^{n+1}$. Ainsi

$$F(\mathfrak{v}) = (A/\mathfrak{v})[(\overline{a}_\alpha)]$$

est isomorphe à un anneau quotient $(A/\mathfrak{v})[(X_\alpha)]/\mathfrak{r}$ de l'anneau de polynomes $(A/\mathfrak{v})[(X_\alpha)]$ par un idéal $\mathfrak{r}$, évidemment homogène. L'anneau de formes $F(\mathfrak{v})$ est donc *noethérien* lorsque $A/\mathfrak{v}$ est noethérien, et que $\mathfrak{v}$ admet une base finie.

g. Proposition 1. — *Si* A *est un anneau complet pour la topologie définie par les* $(\mathfrak{v}^n)$, *si* $\mathfrak{b}$ *est un idéal de* A, *et si* (b_i) *est une famille finie d'éléments de* $\mathfrak{b}$ *dont les formes initiales* $(\overline{b}_i)$ *engendrent l'idéal directeur* $\overline{\mathfrak{b}}$ *de* $\mathfrak{b}$ *dans* $F(\mathfrak{v})$, *alors les* (b_i) *engendrent* $\mathfrak{b}$.

Soit $b \in \mathfrak{b}$; si s est le degré de $\bar{b}$, il existe des a_{si} dans A tels que $\bar{b} = \sum a_{si}\bar{b}_i$, c'est-à-dire $b \equiv \sum a_{si} b_i (\text{mod. } \mathfrak{v}^{s+1})$. Supposons, par récurrence, que nous ayons trouvé une famille $(a_{ni})(n > s)$ d'éléments de A telle que $b \equiv \sum a_{ni} b_i (\mathfrak{v}^{n+1})$; alors la forme initiale de $b - \sum a_{ni} b_i$(qui est degré $\geqq n+1$), est de la forme $\sum \bar{c}_{ni}\bar{b}_i$; comme $F(\mathfrak{v})$ est un anneau gradué, $\bar{c}_{ni}$ est une forme de degré $\geqq n + 1 - d^0(b_i)$. En posant $a_{n+1,i} = a_{n,i} + c_{n,i}$, ceci montre que la suite $(a_{n,i})$ est une suite de Cauchy; d'autre part, on a

$$b \equiv \sum a_{n+1,i} b_i (\operatorname{mod} \mathfrak{v}^{n+2}).$$

Donc, si a_i désigne la limite de la suite de Cauchy $(a_{n,i})$, on a

$$b = \sum a_i b_i.$$

La démonstration s'étend au cas où la famille (b_i) est infinie; elle engendre alors $\mathfrak{b}$ au sens de la topologie de A.

Corollaire. — *Si* A *est un anneau complet pour la topologie définie par* $(\mathfrak{v}^n)$, *si* $\mathfrak{v}$ *a une base finie et si* $A/\mathfrak{v}$ *est noethérien, alors* A *est lui-même noethérien.*

Ceci résulte du fait que $F(\mathfrak{v})$ est noethérien (f).

Ce résultat a été démontré par Cohen ([20], th. 3) dans le cas particulier où $A/\mathfrak{v}$ est un corps et où tout élément du complément de $\mathfrak{v}$ dans A est inversible (« generalized local ring »). Il est à noter qu'il existe des « generalized local rings » non complets qui ne sont pas noethériens [52].

h. Au lieu de l'anneau de formes $F(\mathfrak{v})$, on peut utiliser son complété $\overline{F(\mathfrak{v})}$ pour la topologie définie par les puissances de l'idéal des formes de degré $\geqq 1$; ce complété est l'ensemble des sommes infinies

$$\sum_{i=0}^{\infty} \bar{a}_i (\bar{a}_i \in \mathfrak{v}^i/\mathfrak{v}^{i+1}).$$

Comme on considère principalement les éléments et les idéaux homogènes de $F(\mathfrak{v})$, les deux méthodes reviennent en général au même.

2. Éléments superficiels [63]. — *a.* Soient A un anneau noethérien et $\mathfrak{v}$ un idéal de A. Un élément x de $\mathfrak{v}^s$ est appelé *élément superficiel d'ordre s par rapport à* $\mathfrak{v}$, s'il existe un exposant c tel que $(\mathfrak{v}^n : Ax) \cap \mathfrak{v}^c = \mathfrak{v}^{n-s}$ pour tout $n \geqq s + c$; un élément superficiel de degré 1 par rapport à $\mathfrak{v}$ est appelé, pour simplifier, superficiel par rapport à $\mathfrak{v}$. Si x est superficiel de degré s, on a évidemment $x \notin \mathfrak{v}^{s+1}$; mais l'exemple de $A = K[[X^2, X^3]]$, $\mathfrak{v} = (X^2, X^3)$, $x = X^3$ montre que cette condition nécessaire n'est nullement suffisante, en général; elle est cependant suffisante lorsque $F(\mathfrak{v})$ est un anneau d'intégrité (II, 1, *c*).

b. Considérons maintenant l'anneau de formes $F(\mathfrak{v})$. Dire que x est superficiel de degré s, revient à dire que le produit de la forme initiale $\bar{x}$ par toute forme non nulle $\bar{y}$ de degré $q \geqq c$ est une forme *non nulle* de degré $s + q$, c'est-à-dire, puisque $F(\mathfrak{v})$ est un anneau gradué, que les seuls éléments homogènes non nuls α de $F(\mathfrak{v})$ tels que $\alpha\bar{x} = 0$ sont de degré $< c$. Désignons par $\mathfrak{r}$ l'idéal des éléments de degré $\geqq 1$ de $F(\mathfrak{v})$, par $(\mathfrak{p}_i)$ les idéaux premiers de (0) de $F(\mathfrak{v})$ qui ne contiennent pas $\mathfrak{r}$, et par $(\mathfrak{q}_i)$ les composantes primaires correspondantes. Il existe alors un exposant c tel que $\mathfrak{r}^c$ soit contenu dans les autres composantes primaires de (0) : $\mathfrak{r}^c \cap \left(\bigcap \mathfrak{q}_i\right) = (0)$. Si une forme $\bar{x}$ est en dehors de tous les $\mathfrak{p}_i$, on déduit de $\bar{x}\alpha = 0$, que l'on a $\alpha \in \mathfrak{q}_i$ pour tout i; si le degré de α est $\geqq c$, ceci implique $\alpha = 0$; si s désigne le degré de $\bar{x}$, $\bar{x}$ est donc la forme initiale d'un élément x superficiel de degré s. Reste à montrer l'existence d'un telle forme $\bar{x}$. En supprimant ceux des $\mathfrak{p}_i$ qui sont contenus dans un autre, on peut supposer que $\mathfrak{p}_i \not\subset \mathfrak{p}_j$ pour $i \neq j$; comme les $\mathfrak{p}_i$ sont des idéaux homogènes (*cf.* [91], th. 2), il existe alors une forme $\bar{a}_{ij}$ telle que $\bar{a}_{ij} \notin \mathfrak{p}_j$, $\bar{a}_{ij} \in \mathfrak{p}_i$; comme $\mathfrak{r} \not\subset \mathfrak{p}_j$, il existe une forme $\bar{b}_j$ de degré 1 telle que $\bar{b}_j \notin \mathfrak{p}_j$; en remplaçant éventuellement $\bar{a}_{ij}$ par $\bar{a}_{ij}\bar{b}_j^{n(i,j)}$, $n(i, j)$ étant un exposant convenable, on peut supposer les $\bar{a}_{ij}$ de même degré; alors, en posant $\bar{a}_j = \prod_{i \neq j} \bar{a}_{ij}$, $\bar{x} = \sum \bar{a}_j$ est une forme qui n'est contenue dans aucun $\mathfrak{p}_j$. Ceci montre l'*existence*, pour certain entier s, d'éléments superficiels d'ordre s par rapport à $\mathfrak{v}$.

c. Le même raisonnement montre que, étant donné une famille finie $(\mathfrak{i}_k)$ d'idéaux homogènes de $F(\mathfrak{v})$ dont aucun ne contient une puissance de $\mathfrak{r}$, on peut prendre une forme $\bar{x}$ en dehors de tous les $\mathfrak{i}_k$ (remplacer chaque $\mathfrak{i}_k$ par un de ses idéaux premiers qui ne contienne pas $\mathfrak{r}$). Ceci montre que, étant donnée une famille finie $(\mathfrak{b}_k)$ d'idéaux fermés et non ouverts de A, il existe un entier s et un élément superficiel x d'ordre s par rapport à $\mathfrak{v}$ qui ne soit contenu dans aucun $\mathfrak{b}_k$ [si l'idéal directeur $\mathfrak{i}_k$ de $\mathfrak{b}_k$ contenait $\mathfrak{r}^u$, on aurait $\mathfrak{v}^u \subset \mathfrak{b}_k + \mathfrak{v}^{u+1}$, d'où $\mathfrak{v}^u \subset \mathfrak{b}_k + \mathfrak{v}(\mathfrak{b}_k + \mathfrak{v}^{u+1}) = \mathfrak{b}_k + \mathfrak{v}^{u+2}$ et, par récurrence, $\mathfrak{v}^u \subset \mathfrak{b}_k + \mathfrak{v}^{u+n}$ pour tout n; d'où $\mathfrak{v}^u \subset \mathfrak{b}_k$]. Ce résultat peut avoir un certain intérêt technique. Supposons, en particulier, que A soit un anneau semi-local, et que $\mathfrak{v}$ ne se compose pas uniquement de diviseurs de zéro; il existe alors un élément x superficiel d'ordre s qui ne soit pas diviseur de zéro; on a alors $(\mathfrak{v}^n : Ax) \subset \mathfrak{v}^{s(n)}$ (I, 3), $s(n)$ tendant vers l'infini, d'où $(\mathfrak{v}^n : Ax) = \mathfrak{v}^{n-s}$ pour n assez grand.

d. Il n'existe pas toujours d'éléments superficiels de degré *donné*. Soient, par exemple, $A = F_2[X, Y]/(XY(X+Y))$, x et y les classes de X et Y dans A, et $\mathfrak{v} = (x, y)$. Il est clair que A est son propre anneau de $\mathfrak{v}$-formes. Cependant, les seuls éléments de degré 1 de A, qui sont x, y et $x+y$ (F_2 : corps à deux éléments), ne sont pas superficiels, étant donné que, pour tout n, ils annulent respectivement $y^n(x+y)^n$, $x^n(x+y)^n$ et $x^n y^n$. Mais x^2+y^2+xy est un élément superficiel de degré 2, $x^3+x^2y+y^3$ et $x^3+xy^2+y^3$ deux éléments superficiels de degré 3.

e. Mais, lorsque A est un anneau local, $\mathfrak{v}$ un idéal primaire pour l'idéal $\mathfrak{m}$ de A et $A/\mathfrak{m}$ un corps *infini*, *il existe*, *pour tout* s, un élément superficiel x d'ordre s par rapport à $\mathfrak{v}$ qui ne soit pas contenu dans un certain nombre fini d'idéaux non ouverts $\mathfrak{b}_k$ de A. Remarquons, en effet, que dans un $A/\mathfrak{v}$-module de type fini E, tout sous-module F distinct de E est tel que $F + (\mathfrak{m}/\mathfrak{v})E \neq E$ (on est aussitôt ramené au cas où E est libre et a une base (X_i); de $F + (\mathfrak{m}/\mathfrak{a})E = E$, on déduit $X_i - \sum_j \overline{m}_{ij} X_j \in F \left(\overline{m}_{ij} = \mathfrak{m}/\mathfrak{v}\right)$; comme le déterminant de ces formes linéaires est de la forme $1 + \overline{m}\left(\overline{m} \in \mathfrak{m}/\mathfrak{v}\right)$, il est inversible ; d'où $X_i \in F$ et $F = E$). Par conséquent, la réunion d'un nombre fini F_j de sous-modules propres de E est distincte de E [considérer l'espace vectoriel $E/(\mathfrak{m}/\mathfrak{v})E$ sur le corps infini $A/\mathfrak{m}$]. En appliquant ceci à $\mathfrak{v}^s/\mathfrak{v}^{s+1}$ et en utilisant le raisonnement de (II, 2, 2), on obtient l'existence d'un élément x annoncé.

3. Polynomes caractéristiques dans les anneaux semi-locaux. — Soient A un anneau semi-local, $\mathfrak{m}$ l'intersection des idéaux maximaux de A. Un idéal $\mathfrak{v}$ tel que $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{v} \supset \mathfrak{m}^t$ est appelé un *idéal de définition* de A; c'est un idéal dont les puissances définissent la topologie de A; si A est un anneau local, les idéaux de définition de A ne sont autres que les idéaux primaires pour l'idéal maximal de A. Alors $A/\mathfrak{v}$ est un anneau d'Artin (I, 1, *e*).

Par *longueur* d'un anneau d'Artin B (resp. d'un module E de type fini sur B), nous entendrons la longueur d'une suite de composition formée d'idéaux de B (resp. de sous-modules de E). La structure des anneaux d'Artin (I, 5, *remarque* au cor. 1) et le théorème de Jordan-Hölder montrent que cette longueur est finie et indépendante de la suite de composition choisie; nous la noterons L(B) [resp. L(E)].

THÉORÈME. — *Si* A *est un anneau semi-local et* $\mathfrak{v}$ *un idéal de définition de* A, *la longueur* $L(A/\mathfrak{v}^n)$ *est un polynome* $P_{\mathfrak{v}}(n)$ *pour n assez grand.*

La définition de l'anneau de formes $F(\mathfrak{v})$ (II, 1, *a*) montre aussitôt que $L(A/\mathfrak{v}^n)$ est égale à la somme des longueurs des modules de formes de degré $p < n$ de $F(\mathfrak{v})$. Il nous suffira donc de montrer que la longueur du module des formes de degré n de $F(\mathfrak{v})$ est un polynome en n pour n assez grand. Or $F(\mathfrak{v})$ est isomorphe à un quotient de l'anneau de polynomes $(A/\mathfrak{v})[X_1, \ldots, X_s]$ par un idéal homogène.

Rappelons, d'autre part, que, étant donné un idéal homogène $\mathfrak{i}$ d'un anneau de polynomes $K[X_1, \ldots, X_s]$ sur un corps K, la dimension $d(n)$ de l'espace vectoriel des formes de degré n qui appartiennent à $\mathfrak{i}$, est un polynome en n pour n assez grand. (Ce résultat est dû à Hilbert [34]; démonstration combinatoire chez Sperner [71]; démonstration par décomposition primaire de $\mathfrak{i}$ et double récurrence chez van der Waerden [79]; *voir* aussi [42], n° 24).

Il ne nous reste donc plus qu'à montrer que ce résultat reste valable si l'on remplace le corps K par un anneau d'Artin B (et les dimensions d'espaces vectoriels par les longueurs des modules correspondants). Pour cela on raisonne par récurrence sur la longueur q de B : soient $\mathfrak{n}$ un idéal minimal de B, F_n le module des formes de degré n de $R = B[X_1, \ldots, X_s]$; si $\mathfrak{i}$ est un idéal homogène de R, on a

$$L(F_n \cap \mathfrak{i}) = L(((F_n \cap \mathfrak{i}) + \mathfrak{n}F_n)/\mathfrak{n}F_n) + L(\mathfrak{n}F_n \cap \mathfrak{i});$$

comme $(\mathfrak{i} + \mathfrak{n}R)/\mathfrak{n}R$ s'obtient par réduction mod $\mathfrak{n}$ des coefficients des polynomes de $\mathfrak{i}$, $L(((F_n \cap \mathfrak{i}) + \mathfrak{n}F_n)/\mathfrak{n}F_n)$ est un polynome en n pour n assez grand d'après l'hypothèse de récurrence; d'autre part, $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{n}R$ est canoniquement isomorphe à un idéal homogène de $(B/\mathfrak{p})[X_1, \ldots X_s]$, $\mathfrak{p}$ désignant l'annulateur de $\mathfrak{n}$; comme $\mathfrak{n}$ est minimal (et en particulier principal), $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal de B, et $B/\mathfrak{p}$ est un corps; donc $L(\mathfrak{n}F_n \cap \mathfrak{i})$ est un polynome en n pour n assez grand, d'après le résultat de Hilbert.

Le polynome $P_\mathfrak{v}(n)$ est appelé le *polynome caractéristique* de l'idéal $\mathfrak{v}$. Comme il ne prend que des valeurs entières pour tout entier n assez grand (et donc pour tout entier n), ses coefficients sont multiples de $1/d\,!$, d désignant son degré [34]. Remarquons les propriétés suivantes :

a. Si $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{v}'$, on a $P_\mathfrak{v}(n) \geqq P_{\mathfrak{v}'}(n)$;

b. Si $x \in \mathfrak{v}$, on a $P_{\mathfrak{v}/Ax}(n) = P_\mathfrak{v}(n) - L(\mathfrak{v}^n : Ax)$;

c. Si x est un élément superficiel d'ordre s par rapport à $\mathfrak{v}$ (II, 2, *a*) [c'est-à-dire tel que $(\mathfrak{v}^n : Ax) \cap \mathfrak{v}^c = \mathfrak{v}^{n-s}$], on déduit de *b* que l'on a $P_\mathfrak{v}(n) - P_\mathfrak{v}(n-s) \leqq P_{\mathfrak{v}/Ax}(n) \leqq P_\mathfrak{v}(n) - P_\mathfrak{v}(n-s) + P_\mathfrak{v}(c)$. Ainsi, à une constante près $P_{\mathfrak{v}/Ax}(n)$ est égal à $P_\mathfrak{v}(n) - P_\mathfrak{v}(n-s)$, et son degré est $d^o(P_\mathfrak{v}) - 1$.

d. Les idéaux $\mathfrak{v}$ et $\hat{A}\mathfrak{v}$ ont même polynome caractéristique.

Remarque. — Soit B un anneau noethérien quelconque, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de B et $\mathfrak{q}$ un idéal primaire pour $\mathfrak{p}$. On appelle *longueur* de l'idéal primaire $\mathfrak{q}$ la longueur maximum d'une suite strictement décroissante d'idéaux primaires pour $\mathfrak{p}$ reliant $\mathfrak{p}$ à $\mathfrak{q}$. Si l'on passe à l'anneau des fractions $B_{\mathfrak{p}}$ de $\mathfrak{p}$, les résultats de (I, 4, c et f) montrent que la longueur de la puissance symbolique $n^{\text{ième}}$ $\mathfrak{q}^{(n)}$ est finie, et est un polynome en n pour n assez grand.

4. **Théorie de la dimension.** — *a*. Si $\mathfrak{v}$ et $\mathfrak{v}'$ sont deux idéaux de définition de l'anneau semi-local A, on a $\mathfrak{v}^a \subset \mathfrak{v}'$ et $\mathfrak{v}'^b \subset \mathfrak{v}$ pour des exposant a et b convenables; d'où

$$P_{\mathfrak{v}}(an) \geqq P_{\mathfrak{v}'}(n) \qquad \text{et} \qquad P_{\mathfrak{v}'}(bn) \geqq P_{\mathfrak{v}}(n).$$

Ceci montre que les polynomes caractéristiques de $\mathfrak{v}$ et $\mathfrak{v}'$ ont *même degré d*. Ce dégré commun est appelé la *dimension* de l'anneau semi-local A. Il est clair que le complété $\hat{A}$ de A a même dimension que A. La décomposition de $\hat{A}$ en composé direct d'anneaux locaux complets A_i (I, 5, cor. 2) montre $\dim(\hat{A}) = \max(\dim(A_i))$ (regarder la structure des idéaux d'un composé direct); on a donc $\dim(A) = \max(\dim(A_{\mathfrak{p}_i}))$, les $\mathfrak{p}_i$ étant les idéaux maximaux de A (I, 5, *remarque* au cor. 2).

b. Comme le module des polynomes de degré $\leqq n$ de $(A/\mathfrak{v})[X_1, \ldots X_s]$ a pour longueur $L(A/\mathfrak{v})\binom{n+s}{s}$, et comme $F(\mathfrak{v})$ est un quotient de $(A/\mathfrak{v})[X_1, \ldots, X_s]$, on a $d \leqq s$ (s étant le nombre d'éléments d'un système de générateurs de $\mathfrak{v}$; *cf.* II, 1, f), et tout idéal de définition $\mathfrak{v}$ de A ne peut avoir moins de d générateurs. D'autre part, en utilisant (II, 3, c) et le fait que, dans un anneau semi-local de dimension o, tout idéal de définition est nilpotent (la topologie est alors discrète), on voit, par récurrence sur d (utiliser l'existence d'éléments superficiels; *cf.* II, 2, b), qu'il existe un idéal de définition de A engendré par d éléments. Donc :

Proposition 1. — *La dimension d d'un anneau semi-local* A *est le nombre minimum de générateurs d'un idéal de définition de* A.

Ceci montre que, dans le cas des anneaux locaux, notre définition coïncide avec celle de Chevalley [13]. Une famille $(x_1, \ldots, x_d)$ de d éléments engendrant un idéal de définition de A est appelé un *système de paramètres* de A.

c. Soit $(x_1, \ldots, x_d)$ un système de paramètres de A. L'anneau $A/\mathfrak{r}$, où $\mathfrak{r}$ désigne l'idéal $(x_1, \ldots, x_r)$ de A, est de dimension $d-r$. En effet, les classes de $x_{r+1}, \ldots, x_d$ en engendrent un idéal de définition; et, si un tel idéal $\mathfrak{v}/\mathfrak{r}$ était engendré par moins de $d-r$ éléments, $\mathfrak{v}$ serait un idéal de définition de A, et serait engendré par moins de d éléments.

d. Supposons maintenant que A soit un anneau *local*; alors un idéal de définition $\mathfrak{q}$ de A est un idéal primaire pour l'idéal maximal $\mathfrak{m}$.

Appelons *chaîne d'idéaux premiers* d'un anneau quelconque B, une suite $\mathfrak{p}_i$ d'idéaux premiers distincts tels que $\mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{p}_m$; l'entier m est appelé la *longueur* de la chaîne. Dans un anneau local de dimension d, il existe une chaîne d'idéaux premiers de longueur d [c'est clair pour $d = 0$; on procède ensuite par récurrence, en considérant A/Ax, où x est un élément superficiel n'appartenant à aucun idéal premier minimal de A (II, 2, *c*)]. Pour montrer réciproquement que, dans un anneau local A de dimension d, toute chaîne d'idéaux premiers est de longueur $\leq d$, on traite d'abord le cas $d = 1$ (« Hauptidealsatz » de [42], n° 15). [On peut supposer A sans diviseurs de zéro, par quotient par un idéal premier minimal, et complet (I, 3, cor. 2 de la prop. 1); soit alors $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A autre que (o) et que l'idéal maximal $\mathfrak{m}$, et soit a un paramètre de A; on a $a \notin \mathfrak{p}$, sinon $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$; d'où $(\mathfrak{p}^{(n)} : Aa) = \mathfrak{p}^{(n)}$ pour tout n, ce qui, puisque $\mathfrak{p} \neq (0)$, implique $\mathfrak{p}^{(n)} \not\subset Aa$, contrairement à $\bigcap_r \mathfrak{p}^{(n)} = (0)$ et à (I, 3, prop. 2)].

Avant de passer au cas général, remarquons que, si $\mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{p}_m$ est une chaîne d'idéaux premiers d'un anneau noethérien B, et $(\mathfrak{v}_i)$ des idéaux premiers de B dont aucun ne contient $\mathfrak{p}_1$, il existe une chaîne d'idéaux premiers $\mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}'_1 \supset \ldots \mathfrak{p}'_{m-1} \supset \mathfrak{p}_m$ de même longueur, telle qu'aucun $\mathfrak{p}'_k$ ne soit contenu dans aucun $\mathfrak{n}_i$ (on se ramène aussitôt au cas $m = 2$; il existe alors $c \in \mathfrak{p}_0$ tel que $c \notin \mathfrak{p}_2$ et $c \notin \mathfrak{n}_i$; on prend pour $\mathfrak{p}'_1$ un idéal premier minimal de $\mathfrak{p}_2 + Bc$ contenu dans $\mathfrak{p}_0$: on a alors $\mathfrak{p}'_1 \neq \mathfrak{p}_2$ par construction, et $\mathfrak{p}'_1 \neq \mathfrak{p}_0$ d'après l'Hauptidealsatz). Soit enfin $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{p}_m$ une chaîne d'idéaux premiers de l'anneau local A de dimension d, et soit $(x_1, \ldots, x_d)$ un système de paramètre de A; d'après ce qui vient d'être vu, on peut supposer que $\mathfrak{p}_{m-1}$ n'est contenu dans aucun des idéaux premiers minimaux de l'idéal $\mathfrak{r} = Ax_2 + \ldots + Ax_d$; alors $\mathfrak{p}_{m-1} + \mathfrak{r}$ est primaire pour $\mathfrak{m}$ (Hauptidealsatz), et $A/\mathfrak{p}_{m-1}$ est de dimensiin $\leqq d - 1$ (prop. 1); d'où, par récurrence sur la dimension :

Proposition 2. — *La dimension d d'un anneau local* A *est la longueur maximum d'une chaîne d'idéaux premiers de* A.

On en déduit les conséquences suivantes : si l'idéal $\mathfrak{b}$ de l'anneau local A contient un élément non diviseur de zéro, on a

$$\dim(A/\mathfrak{b}) < \dim A;$$

si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A, on a $\dim(A/\mathfrak{p}) + \dim(A_{\mathfrak{p}}) \leqq \dim(A)$. D'autre part, la proposition 2 est valable pour un anneau *semi-local* A (si $\mathfrak{p}_i$ désignent les idéaux maximaux de A, on considère les anneaux de fractions $A_{\mathfrak{p}_i}$, et l'on utilise la relation $\dim(A) = \max(\dim(A_{\mathfrak{p}_i}))$ [(II, 4, *a*)]. Ceci, et les propriétés des idéaux premiers d'un anneau B dont tous les éléments sont entiers sur un sous-anneau (I, 6, *rappel*), montre que :

Corollaire. — *Soient* A *un anneau semi-local et* B *une extension finie de* A*; alors les dimensions des anneaux semi-locaux* A *et* B *sont égales.*

5. **Théorie de la multiplicité. Anneaux locaux réguliers.** — Soient A un anneau semi-local de dimension d et $\mathfrak{v}$ un idéal de définition de A. Le polynome caractéristique $P_{\mathfrak{v}}(n)$ a un terme de plus haut degré de la forme $e(\mathfrak{v})n^d/d!$, où $e(\mathfrak{v})$ est un entier > 0 (II, 3). L'entier $e(\mathfrak{v})$ est appelé la *multiplicité* de l'idéal de définition $\mathfrak{v}$. Si A est un anneau local, et si $\mathfrak{m}$ est son idéal maximal, $e(\mathfrak{m})$ est aussi appelé la *multiplicité de l'anneau local* A.

a. Proposition 1. — *Si l'idéal de définition* $\mathfrak{v}$ *de l'anneau semi-local* A *est engendré par le système de paramètres* $(x_1, \ldots, x_d)$, *on a* $e(\mathfrak{v}) \leqq L(A/\mathfrak{v})$. *Si* $e(\mathfrak{v}) = L(A/\mathfrak{v})$, *l'anneau de formes* $F(\mathfrak{v})$ *est isomorphe à l'anneau de polynomes* $B = (A/\mathfrak{v})[X_1, \ldots, X_d]$.

Comme $F(\mathfrak{v})$ est isomorphe à un quotient $B/\mathfrak{r}$ et comme, en posant $\mathfrak{r} = BX_1 + \ldots + BX_d$, on a $L(B/\mathfrak{r}^{n+1}) = \binom{n+d}{d} L(A/\mathfrak{v})$, l'inégalité est claire. Si $\mathfrak{r}$ contenait une forme non nulle de degré q, il contiendrait ses produits par les monomes de degré $\leqq n-q$, lesquels engendrent un $(A/\mathfrak{v})$-module de longueur $\geqq \binom{n-q+d}{d}$; d'où $P_{\mathfrak{v}}(n+1) \leqq L(A/\mathfrak{v})\binom{n+d}{d} - \binom{n-q+d}{d}$, et $e(\mathfrak{v}) < L(A/\mathfrak{v})$.

b. Avec les notations de *a*, on voit de même que [même si $L(A/\mathfrak{v}) > e(\mathfrak{v})$] l'idéal $\mathfrak{r}$ ne contient aucune forme F ayant au moins un coefficient inversible $\Big[$en effet, une telle forme F engendre un module de longueur $L(A/\mathfrak{v})$; donc, si h désigne le degré de F, les produits de F par les monomes de degré $\leqq n-h$ engendrent un module de longueur $L(A/\mathfrak{v})\binom{n+d-k}{d}$; alors

$$F_{\mathfrak{v}}(n+1) \leqq L(A/\mathfrak{v})\left(\binom{n+d}{d} - \binom{n-k+d}{d}\right)$$

serait de degré $< d\Big]$ (*cf.* [13]). On déduit aussitôt de là que, si l'anneau semi-local A contient un corps L, les éléments d'un système de paramètres de A sont analytiquement indépendants sur L.

c. Un anneau local A de dimension d est dit *régulier* (« p-Reihenring » de [45]), si son idéal maximal $\mathfrak{m}$ est engendré par d éléments $(x_1, \ldots, x_d)$; ceux-ci forment alors un système de paramètres de A, appelé *système régulier de paramètres*. Comme $L(A/\mathfrak{m}) = 1$, on a $e(\mathfrak{m}) = 1$, et $F(\mathfrak{m})$ est isomorphe à l'anneau de polynomes à d variables sur le corps $A/\mathfrak{m}$ (prop. 1). Par conséquent, un anneau local régulier est un *anneau d'intégrité intégralement clos* (II, 1, *c* et *e*). Tout élément $x \in \mathfrak{m}^k$ tel que $x \notin \mathfrak{m}^{k+1}$ est superficiel d'ordre k par rapport à $\mathfrak{m}$. On remarquera que, si A est un anneau local régulier, il en est de même de son complété $\hat{A}$. Si $(x_1, \ldots, x_d)$ est un système régulier de paramètres de l'anneau local régulier A, l'anneau quotient $A/(Ax_1 + \ldots + Ax_s)$ est un anneau local régulie pour tout $s \leqq d$.

d. Le résultat suivant a une certaine utilité technique : si A est un anneau local régulier de dimension d, et si $A/\mathfrak{b}$ est de dimension q, il existe un système régulier de paramètres $(x_1, \ldots, x_d)$ de A tel que l'idéal $(\mathfrak{b}, x_{q+1}, \ldots, x_d)$ soit primaire pour $\mathfrak{m}$·([20], lemma 15). [Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ un système régulier de paramètres de A; par récurrence sur q, on est amené à montrer l'existence d'un u_i tel que

$A/(\mathfrak{b}, u_i)$ soit de dimension $q - 1$ (lorsque $q \neq 0$); il suffit pour cela de le prendre en dehors des idéaux premiers minimaux de $\mathfrak{b}$ (II, 4, prop. 2); comme la réunion de ceux-ci est distincte de $\mathfrak{m}$, l'existence de u_i est démontrée].

e. Nous supposerons, dans cet alinéa, que A est un anneau local tel que $A/\mathfrak{m}$ soit un corps *infini*. Si $\mathfrak{q}$ est un idéal primaire pour $\mathfrak{m}$, et x un élément superficiel par rapport à $\mathfrak{q}$, on déduit de

$$P_{\mathfrak{q}}(n) - P_{\mathfrak{q}}(n-1) \leqq P_{\mathfrak{q}/Ax}(n) \leqq P_{\mathfrak{q}}(n) - P_{\mathfrak{q}}(n-1) + P_{\mathfrak{q}}(c) \quad \text{(II, 3, } c\text{)}$$

que l'on a $e(\mathfrak{q}) = e(\mathfrak{q}/Ax)$. De ceci, on tire les conséquences suivantes :

A. Il existe un idéal $\mathfrak{q}' \subset \mathfrak{q}$, engendré par un système de paramètres et de même multiplicité que $\mathfrak{q}$ (récurrence sur la dimension d de A, à partir du cas $d = 0$, où c'est conséquence des définitions) ([63], Chap. II, th. 5).

Ce résultat permet, en Géométrie algébrique ou algébroïde, de ramener les multiplicités de composantes excédentaires d'intersection à celles de composantes propres [59], [61], [63].

B. Si $\mathfrak{q}$ est engendré par un système de paramètres $(y_1, \ldots y_d,)$, il est aussi engendré par un système de paramètres $(x_1, \ldots, x_d)$ tel que

$$e(\mathfrak{q}) = e(\mathfrak{q}/Ax_1) = \ldots = e(\mathfrak{q}/(Ax_1 + \ldots + Ax_{h-1}))$$

[prendre pour x_1 un élément superficiel par rapport à $\mathfrak{q}$ de la forme $x_1 = uy_1 + a_2y_2 + \ldots + a_dy_d$ avec u inversible; ceci est possible puisque, si $d > 1$, on a $\mathfrak{q} \not\subset \mathfrak{m}y_1$ (II, 2, *e*); puis, on opère de même dans $A/Ax_1, \ldots$]. Considérons alors la classe $\bar{x}$ de x_d dans l'anneau de dimension 1 $B = A/(Ax_1 + \ldots + Ax_{d-1})$; on a $e(\mathfrak{q}) = e(B\bar{x})$; si $\bar{x}$ *n'est pas un diviseur de zéro* dans B, les modules $B\bar{x}^n/B\bar{x}^{n+1}$ sont tous isomorphes à $B/B\bar{x}$ (par les isomorphismes déduits de $\bar{y} \to \bar{x}^{n+1}\bar{y}$), et l'on a $e(B\bar{x}) = L(B/B\bar{x}) = L(A/\mathfrak{q})$; dans ces conditions, *la longueur de $\mathfrak{q}$ est égale à sa multiplicité;* on peut donc appliquer à $\mathfrak{q}$ les résultats de la proposition 1.

La condition que $\bar{x}$ ne soit pas diviseur de zéro dans B est assez restrictive; elle n'est remplie par aucun système de paramètres de l'anneau local $K[[u^4, u^3v, uv^3, v^4]]$ [49]. Elle est cependant vérifiée lorsque l'on peut assurer que l'idéal (o) de B n'a pas de composantes immergées (*cf.* [63], § 3). Ceci explique le succès partiel des définitions des multiplicités d'intersection comme longueurs de certains idéaux [78], [79], [80], et leur échec en face du contre-exemple ci-dessus.

f. Proposition 2. — *Soient* A' *un anneau local d'idéal maximal* $\mathfrak{m}'$, A *un sous-anneau local de* A' *tel que* A' *soit extension finie de* A, *et qu'aucun élément non nul de* A *ne soit diviseur de zéro dans* A'. *Alors* A *et* A' *ont même dimension et si* $\mathfrak{q}$ *est un idéal primaire pour l'idéal maximal* $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \cap A$ *de* A, *on a*

$$[A' : A].e(\mathfrak{q}) = [A'/\mathfrak{m}' : A/\mathfrak{m}].e(A'\mathfrak{q}).$$

Remarquons d'abord que, si F est un A'-module de longueur finie $L_{A'}(F)$, c'est aussi un A-module de longueur finie

$$L_A(F) = [A'/\mathfrak{m}' : A/\mathfrak{m}].L_{A'}(F)$$

(en effet, F est annulé par un $\mathfrak{m}'^s$ et il suffit d'étudier les modules $A'/\mathfrak{m}'^s$, ou encore $\mathfrak{m}'^j/\mathfrak{m}'^{j+1}$). D'autre part, il existe un élément non nul c de A, et des éléments $(b'_i, \ldots, b'_r)$ de A' linéairement indépendants sur A, tels que $cA' \subset E = \sum_i A\, b'_i$. En considérant l'application canonique de $E/E\mathfrak{q}^n$ sur $(E + A'\mathfrak{q}^n)/A'\mathfrak{q}^n$, on obtient

$$(1) \qquad L_{A'}(E/E\mathfrak{q}^n) \geqq L_{A'}((E + A'\mathfrak{q}^n)/A'\mathfrak{q}^n) \geqq L_{A'}((A'c + A'\mathfrak{q}^n)/A'\mathfrak{q}^n),$$

où le dernier terme vaut $P_{A'\mathfrak{q}}(n) - P_{(A'c+A\mathfrak{q})/A'c}(n)$.

En considérant de même l'application canonique de $A'c/A'c\mathfrak{q}^n$ sur $(A'c + E\mathfrak{q}^n)/E\mathfrak{q}^n$, on obtient

$$(2) \qquad \begin{aligned} L_{A'}(E/E\mathfrak{q}^n) &\leqq L_{A'}(A'c/A'c\mathfrak{q}^n) + L_{A'}(E/(A'c + E\mathfrak{q}^n)) \\ &\leqq L_{A'}(A'c/A'c\mathfrak{q}^n) + L_{A'}(E/(Ec + E\mathfrak{q}^n)). \end{aligned}$$

Les inégalités (1) et (2) s'écrivent aussi :

$$(1') \qquad rP_{\mathfrak{q}}(n) \geqq [(A'/\mathfrak{m}') : (A/\mathfrak{m})]\,(P_{A'\mathfrak{q}}(n) - P_{(A'c+A'\mathfrak{q})/A'c}(n)),$$

$$(2') \qquad r(P_{\mathfrak{q}}(n) - P_{(Ac+\mathfrak{q})/Ac}(n)) \leqq [(A'/\mathfrak{m}') : (A/\mathfrak{m})]\,P_{A'\mathfrak{q}}(n).$$

Comme c n'est diviseur de zéro, ni dans A, ni dans A', les termes de plus hauts degrés du second membre de (1') et du premier membre de (2') sont ceux de $[(A'/\mathfrak{m}') : (A/\mathfrak{m})].P_{A'\mathfrak{q}}(n)$ et de $rP_{\mathfrak{q}}(n)$ (II, 4, *d*). Donc ces denx derniers polynomes ont même degré d (qui est la dimension commune de A et A′), et même coefficient dominant, ce qui démontre l'égalité annoncée.

Corollaire. — *Si* A′ *est un anneau local complet contenant un corps* K *sur lequel* $A'/\mathfrak{m}'$ *est fini, et si* $(x_1, \ldots, x_d)$ *est un système de paramètres de* A′ *engendrant un idéal* $\mathfrak{v}$ *et tel qu'aucun élément non nul de* $A = K[[x_1, \ldots, x_d]]$ *ne soit diviseur de zéro dans* A′, *alors* A′ *est extension finie de* A, *et l'on a*

$$[A':A] = e(\mathfrak{v}).[(A'/\mathfrak{m}'):K].$$

Le fait que A′ est extension finie de A a été démontré en (I, 6, *e*). Le reste se déduit de ce que l'idéal $(x_1, \ldots, x_d)$ de A, qui est un anneau de séries formelles (II, 5, *b*), est de multiplicité 1.

Ce corollaire montre que notre définition de la multiplicité généralise celle de Chevalley ([13] et [16], I, 2, déf. 2). La proposition 2 montre aussi que la notion de multiplicité généralise celle de « ramification degree » due à Cohen ([20], th. 23).

Corollaire 2. — *Soient* A *un anneau local,* B *un anneau semi-local, extension finie de* A *et tel qu'aucun élément non nul de* A *ne soit diviseur de zéro dans* B, $\hat{B} = \sum_i B_i$ *la décomposition du complété* $\hat{B}$ *en composé direct d'anneaux locaux* (I, 5, cor. 2), $\mathfrak{p}_i$ *l'idéal maximal de* B_i, *et* $\mathfrak{q}$ *un idéal primaire pour l'idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *de* A. *On a :*

$$[B:A].e(\mathfrak{q}) = \sum_i [(B_i/\mathfrak{p}_i):(A/\mathfrak{m})].e(B_i\mathfrak{q}) \qquad \text{et} \qquad e(B\mathfrak{q}) = \sum_i e(B_i\mathfrak{q}).$$

Comme $[B:A] = [\hat{B}:\hat{A}]$, on peut supposer A et B complets (I, 6, *h*). Comme B_i contient un sous-anneau A_i isomorphe à A, on exprime $[B_i:A].e(\mathfrak{q})$ par la proposition 2, et l'on en déduit $[B:A]$ par sommation. La seconde formule se déduit de ce que tous les B_i ont même dimension que A et de ce que $B/B\mathfrak{q}^n$ est isomorphe au produit des $B_i/B_i\mathfrak{q}^n$.

g. Proposition 3. — *Soient* A *un anneau semi-local,* $\mathfrak{b}$ *et* $\mathfrak{c}$ *deux idéaux de* A *tels que* $\dim(A/\mathfrak{b}) > \dim(A/\mathfrak{c})$, *et* $\mathfrak{v}$ *un idéal de définition de* A. *On a alors*

$$\dim(A/\mathfrak{b}) = \dim(A/\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) = \dim(A/\mathfrak{b}\mathfrak{c})$$

et

$$e((\mathfrak{v}+\mathfrak{b})/\mathfrak{b}) = e((\mathfrak{v}+(\mathfrak{c}\cap\mathfrak{b}))/\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}) = e(\mathfrak{v}+\mathfrak{bc}/\mathfrak{bc}).$$

Comme $\mathfrak{bc}\subset\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}\subset\mathfrak{b}$, il suffit de démontrer les égalités des termes extrêmes. Considérons les anneaux de formes $F(\mathfrak{v})$, $F((\mathfrak{v}+\mathfrak{b})/\mathfrak{b})$, $F((\mathfrak{v}+\mathfrak{c})/\mathfrak{c})$ et $F((\mathfrak{v}+\mathfrak{bc})/\mathfrak{bc})$ comme quotients d'un même anneau de polynomes R (II, 1, *b*). Le procédé « d'évitement » d'un certain nombre d'idéaux premiers de R (II, 2, *b*) appliqué simultanément pour les trois derniers anneaux de formes, fournit un élément $x\in A$ dont les classes sont superficielles d'ordre s par rapport à $(\mathfrak{v}+\mathfrak{b})/\mathfrak{b}$, $(\mathfrak{v}+\mathfrak{c})/\mathfrak{c}$ et $(\mathfrak{v}+\mathfrak{bc})/\mathfrak{bc}$. On a alors

$$\dim(A/(\mathfrak{b}+Ax)) = \dim(A/\mathfrak{b})-1,$$
$$\dim(A/(\mathfrak{c}+Ax)) = \dim(A/\mathfrak{c})-1, \qquad e((\mathfrak{v}+\mathfrak{b})/\mathfrak{b}).s = e((\mathfrak{v}+\mathfrak{b}+Ax)/(\mathfrak{b}+Ax))$$

et

$$e((\mathfrak{v}+\mathfrak{bc}+Ax)/(\mathfrak{bc}+Ax)) = e((\mathfrak{v}+\mathfrak{bc})/\mathfrak{bc}).s \quad (\text{II}, 3, c).$$

Comme on a $(\mathfrak{b}+Ax)(\mathfrak{c}+Ax)\subset\mathfrak{bc}+Ax\subset\mathfrak{b}+Ax$, il suffit de montrer la proposition 3 pour les idéaux $\mathfrak{b}+Ax$ et $\mathfrak{c}+Ax$, ce qui réduit $\dim(A/\mathfrak{b})$ et $\dim(A/\mathfrak{c})$ d'une unité. Par applications successives, on est ramené au cas où $\mathfrak{c}$ est un idéal ouvert, et où $\dim(A/\mathfrak{b}) > 0$. Il existe alors un exposant a tel que $\mathfrak{bc}\supset\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}^a$ ([84], chap. III, lemma 3), et donc un exposant b tel que $\mathfrak{bc}\supset\mathfrak{b}\cap\mathfrak{v}^b$. On est ainsi ramené à montrer que $e((\mathfrak{v}+\mathfrak{b})/\mathfrak{b}) = e((\mathfrak{v}+\mathfrak{b}\cap\mathfrak{v}^b)/\mathfrak{b}\cap\mathfrak{v}^b)$; or, pour $n\geqq b$, $(\mathfrak{b}+\mathfrak{v}^b)/(\mathfrak{b}+\mathfrak{v}^n)$ est isomorphe à $\mathfrak{v}^b/((\mathfrak{b}\cap\mathfrak{v}^b)+\mathfrak{v}^n)$; donc, à une constante additive près, les longueurs des modules $A/(\mathfrak{b}+\mathfrak{v}^n)$ et $A/((\mathfrak{b}+\mathfrak{v}^b)+\mathfrak{v}^n)$ sont égales; comme la première est un polynome non constant en $n(\dim(A/\mathfrak{b})>0)$, il en est de même de la seconde, et les coefficients dominants de ces polynomes sont égaux; ceci démontre l'égalité annoncée des multiplicités [64].

Historique. — L'emploi systématique des polynomes caractéristiques d'idéaux dans les anneaux locaux est dû à l'auteur [63]. Nous avons ici remédié à diverses complications inutiles de [63], généralisé la plupart des résultats aux anneaux semi-locaux, et évité [sauf en (II, 2, *e*) et (II, 5, *e*)] l'hypothèse d'un corps quotient $A/\mathfrak{m}$ infini. La considération des anneaux de formes (II, 1) remonte essentiellement à Krull [45], et correspond à un procédé fort à la mode en Topologie algébrique [12]. La délicate proposition 2 du paragraphe 4 est due à Krull (« Primidealsatz », [42], n° 15) pour sa seconde moitié, et à Chevalley ([13], appendice) pour sa première moitié; la démonstration de Krull serait beaucoup simplifiée si l'on savait que, étant donné un élément non diviseur de zéro x d'un anneau local A, il existe un idéal $\mathfrak{q}$ primaire pour l'idéal maximal, et un entier s, tels que $(\mathfrak{q}^n : Ax) \subset \mathfrak{q}^{n-s}$ pour n assez grand (*cf.* [63], chap. II); mais ceci semble être un problème non résolu.

CHAPITRE III.

Anneaux locaux géométriques.

Nous dirons qu'un anneau local A est *équidimensionnel* ([16], chap. I, § 2) si, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}_i$ de (o) dans A, on a $\dim(A/\mathfrak{p}_i) = \dim(A)$; ceci implique que (o) n'a pas de composantes immergées (II, 4, prop. 2). Nous dirons que l'anneau local A est *analytiquement équidimensionnel* si son complété $\hat{A}$ est équidimensionnel; alors A est équidimensionnel puisque tout idéal premier de (o) de A est contenu dans un idéal premier de (o) de $\hat{A}$ (I, 3, cor. 1 de la prop. 1). Un idéal $\mathfrak{b}$ de l'anneau local A est dit équidimensionnel (resp. analytiquement équidimensionnel), si $A/\mathfrak{b}$ est équidimensionnel (resp. analytiquement équidimensionnel). Un anneau local A est dit *analytiquement irréductible* si son complété $\hat{A}$ n'a pas de diviseurs de zéro.

1. **Extensions quasi finies d'anneaux locaux.** — *a.* On dit qu'un anneau local B est *quasi fini* sur un sous-anneau local A s'il existe un anneau intermédiaire $C (A \subset C \subset B)$ tel que C soit extension finie de A, et que B soit l'anneau des fractions (au sens ordinaire) d'un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de C; ceci implique que $\mathfrak{m}$ contienne tous les idéaux premiers de zéro de C et que l'on ait $\bigcap_n \mathfrak{m}^n = (o)$. L'anneau intermédiaire C est semi-local (I, 6, *f*). Si A est complet, il en est de même de C, et B est un des facteurs C*e* de la décomposition de C (I, 6, *d* et I, 5, *remarque* au cor. 2). L'anneau B est dit *régulièrement quasi fini* sur A, si aucun élément non nul de A n'est diviseur de zéro dans B; alors, si A est complet, B est fini sur A*e*, qui est isomorphe à A.

b. Nous avons vu (II, 4, cor. de la prop. 2) que les dimensions de A et de l'anneau intermédiaire C sont égales. Comme B est un anneau de fractions de C, la caractérisation de la dimension par les chaînes d'idéaux premiers (II, 4, *d*, prop. 2) montre que l'on a $\dim B \leq \dim A$. Il y a *égalité des dimensions* dans les cas suivants :

A. L'anneau B est régulièrement quasi fini sur A, et A est *intégralement clos*. En effet, étant donné un idéal premier quelconque $\mathfrak{p}$ de A, il est contenu dans l'idéal maximal $\mathfrak{p}_0$ de A, et il existe un idéal premier $\mathfrak{p}'$ de C, contenu dans $\mathfrak{m}$, et tel que $\mathfrak{p}' \cap A = \mathfrak{p}$ (« going down theorem », *cf.* [22], th. 5). On peut donc, de proche en proche, étant donnée une chaîne d'idéaux premiers de A de longueur $\dim A$, construire une chaîne d'idéaux premiers C, de même longueur, et tous contenus dans $\mathfrak{m}$; ceci donne une chaîne d'idéaux premiers de B de longueur $\dim A$.

B. L'anneau B est régulièrement quasi fini sur A, et A est *analytiquement irréductible*. Alors $\hat{A}$ est un sous-anneau de $\hat{C}$, sur lequel $\hat{C}$ est fini, et aucun élément non nul de $\hat{A}$ n'est diviseur de zéro dans $\hat{C}$ (I, 6, *h*). D'autre part, on a $\hat{B} = \hat{C}e = \hat{C}_{\mathfrak{m}\hat{C}}$, e étant un idempotent de $\hat{C}$ (I, 5, *remarque* au cor. 2); et Ce est isomorphe à C, puisque $\bigcap\limits_n \mathfrak{m}^n = (0)$. Il est clair que Ce est fini sur Ae, et donc que $\hat{B} = \hat{C}e$ est fini sur $\hat{A}e$, qui est isomorphe à $\hat{A}$ (I, 6, *h*); d'où l'égalité des dimensions de A et B (II, 4, *d*, cor. de la prop. 2). On vérifie aussitôt qu'aucun élément de $\hat{A}e$ n'est diviseur de zéro dans $\hat{B} = \hat{C}e$, et que $\hat{B}$ est régulièrement quasi fini sur $\hat{A}$. Puisque $\hat{A}$ est sous-espace de $\hat{B}$ (I, 3, cor. 1 de la prop. 2), A est un sous-espace de B. L'anneau $\hat{B}$ est équidimensionnel (et B est donc analytiquement équidimensionnel) : en effet, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de (0) de $\hat{B}$, on a $\mathfrak{p} \cap \hat{A} = (0)$, $\hat{B}/\mathfrak{p}$ est fini sur $\hat{A}$, et l'on en déduit $\dim(\hat{B}/\mathfrak{p}) = \dim \hat{A}$ (II, 4, *d*, cor. de la prop. 2) $= \dim \hat{B}$. Enfin, si R, $\overline{R}$, Z, $\overline{Z}$ désignent les corps des fractions de A et $\hat{A}$ et les anneaux de fractions de B et $\hat{B}$, on a $\overline{Z} = Z_{\overline{R}}$, algèbre obtenue par extension à $\overline{R}$ du corps de base R de Z [en effet, Z et $\overline{Z}$ sont les anneaux de fraction de C et $\hat{C}$, et notre assertion résulte de (I, 6, *h*)].

Dans la plupart des cas envisagés, l'anneau A sera à la fois intégralement clos et analytiquement irréductible [par exemple un anneau local régulier (I, 5, c), ou l'anneau local d'une sous-variété normale (*cf.* V, 2)].

c. Proposition 1. — *Si* B *est quasi fini sur* A, *si* $\mathfrak{v}$ *est un idéal équidimensionnel de* B, *et si* $\mathfrak{v} \cap A$ *est un idéal premier tel que* $A/\mathfrak{v} \cap A$ *soit intégralement clos ou analytiquement irréductible, alors* $B/\mathfrak{v}$ *est régulièrement quasi fini sur* $A/\mathfrak{v} \cap A$, *et l'on a* $\dim(B/\mathfrak{v}) = \dim(A/\mathfrak{v} \cap A)$.

Ceci est clair lorsque $\mathfrak{v}$ est un idéal premier ([16], I, 1, lemma 6). Dans le cas général l'un au moins, $\mathfrak{p}$, des idéaux premiers $(\mathfrak{p}_i)$ de $\mathfrak{v}$ est tel que $\mathfrak{p} \cap A = \mathfrak{v} \cap A$ (sinon, prendre $x_i \in \mathfrak{p}_i \cap A$, $x_i \notin \mathfrak{v} \cap A$, et former $(\Pi x_i)^n$, n étant assez grand); on a alors

$$\dim(B/\mathfrak{v}) = \dim(B/\mathfrak{p}) = \dim(A/\mathfrak{v} \cap A).$$

On a, d'autre part, $\dim(B/\mathfrak{p}_i) \leq \dim(A/A \cap \mathfrak{p}_i)$ puisque $B/\mathfrak{p}_i$ est quasi fini sur $A/A \cap \mathfrak{p}_i$ (III, 1 b); comme $A \cap \mathfrak{p}_i \supset A \cap \mathfrak{v}$, et comme

$$\dim(B/\mathfrak{p}_i) = \dim(B/\mathfrak{v}) = \dim(A/A \cap \mathfrak{v}),$$

ceci implique que $A \cap \mathfrak{p}_i = A \cap \mathfrak{v}$ (II, 4, prop. 2). Alors aucun élément non nul de $A/A \cap \mathfrak{v}$, n'est diviseur de zéro dans $B/\mathfrak{v}$, et $B/\mathfrak{v}$ est régulièrement quasi fini sur $A/A \cap \mathfrak{v}$.

d. Proposition 2. — *Si* B *est régulièrement quasi fini sur* A, *et si* $\mathfrak{p}$ *est un idéal premier de* B, $B_{\mathfrak{p}}$ *est régulièrement quasi fini sur* $A_{\mathfrak{p} \cap A}$.

Soit $\mathfrak{n}$ l'intersection des idéaux de B primaires pour $\mathfrak{p}$; c'est aussi l'intersection des idéaux primaires de (o) dans B contenus dans $\mathfrak{p}$; et $B_{\mathfrak{p}}$ est l'anneau de fraction ordinaire $(B/\mathfrak{n})_{(\mathfrak{p}/\mathfrak{n})}$ (I, 4, d). Comme $\mathfrak{n}$ se compose de diviseurs de zéro, on a $\mathfrak{n} \cap A = (o)$; donc A est un sous-anneau de $B/\mathfrak{n}$, et $A_{\mathfrak{p} \cap A}$ un sous-anneau de $B_{\mathfrak{p}}$. Comme les idéaux premiers de $\mathfrak{n}$ se composent de diviseurs de zéro, aucun élément de A n'est diviseur de zéro dans $B/\mathfrak{n}$, et aucun élément de $A_{\mathfrak{p} \cap A}$ n'est diviseur de zéro dans $B_{\mathfrak{p}}$. Soit alors C un anneau intermédiaire, et soit $B = C_{\mathfrak{m}}$; considérons C_S, S étant le complément de $\mathfrak{p} \cap A$ dans A; il est clair que C_S est extension finie de $A_{\mathfrak{p} \cap A}$; on vérifie alors sans peine que l'on a $B_{\mathfrak{p}} = (C_S)_{\mathfrak{m}'}$, où $\mathfrak{m}' = \mathfrak{p} B_{\mathfrak{p}} \cap C_S$, et que $\mathfrak{m}'$ est un idéal maximal de C_s puisqu'il contient $(\mathfrak{p} \cap A)A_{\mathfrak{p}\cap A}$ ([16], I, 1, lemma 7).

e. Proposition. — (Transitivité.) *Si* A′ *est quasi fini* (resp. *régulièrement quasi fini*) *sur* A, *et* B *quasi fini* (resp. *régulièrement quasi fini*) *sur* A′, *alors* B *est quasi fini* (resp. *régulièrement quasi fini*) *sur* A.

Soient C et C′ des anneaux intermédiaires ($A \subset C \subset A' \subset C' \subset B$). Écrivons $C' = \sum_i A' x_i$, et soit $x_i x_j = \sum_k c_{ijk} x_k$ ($c_{ijk} \in A'$). Il existe un dénominateur commun $d \in C$ tel que $dc_{ijk} \in C$ pour tous i, j, k; et l'on vérifie aisément que $\sum_i dx_i C$ est un anneau intermédiaire entre A et B.

2. **Anneaux à noyaux.** — Soit K un corps d'exposant caractéristique p et tel que $[K:K^p]$ soit fini. Nous noterons $\mathfrak{r}(n, K)$ l'anneau des fractions de l'idéal premier $(x_1, \ldots, x_n)$ de l'anneau de polynomes $K[x_1, \ldots, x_n]$; c'est un anneau local régulier de dimension n; si $\mathfrak{p}_i$ est l'idéal premier engendré par $(x_1, \ldots, x_{n-i})$, $\mathfrak{r}/\mathfrak{p}_i$ est isomorphe à $\mathfrak{r}(i, K)$, et $\mathfrak{r}_{\mathfrak{p}_i}$ à $\mathfrak{r}(n-i, K(x_{n-i+1}, \ldots, x_n))$. Nous noterons $\bar{\mathfrak{r}}(n, m, K)$ $(m \leqq n)$ l'anneau de séries formelles $K((x_1, \ldots, x_m))[[x_{m+1}, \ldots, x_n]]$; c'est un anneau local régulier et complet de dimension $n-m$; le complété de $\mathfrak{r}(n, K)$ est $\bar{\mathfrak{r}}(n, 0, K)$; si $\bar{\mathfrak{p}}_i$ est l'idéal premier de $\bar{\mathfrak{r}}(n, 0, K)$ engendré par $(x_1, \ldots, x_{n-i})$, on a $\bar{\mathfrak{r}}/\bar{\mathfrak{p}}_i = \bar{\mathfrak{r}}(i, 0, K)$; $\bar{\mathfrak{r}}_{\bar{\mathfrak{p}}_i}$ n'est pas complet, et son complété est $\bar{\mathfrak{r}}(n, i, K)$. Les anneaux des types $\mathfrak{r}(n, K)$ et $\bar{\mathfrak{r}}(n, m, K)$ recevront le nom de *noyaux*, et les systèmes de paramètres $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ de $\mathfrak{r}(n, K)$ et $\bar{\mathfrak{r}}(n, m, K)$ seront dits *spéciaux*. Un anneau local A est appelé un *anneau à noyau* s'il est régulièrement quasi fini sur un noyau.

Nous allons montrer que la classe des anneaux à noyau est *stable* par rapport aux opérations suivantes : complétion, quotient par un idéal équidimensionnel, formation de l'anneau des fractions d'un idéal premier. Ceci est clair pour la complétion, un anneau à noyau étant analytiquement irréductible; on déduit d'ailleurs de ceci qu'un anneau à noyau a même dimension que l'un quelconque de ses noyaux (III, 1, b, B). Pour les deux autres opérations, il nous suffira, en tenant compte de la transitivité (III, 1, e, prop. 3), et des propositions 1 et 2 du paragraphe précédent, de montrer le résultat suivant :

Lemme de normalisation. — *Etant donnés un noyau* S *et un idéal* $\mathfrak{b}$ *de* S, *il existe un noyau* R *contenu dans* S *et un système spécial de paramètres* $(y_1 \ldots, y_n)$ *de* R *tels que* S *soit régulièrement quasi fini sur* R, *et que* $\mathfrak{b} \cap$ R *soit engendré par* $(y_{m+1}, \ldots y_n)$.

1° Lorsque S est un anneau de séries formelles $L[[x_1, \ldots, x_n]]$, on considère, parmi les parties finies de $\mathfrak{b}$ qui peuvent être incluses dans un système de paramètres de S, une partie maximale $(y_{m+1}, \ldots, y_n)$, contenue dans le système de paramètres $(y_1, \ldots, y_n)$. On pose $R = L[[y_1, \ldots, y_n]]$. Alors S est extension finie de R (I, 6, e). Et, si $\mathfrak{b} \cap R$ contenait un élément non nul y'_m de $L[[y_1, \ldots, y_m]]$, alors y'_m ferait partie d'un système de paramètres $(y'_1, \ldots, y'_m)$ de $L[[y_1, \ldots, y_m]]$, et $(y'_1, \ldots, y'_m, y_{m+1}, \ldots, y_n)$ serait un système de paramètres de S contrairement au caractère maximal de $(y_{m+1}, \ldots, y_n)$.

2° Considérons maintenant le cas où S est l'anneau des fractions de l'idéal premier $(x_1, \ldots, x_n)$ de l'anneau de polynomes $K[x_1, \ldots, x_n]$. Nous appellerons système d'intégrité de $K[x_1, \ldots, x_n]$ une famille de n polynomes $(y_1, \ldots, y_n)$ tels que $K[x_1, \ldots, x_n]$ soit extension finie de $K[y_1, \ldots, y_n]$. Considérons, parmi les parties finies de $\mathfrak{b}$ qui peuvent être incluses dans un système d'intégrité de $K[x_1, \ldots, x_n]$, une partie maximale $(y_{m+1}, \ldots, y_n)$, contenue dans le système d'intégrité $(y_1, \ldots, y_n)$. Alors, en prenant pour R l'anneau des fractions de l'idéal premier $(y_1 \ldots, y_n)$ de $K[y_1, \ldots, y_n]$, S est régulièrement quasi fini sur R, $R[x_1, \ldots, x_n]$ étant anneau intermédiaire. Reste à montrer que $\mathfrak{b} \cap R$ est engendré par $(y_{m+1}, \ldots, y_n)$, c'est-à-dire que l'on a $\mathfrak{b} \cap K[y_1, \ldots, y_m] = (0)$. En vertu du caractère maximal de $[y_{m+1}, \ldots, y_n]$, il nous suffira, comme dans 1°, de montrer que tout élément non nul z de $K[y_1, \ldots, y_m]$ peut être inclus dans un système d'intégrité de cet anneau (*cf.* [91] et [75]). Soit z_1 la forme de plus haut degré de z; le procédé de (II, 2, b) permet de trouver m formes $(z_1, \ldots, z_m)$ qui engendrent un idéal irrelevant [c'est-à-dire contenant une puissance de l'idéal $(y_1, \ldots, y_m)$].

Si $K[y_1, \ldots, y_m]$ n'était *pas* entier sur $K[z, z_2, \ldots, z_m]$, il existerait une valuation V dont l'anneau contiendrait $K[z. z_2, \ldots, z_m]$ et uon $K[y]$; soit, par exemple, y_1 celui des y_i dont l'ordre pour V soit le plus petit possible (et < 0); posons $y_i = y_1 y'_i$; comme z est dans l'anneau de V et non y_1, $z_1(1, y'_2, \ldots, y'_m)$ est dans l'idéal de V; il en est de même des $z_j(1, y'_2, \ldots, y'_m)$. Comme l'idéal homogène $(z_1, \ldots, z_m)$ est irrelevant, ceci implique que les y'_i sont tous dans l'idéal de V, contrairement au fait que $y'_1 = 1$.

C. Q. F. D.

De ceci, on déduit les résultats suivants :

a. Un anneau à noyau est analytiquement équidimensionnel (III, 1, *b*);

b. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier d'un anneau à noyau A, on a $\dim(A/\mathfrak{p}) + \dim(A_\mathfrak{p}) = \dim(A)$ (prendre un noyau R de A tel que l'idéal $\mathfrak{p} \cap R$ soit engendré par une partie d'un système spécial de paramètres de R);

c. Si $(z_1, \ldots, z_n)$ est un système de paramètres de l'anneau à noyau A, et si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier minimal de l'idéal $(z_{m+1}, \ldots, z_n)$, on a $\dim(A/\mathfrak{p}) = m$, et $\dim(A_\mathfrak{p}) = n - m$ [en effet les classes de $z_1, \ldots, z_m$ engendrent un idéal primaire pour l'idéal maximal de $A/\mathfrak{p}$, d'où $\dim(A/\mathfrak{p}) \leq m$; et les images de $z_{m+1}, \ldots, z_n$ dans $A_\mathfrak{p}$ engendrent un idéal primaire pour $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$, d'où $\dim(A_\mathfrak{p}) \leq n - m$].

On appelle *anneaux locaux géométriques* les anneaux que l'on obtient à partir des noyaux par applications répétées des opérations suivantes : complétion, formation de l'anneau des fractions d'un idéal premier, passage au quotient par un idéal *premier*. L'étude précédente montre que tout anneau local géométrique est un anneau à noyau. La réciproque est fausse à cause de la restriction aux idéaux premiers (et non plus seulement équidimensionnels) dans la formation des anneaux quotients.

3. **Le théorème de transition.** — Soient A un anneau à noyau, $\mathfrak{q}$ un idéal primaire pour l'idéal premier $\mathfrak{p}$ de A. Comme $\mathfrak{q}$ est équidimensionnel, $A/\mathfrak{q}$ est un anneau à noyau (III, 2). Soient $\hat{A}$ le complété de A, $\bar{\mathfrak{p}}$ un idéal premier de $\hat{A}\mathfrak{p}$ [forcément minimal puisque $A/\mathfrak{p}$ est analytiquement équidimensionnel (III, 2, *a*)], et $\bar{\mathfrak{q}}$ la composante

primaire de $\hat{A}\mathfrak{q}$ relative à $\mathfrak{p}$. Soient R un noyau de $A/\mathfrak{q}$, $\hat{R}$ le noyau de $\hat{A}/\hat{A}\mathfrak{q}$ obtenu par complétion de R (III, 1, *b*, B), L et $\bar{L}$ les corps des fractions de R et $\hat{R}$, Z et $\bar{Z}$ les anneaux de fractions de $A/\mathfrak{q}$ et $\hat{A}/\hat{A}\mathfrak{q}$. D'après (III, 1, *b*; B), $\bar{Z}$ est l'algèbre étendue $Z_{\bar{L}}$. Si $(\bar{\mathfrak{p}}_i)$ sont les idéaux premiers de $\hat{A}\mathfrak{p}$, et $(\bar{\mathfrak{q}}_i)$ les composantes primaires correspondantes de $\hat{A}\mathfrak{q}$, l'algèbre $\bar{Z}$ est composée directe des algèbres primaires $(\hat{A}/\bar{\mathfrak{q}}_i)_{(\bar{\mathfrak{p}}_i/\bar{\mathfrak{q}}_i)}$. Or remarquons que $\bar{L}$ est *séparable* sur L [on a, soit $L = K(x_1, \ldots, x_n)$ et $\bar{L} = K((x_1, \ldots, x_n))$, soit $L = K((x_1, \ldots, x_n))$ et $\bar{L} = K((x_1, \ldots, x_m))((x_{m+1}, \ldots, x_n))$; dans les deux cas, on montre que $L^{p^{-1}}$ et $\bar{L}$ sont linéairement disjoints sur L, c'est-à-dire que

$$[K^{p^{-1}}(x_1^{p^{-1}}, \ldots, x_n^{p^{-1}}) : L] = [K^{p^{-1}}((x_1^{p^{-1}}, \ldots, x_n^{p^{-1}})) : \bar{L}]$$

ou que

$$[K^{p^{-1}}((x_1^{p^{-1}}, \ldots, x_n^{p^{-1}})) : L] = [K^{p^{-1}}((x_1^{p^{-1}}, \ldots, x_m^{p^{-1}}))((x_{m+1}^{p^{-1}}, \ldots, x_n^{p^{-1}})) : \bar{L}],$$

ce qui ne représente pas de difficultés, du fait que $[K : K^p]$ est fini (*cf.* [15], prop. 5 et [16], p. 10)]. Alors les algèbres primaires dont $\bar{Z}$ est composée directe ont toutes *même longueur* que l'algèbre primaire Z (si $\mathfrak{v}$ est l'unique idéal premier de Z, on remarque que $\mathfrak{v}Z_{\bar{L}}$ est, en vertu de la séparabilité, le radical de $Z_{\bar{L}}$ (*cf*, [63], chap. I, th. 5)). On a donc démontré la formule suivante (« théorème de transition ») entre longueurs d'idéaux primaires :

$$\text{Longueur}(\bar{\mathfrak{q}}) = \text{Longueur}(\mathfrak{q}). \tag{1}$$

On en déduit les conséquences suivantes :

Corollaire 1. — *Si* $\mathfrak{p}$ *est un idéal premier d'un anneau à noyau* A, $\hat{A}\mathfrak{p}$ *est intersection d'idéaux premiers.*

Il suffit de prendre $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. Ceci est le théorème de Chevalley ([16], I, 1, th. 1) : tout anneau local géométrique est « analytiquement non ramifié ». Il exprime essentiellement que la décomposition locale d'une variété algébrique en variétés algébroïdes n'est pas plus compliquée au sens de la théorie des idéaux qu'elle ne l'est au sens géométrique.

Corollaire 2. — *Si* $\mathfrak{v}$ *est un idéal primaire pour l'idéal pre-*

mier $\mathfrak{p}$ *de l'anneau à noyau* A, *et si* $\bar{\mathfrak{p}}$ *est un idéal premier de* $\hat{A}\mathfrak{p}$, *on a* $P_{(\mathfrak{v}A_\mathfrak{p})}(n) = P_{(\mathfrak{v}\hat{A}_{\bar{\mathfrak{p}}})}(n)$. *En particulier, les multiplicités des idéaux* $\mathfrak{v}A_\mathfrak{p}$ *et* $\mathfrak{v}\hat{A}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ *sont égales.*

Il suffit de prendre pour $\mathfrak{q}$ la puissance symbolique $\mathfrak{v}^{(n)}$ (I, 4, *f*) et de remarquer que $\bar{\mathfrak{v}}^{(n)}$ est la composante primaire de $\hat{A}\mathfrak{v}^{(n)}$ relative à $\bar{\mathfrak{p}}$ (ceci résulte de façon naturelle des définitions; *cf.* [63], chap. I, th. 7). Dans le cas où $\mathfrak{v}A_\mathfrak{p}$ est engendré par un système de paramètres, l'égalité des multiplicités constitue le « theorem of transition » de Chevalley ([16], I, 4, th. 4).

4. **La formule d'associativité.** — Proposition. — *Soient* A *un anneau à noyau,* $\mathfrak{m}$ *son idéal maximal,* $(x_1, \ldots, x_n)$, *un système de paramètres de* A *engendrant l'idéal* $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{v}$ *l'idéal engendré par* $(x_1, \ldots, x_m)$, *et* $(\mathfrak{p}_i)$ *les idéaux premiers minimaux de* $\mathfrak{v}$. *On a alors*

$$e(\mathfrak{q}) = \sum_i e((\mathfrak{q} + \mathfrak{p}_i)/\mathfrak{p}_i).e(\mathfrak{v}A_{\mathfrak{p}_i}).$$

1° Nous supposerons d'abord que A est complet. Alors A contient un corps K sur lequel $A/\mathfrak{m}$ est fini. Soit $L = K((x_1, \ldots, x_n))$ et soit Z l'anneau des fractions de A. L'anneau $R = K[[x_1, \ldots, x_n]]$ est un noyau de A, $K[[x_{m+1}, \ldots, x_n]]$ un noyau de $A/\mathfrak{p}_i$, et l'anneau des fractions S de l'idéal premier $(x_1, \ldots, x_m)$ de R un noyau de $A_{\mathfrak{p}_i}$. Nous noterons C l'anneau de fractions A_T, T étant le complément de l'idéal $(x_1, \ldots, x_m)$ dans R; il est clair que C est un anneau intermédiaire entre S et $A_{\mathfrak{p}_i}$, et que les $\mathfrak{p}_i$ sont en correspondance biunivoque avec les idéaux maximaux de C, c'est-à-dire avec les idempotents primitifs e_i de $\hat{C}$ (I, 5, cor. 2). Soit $\bar{L}$ le corps des fractions de $\hat{S}$; alors l'anneau des fractions de $\hat{C}$ est l'algèbre étendue $Z_{\bar{R}}$ (III, 1, *b*, B). On a donc $[Z : R] = [Z_{\bar{L}} : \bar{L}] = \sum_i [Z_{\bar{L}}e_i : \bar{L}e_i]$. Or

$$[Z_{\bar{L}}e_i : \bar{L}e_i] = e(\mathfrak{v}(\hat{A}_{\mathfrak{p}_i})).[(\hat{C}e_i/\hat{C}\mathfrak{p}_i e_i) : Ke_i((x_1e_i, \ldots, x_m e_i))]$$
(II, 5, cor. 2 de la prop. 2, *f*)
$$= e(\mathfrak{v}A_{\mathfrak{p}_i}).[(A/\mathfrak{p}_i) : K[[x_1, \ldots, x_m]]]$$
$$= e(\mathfrak{v}A_{\mathfrak{p}_i}).e((\mathfrak{q} + \mathfrak{p}_i)/\mathfrak{p}_i).[((A/\mathfrak{p}_i)/(\mathfrak{m}/\mathfrak{p}_i)) : K] \quad \text{(II, 5, } f\text{, cor. 1)}$$
$$= e(\mathfrak{v}A_{\mathfrak{p}_i}).e((\mathfrak{q} + \mathfrak{p}_i)/\mathfrak{p}_i).[(A/\mathfrak{m}) : K].$$

Comme

$$[Z:R] = e(\mathfrak{q}).[(A/\mathfrak{m}):K] \quad (\text{II}, 4, f, \text{cor. } 1),$$

la formule cherchée est démontrée.

2° Si l'on prend pour $\mathfrak{v}$ l'idéal (o), les anneaux $A_{\mathfrak{p}_i}$ sont des algèbres primaires, et $e(\mathfrak{v}A_{\mathfrak{p}_i})$ est la longueur q_i de la composante primaire de (o) relative à $\mathfrak{p}_i$. On a donc $e(\mathfrak{q}) = \sum_i q_i e((\mathfrak{q}+\mathfrak{p}_i)/\mathfrak{p}_i)$.

3° Passons enfin au cas où A n'est pas complet. Alors $\hat{A}\mathfrak{p}_i$ est intersection d'idéaux premiers $\bar{\mathfrak{p}}_{ij}$ (III, 3, cor. 1), et l'on a

$$e((\mathfrak{q}+\mathfrak{p}_i)/\mathfrak{p}_i) = e(\hat{A}(\mathfrak{q}+\mathfrak{p}_i)/\hat{A}\mathfrak{p}_i) = \sum_j e((\hat{A}\mathfrak{q}+\bar{\mathfrak{p}}_{ij})/\bar{\mathfrak{p}}_{ij})$$

en vertu de 2°. D'autre part, $e(\mathfrak{v}_{\mathfrak{p}_i}) = e(\mathfrak{v}\hat{A}_{\bar{\mathfrak{p}}_{ij}})$ d'après le théorème de transition (III, 3, cor. 2). Comme $e(\mathfrak{q}) = e(\hat{A}\mathfrak{q})$, la formule cherchée s'obtient par groupement de termes dans celle relative à $e(\hat{A}\mathfrak{q})$.

Corollaire. — *Si $\mathfrak{v}$ a pour unique composante isolée un idéal premier $\mathfrak{p}$, on a $e(\mathfrak{q}) = e((\mathfrak{q}+\mathfrak{p})/\mathfrak{p})$.*

En effet, $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau local régulier (II, 5, c), et $\mathfrak{v}A_{\mathfrak{p}}$ son idéal maximal; d'où $e(\mathfrak{v}A_{\mathfrak{p}}) = 1$.

Remarque. — Soit maintenant (les notations étant celles de la proposition) $\mathfrak{u}$ l'intersection (équidimensionnelle) des composantes primaires isolées de $\mathfrak{v}$. On a $e(\mathfrak{q}/\mathfrak{v}) = e(\mathfrak{q}+\mathfrak{u}/\mathfrak{u})$ (II, 5, g, prop. 3). D'après la proposition appliquée au système de parmètres $(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ de $A/\mathfrak{u}$, on a

$$e((\mathfrak{q}+\mathfrak{u})/\mathfrak{u}) = \sum_i e((\mathfrak{q}+\mathfrak{p}_i)/\mathfrak{p}_i).L(A_{\mathfrak{p}_i}/A\mathfrak{v}_{\mathfrak{p}_i}).$$

Comme on a l'inégalité $L(A_{\mathfrak{p}_i}/\mathfrak{v}A_{\mathfrak{p}_i}) \geqq e(\mathfrak{v}A_{\mathfrak{p}_i})$ (II, 5, a, prop. 1), on en déduit $e(\mathfrak{q}/\mathfrak{v}) \geqq e(\mathfrak{q})$. Lorsque $e(\mathfrak{q}/\mathfrak{v}) = e(\mathfrak{q})$ [ce qui a lieu lorsque le système de paramètres $(x_1, \ldots, x_n)$ a la propriété décrite en (II, 5, e, B)], on a $L(A_{\mathfrak{p}_i}/\mathfrak{v}A_{\mathfrak{p}_i}) = e(\mathfrak{v}A_{\mathfrak{p}_i})$, et l'on peut appliquer la proposition 1 (II, 5, a) à l'anneau de formes $\bar{F}(\mathfrak{v}A_{\mathfrak{p}_i})$.

Historique. — Les matières traitées dans ce chapitre proviennent, pour la plus grande part, de Chevalley ([16], I). Le traitement systématique des extensions quasi finies d'anneaux locaux provient essentiellement d'un cours professé par Chevalley à Princeton en 1946-1947. L'introduction des quotients par des idéaux équidimensionnels, qui permet de préciser et de simplifier le « theorem of transition, est due à l'auteur ([63], chap. II, § 4). Nous avons aussi évité la restriction à un corps infini K en démontrant le lemme de normalisation de E. Noether (§ 2) par la méthode de Zariski [91]; la méthode de Uzkov donnerait le même résultat [75].

On peut se demander si certaines propriétés des anneaux à noyau se généralisent à des anneaux locaux plus généraux, moyennant des hypothèses convenables, d'équidimensionnalité (analytique ou non), par exemple. Il est en effet peu naturel, pour étudier un anneau local A, d'y introduire un noyau R, choisi avec un grand arbitraire, et dont le seul rôle est un rôle « d'armature », qui permet d'assurer que « les choses se passent bien ».

CHAPITRE IV.

Structure des anneaux locaux complets.

Soient A un anneau local complet, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal. Nous distinguerons deux cas suivant que le corps « résiduel » $A/\mathfrak{m}$ est de caractéristique o ou $p > 0$. Nous noterons φ l'homomorphisme canonique de A sur $A/\mathfrak{m}$. Si $a \in A$, nous noterons $\bar{a}$ sa classe mod $\mathfrak{m}$; si f est un polynome à coefficients dans A, nous noterons $\bar{f}$ le polynome obtenu par réduction des coefficients mod $\mathfrak{m}$.

1. Cas où le corps résiduel est de caractéristique nulle. — Alors A est de caractéristique o, et l'on a le résultat suivant :

1. Théorème. — *Soit* A *un anneau local complet de caractéristique* o, *tel que le corps résiduel* $A/\mathfrak{m}$ *soit de caractéristique* o; *alors* A *contient un sous-corps* K *tel que* $\varphi(K) = A/\mathfrak{m}$ (c'est-à-dire que K est un système complet de représentants pour les classes mod $\mathfrak{m}$).

Du théorème 1, on déduit facilement le résultat suivant :

Corollaire. — *Si* $(x_1, \ldots, x_n)$ *désigne une base de* $\mathfrak{m}$, A *est isomorphe à un quotient de l'anneau de séries formelles* $K[[X_1, \ldots, X_n]]$. *Si* A *est un anneau local régulier, il est isomorphe à un anneau de séries formelles sur* K.

Remarquons que, comme $A/\mathfrak{m}$ est de caractéristique o, tout élément $n.1$ $(n \in Z^*)$ de A est inversible; donc A contient un corps isomorphe au corps Q des nombres rationnels. D'autre part, l'ensemble des sous-corps de A, ordonné par inclusion, est évidemment inductif; il admet donc, en vertu du théorème de Zorn, un élément maximal K. Nous allons montrer que $\varphi(K) = A/\mathfrak{m}$:

Si $A/\mathfrak{m}$ contenait un élément $\bar{x}$ trascendant sur $\varphi(K)$, on aurait $\mathfrak{m} \cap K[x] = (o)$, et A contiendrait $K(x)$.

Ainsi $A/\mathfrak{m}$ est algébrique et séparable sur $\varphi(K)$. Le théorème 1 est alors conséquence immédiate du corollaire au lemme suivant :

Lemme de Hensel. — *Soient* A *un anneau local complet quelconque,* f *un polynome de degré* n *sur* A, γ *et* γ' *des polynomes sur* $A/\mathfrak{m}$ *tels que* γ *soit de degré* $r < n$, *que* $\bar{f} = \gamma\gamma'$, *et que* γ *et* γ' *soient étrangers. Il existe alors des polynomes* g *et* g' *sur* A, *de degrés* r *et* $n - r$, *tels que* $f = gg'$, *et que* $\gamma = \bar{g}$, *et* $\gamma' = \bar{g}'$.

On détermine, par récurrence sur s, deux suites (g_s) et (g'_s) de polynomes de degrés r et $n - r$, tels que $g_{s+1} \equiv g_s(\mathfrak{m}^s)$, $g'_{s+1} \equiv g'_s(\mathfrak{m}^s)$ et $f \equiv g_s g'_s(\mathfrak{m}^s)$. Pour g_1 et g'_1, il suffit de « relever » arbitrairement γ et γ'. Supposons g_s et g'_s déterminés, et soit (m_i) une base de $\mathfrak{m}^s$; posons

$$g_{s+1}(X) = g_s(X) + \sum_i m_i v_i(X) \qquad \text{et} \qquad g'_{s+1}(X) = g'_s(X) + \sum_i m_i v'_i(X);$$

on a, par hypothèse,

$$f(X) - g_s(X)\, g'_s(X) = \sum_i m_i w_i(X);$$

donc la condition $f \equiv g_{s+1} g'_{s+1}(\mathfrak{m}^{s+1})$ s'écrit

$$\sum_i m_i(w_i - v_i g'_s - v'_i g_s) \equiv o(\mathfrak{m}^{s+1});$$

ceci sera réalisé si l'on prend v_i et v'_i tels que $\bar{v}_i\bar{g}'_s + \bar{v}'_i\bar{g}_s = \bar{w}_i$; comme $\bar{g}_s = \gamma$ et $\bar{g}'_s = \gamma'$ sont étrangers, ceci est possible d'après l'identité de Bézout, et l'on peut prendre les v_i de degrés $< r$, et les v'_i de degrés $< n - r$. Les suites des coefficients de polynomes (g_s) et (g'_s) sont alors des suites de Cauchy; comme A est complet, elles ont des limites, ce qui fournit les polynomes g et g' cherchés.

Corollaire. — *Si un polynome f sur A est tel que $\bar{f}$ ait une racine simple $\alpha \in A/\mathfrak{m}$, il existe une racine simple $a \in A$ de f telle que $\bar{a} = \alpha$.*

2. Cas où le corps résiduel est de caractéristique $p > 0$. — Ce cas est nettement plus compliqué que le précédent. L'anneau A peut être de caractéristique o (*cf.* anneau des entiers p-adiques), de caractéristique p (*cf.* séries formelles sur un corps de caractéristique p), ou de caractéristique p^k [*cf.* $Z/(p^k)$]. Toute autre valeur de la caractéristique de A est d'ailleurs exclue.

Remarquons d'abord les faits suivants :

A. Si $x - y \in \mathfrak{m}^n (x \in A,\ y \in A,\ n \geqq 1)$, alors $x^{p^s} - y^{p^s} \in \mathfrak{m}^{n+s}$ (en effet $x^p - y^p$ est le produit de $x - y$ et d'une somme z de p termes dont chacun est congru à $x^{p-1} \bmod \mathfrak{m}$; alors $z \in \mathfrak{m}$, puisque $p \in \mathfrak{m}$).

B. Étant donné un élément $\alpha \in A/\mathfrak{m}$, on appelle *représentant multiplicatif* de α, un élément $a \in A$ qui a une racine p^k/ième dans A pour tout $k \geqq 0$ et tel que $\bar{a} = \alpha$. L'élément α ne peut avoir de représentant multiplicatif que si, pour tout $k \geqq 0$, il admet une racine p^k/ième dans $A/\mathfrak{m}$. S'il en est ainsi, il admet un représentant multiplicatif $a \in A$, et celui-ci est *unique* [soit α_n la racine p^n/ième de α, et $c_n \in A$ tel que $\bar{c}_n = \alpha_n$; la suite $(c_{k+n}^{p^n})$ est une suite de Cauchy d'après A; soit a_k sa limite; on a évidemment $a = a_0 = a_k^{p^k}$ pour tout k. Si b est un autre représentant multiplicatif de α, soit b_n une racine p^n/ième de b dans A; on a $b_n - a_n \in \mathfrak{m}$ puisque la racine p^n/ième de α est unique; d'où $b - a \in \mathfrak{m}^n$ pour tout n d'après A, et $b = a$]. Si a est le représentant multiplicatif de α, nous noterons $a^{p^{-n}}$ celui de $\alpha^{p^{-n}}$. Si α et β ont des représentants multiplicatifs a et b, l'unicité montre que ab est représentant multiplicatif de $\alpha\beta$.

Nous appellerons *p-anneau* un anneau de valuation discrète, de caractéristique o, et dont l'idéal de valuation soit engendré par p.

Théorème de relèvement. — *Soient* A *un anneau local complet dont le corps résiduel* $A/\mathfrak{m}$ *soit de caractéristique* $p > 0$, B *un p-anneau complet, et* τ *un homomorphisme de* B *sur* $A/\mathfrak{m}$ *dont le noyau soit l'idéal maximal* (p) *de* B*; il existe alors un homomorphisme* σ *de* B *dans* A *tel que* $\varphi \circ \sigma = \tau$.

Remarquons que τ définit un isomorphisme $\bar{\tau}$ de $B/(p)$ sur $A/\mathfrak{m}$.

Supposons d'abord que le corps $K = A/\mathfrak{m}$ soit *parfait*; soit K_0 son corps premier, et (α_μ) une base de transcendance de K sur K_0. L'anneau B contient l'anneau des fractions B_0 de l'idéal premier (p) de Z; l'homomorphisme σ_0 de B_0 dans A défini par $\sigma_0(n) = n.1$ satisfait évidemment à $\varphi \circ \sigma_0 = \tau_{B_0}$. Soit $K_1 = K_0(\alpha_\mu^{p^{-n}})$; et soient $a_\mu^{p^{-n}}$ et $b_\mu^{p^{-n}}$ les représentants multiplicatifs dans A et B de $\alpha_\mu^{p^{-n}}$ et $\bar{\tau}^{-1}(\alpha_\mu^{p^{-n}})$; les b_μ sont algébriquement indépendants sur B_0; et les formules $\sigma'_1(b_\mu^{p^{-n}}) = a_\mu^{p^{-n}}$) définissent un homomorphisme σ'_1 de $B'_1 = B_0[b_\mu^{p^{-n}}]$ dans A. Soit v la valuation de B; tout élément b de l'anneau B_1 de la restriction de v au corps des fractions de B'_1 est un quotient P/Q de deux polynomes en les $b_\mu^{p^{-n}}$ (n fixe) à coefficients dans B_0, tous les coefficients de Q n'étant pas multiples de p; alors $\sigma'_1(Q) \notin \mathfrak{m}$, et σ'_1 se prolonge en un homomorphisme σ_1 de B_1 dans A tel que $\varphi \circ \sigma_1 = \tau_{B_1}$. Considérons alors l'ensemble $\mathcal{E}$ des couples $(B_\lambda, \sigma_\lambda)$ composés d'un sous anneau B_λ de B contenant B_1 et qui soit l'anneau de la restriction de v au corps des fractions de B_λ, et d'un homomorphisme σ_λ de B_λ dans A qui prolonge σ_1 et soit tel que $\varphi \circ \sigma_\lambda = \tau_{B_\lambda}$; ordonnons $\mathcal{E}$ par la relation « $B_\lambda \supset B_{\lambda'}$ et σ_λ prolonge $\sigma_{\lambda'}$ »; muni de cette structure, $\mathcal{E}$ est *inductif*, et admet donc un élément maximal (B', σ'). L'anneau B' est complet, car sinon l'on prolongerait à son adhérence σ', qui est un homomorphisme continu, puisque $\sigma'(p) \in \mathfrak{m}$. Montrons que l'on a $\sigma(B') = K$; en effet, K est algébrique et séparable sur K_1 puisque K_1 est parfait, donc aussi sur $\sigma(B')$; alors, si $\alpha \in K$, et si $\pi(X)$ est le polynome minimal de α sur K_1, on choisit un polynome $f(X) \in B'[X]$ unitaire et de même degré que π, tel que $\pi = \tau(f)$; soit $g = \sigma'(f) \in A[X]$; le corollaire au lemme de Hensel (IV, 1) fournit alors des éléments $a \in A$ et $b \in B$ tels que

$g(a) = 0$, $f(b) = 0$, $\tau(b) = \varphi(a) = \alpha$; on peut alors prolonger σ' en prenant $\sigma'(b) = a$ et $B'[b]$ est évidemment l'anneau de la restriction de v à son corps des fractions. Ainsi le corps des valeurs de B' est identique à celui de B; comme p engendre les idéaux maximaux de B et B', on en conclut que $B = B'$ (I, 6, e). Le théorème de relèvement est donc démontré lorsque $A/\mathfrak{m}$ est parfait.

Lorsque $K = A/\mathfrak{m}$ est *imparfait*, le plus petit corps parfait contenant K est $K' = K^{p^{-\infty}}$. Nous allons construire d'abord un anneau local complet A' contenant A, et un p-anneau complet B' contenant B, ayant tous deux leurs corps résiduels isomorphes à K'. On dit qu'une famille (α_i) d'éléments de K est *p-indépendante* si, pour toute sous-famille finie $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, on a $[K^p(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) : K^p] = p^r$; le théorème de Zorn fournit une famille p-indépendante maximale (α_i), dont on vérifie aussitôt qu'elle satisfait à $K^p(\alpha_i) = K$; (α_i) est appelée une *p-base* de K; remarquons que, pour tout entier n, $\left(\alpha_i^{p^{-n}}\right)$ est une p-base de $K^{p^{-n}}$ (*cf.* [8], chap. V, § 8, exerc. 1). Soit (α_i) une p-base de K, et soient $a_i \in A$ et $b_i \in B$ tels que $\varphi(a_i) = \tau(b_i) = \alpha_i$; adjoignons successivement à A (resp. B) des éléments $(a_{i,n})$ (resp. $(b_{i,n})$) tels que $(a_{i,n})^p = a_{i,n-1}$ (resp. $(b_{i,n})^p = b_{i,n-1}$); on vérifie que $C = A[a_{1,1}, \ldots, a_{r,1}]$ est un A-module libre; c'est donc un anneau local complet, dont l'idéal maximal est $C\mathfrak{m}$, et tel que $(C\mathfrak{m})^s \cap A = \mathfrak{m}^s$ (I, 6, g, 1); alors $A_1 = A[a_{i,1}]$ est un anneau ayant $\mathfrak{m}A_1$ pour unique idéal maximal, et tel que $\bigcap_{s=1}^{\infty} (\mathfrak{m}A_1)^s = (0)$ et que $(\mathfrak{m}A_1)^s \cap A = \mathfrak{m}^s$; les mêmes propriétés s'appliquent par récurrence à $A_n = A[a_{i,n}]$, donc à leur réunion A''; le complété A' de A'' pour la topologie définie par les $(\mathfrak{m}A'')^s$ est alors un anneau *local* complet (II, 1, g, cor. de la prop. 1), d'idéal maximal $\mathfrak{m}A'$, ayant K' pour corps résiduel, et l'on a $(\mathfrak{m}A')^s \cap A = \mathfrak{m}^s$. On obtient, de même, un p-anneau complet B', contenant B, et ayant K' pour corps résiduel. Les homomorphismes φ et τ s'étendent canoniquement à A' et B' :

$$\varphi(a_{i,n}) = \tau(b_{i,n}) = \alpha_i^{p^{-n}}.$$

La première partie de la démonstration fournit alors un homomorphisme σ de B' dans A' tel que $\varphi \circ \sigma = \tau$. Il nous suffit maintenant de montrer que l'on a $\sigma(B) \subset A$. Comme $\varphi \circ \sigma(B) = K$, on a $\sigma(B) \subset A + \mathfrak{m}A'$. Procédons par récurrence, et supposons que l'on ait $\sigma(B) \subset A + \mathfrak{m}^s A'$.

Remarquons que, comme $P = (\alpha_i)$ est une p-base de K, on a $K^{p^s}(P) = K$ (en effet $K = K^p(P)$, $K^p = K^{p^2}(P^p)$, donc

$$K = K^{p^2}(P^p, P) = K^{p^2}(P), \quad \ldots);$$

donc, pour $x \in B$, on a $\tau(x) = f(\alpha_i)$, où f est un polynome à coefficients de la forme $\eta^{p^s}(\eta \in K)$; par conséquent, $x = f(b_i) + pz (z \in B)$, les coefficients de f étant de la forme $y^{p^s}(y \in B)$. Or il existe $y' \in A$ tels que $\sigma(y) \equiv y'(\mathfrak{m}A')$; d'où $\sigma(y^{p^s}) \equiv y'^{p^s}(\mathfrak{m}^{s+1}A')$ (remarque A du début du paragraphe). En remplaçant les y par les y', on obtient un polynone g sur A tel que $\sigma(f(b_i)) \equiv g(a_i)(\mathfrak{m}^{s+1}A')$. Comme $\sigma(z) \equiv d(\mathfrak{m}^s A')$, avec $d \in A$ d'après l'hypothèse de récurrence, on a $\sigma(x) \equiv g(a_i) + dp(\mathfrak{m}^{s+1}A')$, d'où $\sigma(B) \subset A + \mathfrak{m}^{s+1}A'$. Comme A est complet, il est fermé dans A', et l'on a bien $\sigma(B) \subset A$.

C. Q. F. D.

Pour appliquer le théorème de relèvement, remarquons que, étant donné un corps K de caractéristique $p > 0$, il existe un p-anneau complet B de corps des fractions L et ayant K pour corps des valeurs (c'est clair pour le corps premier : $B = Z_p$; pour une extension pure $K(\beta_\lambda)$, on considère l'extension canonique à $L(X_\lambda)$ de la valuation de L et l'on complète; pour une extension algébrique monogène $K(\alpha)$, on « relève » dans B le polynome minimal de α sur K, on adjoint à L une racine a du polynome relevé, on étend à $L(a)$ la valuation de L, et la formule « $n = ef$ » montre que $e = 1$). Le théorème de relèvement et le fait que, si un anneau local complet d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ est contenu dans un anneau local complet d'idéal maximal $B'\mathfrak{m}$ et de même corps résiduel que B, on a $B = B'$ (I, 6, e), montrent d'ailleurs que le p-anneau complet B est déterminé de façon unique par K.

On déduit alors du théorème de relèvement, en étudiant la structure du sous-anneau $\sigma(B)$ de A qui est isomorphe à un quotient de B :

Théorème 2. — *Soit* A *un anneau local complet d'idéal maximal* $\mathfrak{m}$; *supposons que* $A/\mathfrak{m}$ *soit de caractéristique* $p > 0$; *et soit* B *un p-anneau complet de corps résiduel isomorphe à* $A/\mathfrak{m}$.

a. Si A *est de caractéristique* 0, *il contient un sous-anneau isomorphe à* B;

b. Si A *est de caractéristique* $p^k (k \geq 1)$, *il contient un sous-anneau isomorphe à* $B/(p^k)$. *En particulier, si* A *est de caractéristique* p, *il contient un corps* K *tel que* $\varphi(K) = A/\mathfrak{m}$.

Un sous-anneau de A, ayant les propriétés décrites dans le théorème 2 ou dans le théorème 1 (§ 1) est appelé un *anneau de Cohen* de A.

COROLLAIRE. — *Soit* C *un anneau de Cohen de* A, *et soit* $(x_1, \ldots, x_s)$ *une base de* $\mathfrak{m}$; *alors* A *est isomorphe à un quotient de l'anneau de séries formelles* $C[[X_1, \ldots, X_s]]$.

Remarques. — 1° Dans le cas où A est de caractéristique p, l'existence du corps de Cohen K peut se démontrer directement, sans utiliser le théorème de relèvement ([20], II, 4 et 5).

2° Lorsque $A/\mathfrak{m}$ est parfait et de caractéristique $p > 0$, l'anneau de Cohen C est déterminé de façon unique : c'est l'ensemble des éléments $\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n$, où les a_n sont des représentants multiplicatifs. Lorsque $A/\mathfrak{m}$ est C de caractéristique 0, ou imparfait, il y a une infinité de sous-anneaux possibles, à moins que $\mathfrak{m} = Ap$.

3. **Structure des anneaux locaux réguliers et complets.** — Comme un anneau local régulier n'a pas de diviseurs de zéro (II, 5, *c*), il est de caractéristique 0 ou p. Lorsque les caractéristiques de A et $A/\mathfrak{m}$ sont égales, l'existence d'un corps de Cohen (th. 1 et 2) et le fait que les éléments d'un système de paramètres de A sont analytiquement indépendants sur tout sous-corps de A (II, 5, *b*), montrent que :

THÉORÈME 3. — *Soient* A *un anneau local régulier et complet ayant même caractéristique que son corps résiduel,* K *un corps de Cohen de* A, *et* $(x_1, \ldots, x_d)$ *un système régulier de paramètres de* A; *alors* A *est isomorphe à l'anneau de séries formelles* $K[[x_1, \ldots, x_d]]$.

Lorsque A est de caractéristique 0, et $A/\mathfrak{m}$ de caractéristique $p > 0$, les choses sont simples lorsque $p \notin \mathfrak{m}^2$; en effet, on peut alors inclure p dans un système régulier de paramètres de A et l'on a :

Théorème 4. — *Soient* A *un anneau local régulier et complet de caractéristique* o, *de corps résiduel* $A/\mathfrak{m}$ *de caractéristique* $p > 0$, *et de dimension* d; *supposons que* $p \notin \mathfrak{m}^2$; *alors* A *est isomorphe à un anneau de séries formelles à* $d - 1$ *variables sur le* p*-anneau complet de corps résiduel* $A/\mathfrak{m}$.

Un anneau local régulier qui est, soit d'égales caractéristiques (*cf.* th. 3), soit d'inégales caractéristiques avec $p \notin \mathfrak{m}^2$ (*cf.* th. 4), est dit *non ramifié*.

Pour aller plus loin, nous aurons besoin du résultat suivant :

Proposition 1. — *Soit* B *un anneau local complet de dimension* d, *et tel que* $\dim(B/(p)) = d - 1$ *dans le cas d'inégales caractéristiques; alors* B *est extension finie d'un anneau local* A *régulier, non ramifié, complet, et de même corps résiduel que* B; *si* B *est équidimensionnel, aucun élément non nul de* A *n'est diviseur de zéro dans* B.

L'hypothèse exclut le cas de la caractéristique $p^k (k \geq 2)$, et est vérifiée lorsque p n'est pas diviseur de zéro (II, 4, d). On considère un système de paramètres $(y_1, \ldots, y_d)$ de B, tel que $y_1 = p$ dans le cas d'inégales caractéristiques. Soit C un anneau de Cohen de B; on prend $A = C[[y_1, \ldots, y_d]]$ dans le cas d'égales caractéristiques, $A = C[[y_2, \ldots, y_d]]$ dans le cas d'inégales caractéristiques; alors (I, 6, d et e) montrent que B est extension finie de A. Alors A et B ont même dimension (II, 4, d, cor. de la prop. 2), et la seconde assertion a été vue au chapitre III (III, 1, b, B).

Corollaire 1. — *Si* $\mathfrak{p}$ *est un idéal premier d'un anneau local équidimensionnel et complet* B, *on a* $\dim(B/\mathfrak{p}) + \dim(B_\mathfrak{p}) = \dim(B)$.

On est aussitôt ramené au cas où B est anneau d'intégrité. Comme l'anneau local régulier A est intégralement clos (II, 5, b), le « going down theorem » ([22], th. 5) montre qu'il suffit de démontrer le résultat pour A. Lorsque A est un anneau de séries formelles sur un corps, ceci a été démontré au chapitre III (III, 2, b) par la méthode de normalisation (l'hypothèse que $[K:K^p]$ est fini n'a été utilisée que plus tard). Soit alors $A = C[[X_1, \ldots, X_{d-1}]]$, C étant un p-anneau; si l'idéal premier $\mathfrak{p}$ de A contient p, il suffit de passer à l'anneau quotient $A/(p)$, qui est d'égales caractéristiques; sinon on a $\mathfrak{p} \cap C = (0)$; or, si K est le corps des fractions de C, et si $A' = K[[X_1, \ldots, X_{d-1}]]$, les formules $\mathfrak{p} \to \mathfrak{p}A'$ et $\mathfrak{p}' \to \mathfrak{p}' \cap A$ définissent une correspondance biunivoque entre les idéaux $\mathfrak{p}'$ de A' et les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de A tels que $\mathfrak{p} \cap C = (0)$; comme le résultat à démontrer s'applique à A', on peut faire passer par $\mathfrak{p}$ une chaîne de longueur $d-1$ d'idéaux premiers $(\mathfrak{p}_i)$ de A tels que $\mathfrak{p}_i \cap C = (0)$; on complète alors cette chaîne par l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A.

Corollaire 2. — *Soit* B *un anneau local régulier et complet, dans le cas d'inégales caractéristiques. Il existe alors un sous-anneau* A *de* B, *qui est un anneau de séries formelles sur un p-anneau de Cohen* C *de* B, *et tel que* $B = A[x]$, *x étant racine d'un polynome unitaire irréductible* $x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k$ *sur* A, *où tous les* a_i *appartiennent à l'idéal maximal* $\mathfrak{m}_0$ *de* A *et où* $a_k \notin \mathfrak{m}_0^2$.

Il existe un système régulier de paramètres $(x_1, \ldots, x_d)$ de B tel que l'idéal $\mathfrak{q} = (p, x_2, \ldots, x_d)$ soit primaire pour l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de B(II, 5, d); alors $A = C[[x_2, \ldots, x_d]]$ est un anneau de séries formelles (II, 5, b). Si $\mathfrak{m}_0$ est l'idéal maximal de A, on a $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}_0 B$. Alors $B/\mathfrak{q}$ est un $A/\mathfrak{m}_0$-module de type fini et, si x^k est la plus petite puissance de $x = x_1$ qui appartienne à $\mathfrak{q}$, les classes mod. $\mathfrak{q}$ de $1, x, \ldots, x^{k-1}$ forment une base de $B/\mathfrak{q}$ sur $A/\mathfrak{m}_0$. Donc (I, 6, e) $(1, x, \ldots, x^{k-1})$ est une base de B sur A, et l'on a $B = A[x]$, où $x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k = 0$, avec $a_i \in A$. On a $a_i \in \mathfrak{m}_0$ pour tout i (sinon $x^{k-h} \in \mathfrak{q}$, h étant le plus grand indice tel que $a_h \notin \mathfrak{m}_0$). De $a_k \in \mathfrak{m}_0^2$, on déduirait $x^k \in \mathfrak{m}\mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}p + \mathfrak{v}$ en posant $\mathfrak{v} = (x_2, \ldots, x_d)$, c'est-à-dire $x^k \in Bpx + \mathfrak{v}$ et $x(x^{k-1} - cp) \in \mathfrak{v}$, contrairement au fait que $\mathfrak{v}$ est premier et à la définition de k. L'irréductibilité du polynome $x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k$ se démontre alors par la méthode du critère d'Eisenstein ([77], § 24).

Voici enfin une représentation d'un anneau local régulier et complet comme quotient :

Proposition 2. — *Un anneau local régulier et complet* B, *d'inégales caractéristiques et de dimension d, est isomorphe au quotient d'un anneau de séries formelles à d variables* S *sur un*

p-anneau C, *par un idéal premier principal engendré par un élément u de l'idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *de* S *tel que* $u \notin \mathfrak{m}^2$.

Soient $(x_1, \ldots, x_d)$ un système régulier de paramètres de B, C un p-anneau de Cohen de B. On prend $S = C[[X_1, \ldots, X_d]]$ (IV, 2, cor. du th. 2). Le noyau $\mathfrak{p}$ de l'homomorphisme canonique de S sur B est premier (II, 5, c) et tel que $\dim(S/\mathfrak{p}) = d$. On a $p \in \sum_i Ax_i$, donc $p \in \sum SX_i + \mathfrak{p}$, et $\mathfrak{p}$ contient un élément $u = p - \sum_i c_i X_i$ tel que $u \in \mathfrak{m}$, $u \notin \mathfrak{m}^2$; comme u peut être inclus dans un système régulier de paramètres de S, l'idéal Su est premier (II, 5, c), donc $\mathfrak{p} = Su$, puisque $\dim(S/\mathfrak{p}) = d$ (II, 4, prop. 2).

4. Applications :

Proposition 1. — *Soient* A *un anneau local régulier complet et non ramifié*, $\mathfrak{p}$ *un idéal premier de* A; *alors* $A_{\mathfrak{p}}$ *est un anneau local régulier non ramifié.*

Soient $d = \dim(A)$, $d - r = \dim(A/\mathfrak{p})$. Il s'agit de montrer que $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ peut être engendré par r éléments. Si, dans le cas d'inégales caractéristiques, on a $p \in \mathfrak{p}$, on se ramène au cas d'égales caractéristiques par réduction mod p; nous supposerons donc $p \notin \mathfrak{p}$ dans le cas d'inégales caractéristiques. Il existe alors un système régulier de paramètres $(u_1, \ldots, u_d)$ de A tel que l'idéal $(\mathfrak{p}, u_{r+1}, \ldots, u_d)$ soit primaire pour l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, et que $u_{r+1} = p$ dans le cas d'inégales caractéristiques (II, 5, d). Soit C un anneau de Cohen de A. Posons $B = C[[u_{r+1}, \ldots, u_d]]$. Comme $A/\mathfrak{p}$ est entier sur $B/\mathfrak{p} \cap B$ (les idéaux engendrés par $u_{r+1}, \ldots, u_d$ étant primaires pour les idéaux maximaux de chacun), ils ont même dimension $d - r$ (II, 4, d, cor. de la prop. 2), et, comme $\dim(B) = d - r$, on a $\mathfrak{p} \cap B = (0)$. Donc $A_{\mathfrak{p}}$ contient le corps des fractions K de B, ainsi que l'anneau de polynomes $S = K[u_1, \ldots, u_r]$. On déduit, d'autre part, du fait que $A/\mathfrak{p}$ est entier sur B, et engendré par les classes $\bar{u}_i$ $(1 \leq i \leq r)$ des u_i mod $\mathfrak{p}$ (I, 6, e), que l'on a $A = \mathfrak{p} + B[u_1, \ldots, u_r]$. En relevant les équations de dépendance intégrale des u_i sur B, on obtient des éléments $a_1, \ldots, a_r$ de $\mathfrak{p}$ tels que $(a_1, \ldots, a_r, u_{r+1}, \ldots, u_d)$ soit primaire pour $\mathfrak{m}$ (a_i étant un polynome unitaire de $B[u_i]$). Si l'on pose

$\mathfrak{v} = (a_1, \ldots, a_r)$, on a aussi $A = \mathfrak{v} + B[u_1, \ldots, u_r]$ (même raisonnement que ci-dessus). On a donc

$$\mathfrak{v} \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{v} + (B[u_1, \ldots, u_r]) \cap \mathfrak{p}, \qquad \text{d'où} \qquad \mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \subset \mathfrak{v}A_\mathfrak{p} + (\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \cap S)A_\mathfrak{p}.$$

Comme on a $a_i \in S \cap \mathfrak{p}$, on en déduit $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \cap S)A_\mathfrak{p}$. Or $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \cap S$ est un idéal premier de l'anneau de polynomes $S = K[u_1, \ldots, u_r]$, et contient les r éléments a_i qui sont algébriquement indépendants sur K; c'est donc un idéal premier de dimension zéro et est, par conséquent, engendré par r éléments ([91], p. 451, lemma 9), lesquels engendrent $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. C. Q. F. D.

Remarque. — Le théorème de transition (III, 3) montre que, si A est un anneau local régulier à noyau, et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A, $A_\mathfrak{p}$ est un anneau local régulier. On en déduit que, pour tout idéal premier $\mathfrak{v}$ d'un anneau de polynomes R sur un corps, $R_\mathfrak{v}$ est un anneau local régulier (considérer un idéal premier de dimension zéro de R contenant $\mathfrak{v}$). En termes géométriques, toute variété (algébrique ou algébroïde) est sous-variété simple de l'espace linéaire ambiant.

PROPOSITION 2. — *Soient* A *un anneau local régulier de dimension d, et $\mathfrak{v} = (a_1, \ldots, a_r)$ un idéal de* A *tel que* $\dim(A/\mathfrak{v}) = d - r$; *alors $\mathfrak{v}$ est est un idéal équidimensionnel.*

On se ramène aussitôt au cas où A est complet, puis à celui où A est complet et non ramifié (IV, 3, prop. 2). Le théorème est évident pour $r = 0$. Procédons alors par récurrence sur r. Il s'agit de montrer qu'il n'existe pas d'idéal premier immergé $\mathfrak{p}$ de V. Comme $A_\mathfrak{p}$ est un anneau local régulier (prop. 1), nous sommes ramenés à montrer que, si $r < d$, l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A n'est pas un idéal premier de $\mathfrak{v}$, c'est-à-dire que $c\mathfrak{m} \subset \mathfrak{v}$ entraîne $c \in \mathfrak{v}$. Soit $\mathfrak{u} = (a_1, \ldots, a_{r-1})$; c'est, d'après l'hypothèse de récurrence, un idéal équidimensionnel tel que $\dim(A/\mathfrak{u}) = d - r + 1$. Soit $(\mathfrak{p}_i)$ la sous-famille des idéaux maximaux de celle des idéaux premiers de $\mathfrak{u}$ et des idéaux premiers isolés de $\mathfrak{v}$; les $\mathfrak{p}_i$ sont tous distincts de $\mathfrak{m}$. Il existe alors un système régulier de paramètres $(u_1, \ldots, u_d)$ de A tel que $u_1 \notin \mathfrak{p}_i$ et que $A/(u_1)$ soit non ramifié [prendre un système régulier de paramètres $(x_1, \ldots, x_d)$ avec $x_d = p$ dans le cas d'inégales caractéristiques;

poser alors $u_j = x_j$ $(j \geqq 2)$ et $u_1 = x_1 + \sum_i c_i x_{m(i)}$, où la somme est étendue aux indices i tels que $x_1 \in \mathfrak{p}_i$, où $x_{m(i)} \notin \mathfrak{p}_i$, et où $c_i \in \prod_{t \neq i} \mathfrak{p}_t$, $c_i \notin \mathfrak{p}_i$]. Si alors $c\mathfrak{m} \subset \mathfrak{v}$, on a $cu_1 \in \mathfrak{v} = (\mathfrak{u}, a_r)$, $cu_1 - da_r \in \mathfrak{u}$, $da_r \in (\mathfrak{u}, u_1)$. Or a_r n'appartient à aucun idéal premier $\mathfrak{p}$ de $(\mathfrak{u}, u_1)$ [en effet $\dim(A/\mathfrak{p}) = d - r$ d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à $(\mathfrak{u}, u_1)/(u_1)$, et $\mathfrak{p}$ serait idéal premier isolé de A, contrairement au choix de u_1]. D'où $d \in (\mathfrak{u}, u_1)$, $d - eu_1 \in \mathfrak{u}$, et $u_1(c - ea_r) \in \mathfrak{v}$. Comme u_1 n'appartient à aucun idéal premier de $\mathfrak{u}$, on en déduit $c - ea_r \in \mathfrak{u}$ et $c \in \mathfrak{u}$. C. Q. F. D.

Historique. — Les matières traitées dans ce chapitre sont dues à I. S. Cohen [20], qui a généralisé aux anneaux locaux complets les théorèmes de structure des anneaux complets de valuations discrètes, dus à Hasse-Schmidt [33], Teichmüller [73] et Mac Lane [50]. Son théorème d'équidimensionnalité (§ 4, prop. 2; th. 22 de [20], inspiré de celui de Macaulay ([49] et [77], § 98), est la clef de l'interprétation de certaines multiplicités d'intersection comme longueurs d'idéaux (*cf.* II, 5, *e*).

Notre exposé a suivi assez fidèlement celui de Cohen. La seule exception est que, suivant en cela une coutume mise à la mode par la Topologie algébrique, nous avons donné le rôle essentiel au théorème de relèvement (§ 2), qui ne joue chez Cohen qu'un rôle effacé (cor. 1 du th. 11).

CHAPITRE V.

Anneaux locaux intégralement clos et factoriels.

1. Quelques résultats sur les conducteurs. — *a.* Considérons la situation suivante : soient A un anneau d'intégrité intégralement clos, K son corps des fractions, Z une extension algébrique finie de K, et B l'anneau des éléments de Z qui sont entiers sur A. Supposons que, pour une base (z_i) de Z sur K, il existe un élément non nul d de A tel que $dB \subset \sum_i Az_i$; s'il en est ainsi pour une base de Z, la même propriété est vraie pour toute base de Z. Un tel élément d existe lorsque B est un A-module de type fini; la réciproque est exacte lorsque A est nœthérien. Si Z est *séparable* sur K, et si les z_i sont entiers sur A, on peut prendre pour d le « discriminant » $\det(\sigma_j(z_i))^2$, les σ_j désignant les K-automorphismes de Z dans la clôture algébrique de K. Lorsque Z n'est pas séparable sur K, l'existence d'un « conducteur » d est assurée dans les cas suivants :

1° A est un anneau de polynomes sur un corps K_0 (car alors B est engendré sur K_0 par un nombre fini d'éléments; *cf.* [66], remarque p. 364);
2° L'anneau $A^{p^{-1}}$ de $K^{p^{-1}}$ est un A-module de type fini, p désignant l'exposant caractéristique de K (*cf.* [77], § 101, ou [42], n° 35).

b. Soient alors L une extension quelconque de K, et Z_L l'algèbre obtenue par extension à L du corps de base K de Z. Supposons que A soit contenu dans un anneau intégralement clos A_1 dont L soit le corps des fractions; et considérons l'anneau B_1 des éléments de Z_L qui sont entiers sur A_1. Étudions d'abord le cas où Z est *séparable;* nous pouvons, sans inconvénient, supposer Z galoisien. Alors les K-automorphismes σ_j de Z se prolongent par linéarité en des L-automorphismes de σ_j de Z_L. Soit (z_i) une base de Z, et soit

$$b = \sum_i a_i z_i (a_i \in L)$$

un élément de B_1; on en déduit $\sigma_j(b) = \sum_i a_i \sigma_j(z_i)$; en supposant les z_i entiers sur A, et donc sur A_1, on en déduit que $\det(\sigma_j(z_i))a_k$ est entier sur A_1; donc, en posant $d = \det(\sigma_j(z_i))^2$, on voit que $da_k \in A_1$ pour tout k; on a, par conséquent, $dB_1 \subset \sum_i A_i z_i$ avec $d \in A$.

Ceci montre d'ailleurs que Z_L n'a pas d'éléments nilpotents; en effet un tel élément est entier sur A_1, mais n'a pas de « dénominateur » $d \in A$ lorsque $A \neq K$.

c. Étudions maintenant le cas où Z n'est *pas* séparable sur K. Nous supposerons alors que L est séparable sur K. On peut, sans inconvénient, supposer Z normale; il existe alors une sous-extension radicielle R de Z telle que Z soit galoisienne sur R ([8], chap. V, § 10, prop. 14). Alors ([7], § 2) Z_L est, en tant qu'anneau, isomorphe à L_Z, c'est-à-dire à $(L_R)_Z = (L_R) \otimes_R Z$, Comme L est séparable, et donc linéairement disjointe de R sur K, L_R est un corps, radiciel sur L. Soit alors C l'anneau des éléments de R qui sont entiers sur A; c'est l'ensemble des racines p^e/ièmes d'éléments de A contenues dans R, puisque A est intégralement clos; et C est lui-même intégralement clos. Considérons alors Z comme extension de R, prenons une base (z'_i) de Z sur R composée d'éléments entiers sur A, et désignons par C_1 l'anneau des éléments de L_R qui sont entiers sur A_L; il existe alors (V, 1, *b*) un élément non nul d' de R tel que $d'B_1 \subset \sum_i z'_i C_1$.

d. Nous supposerons alors que A est un noyau (III, 2) et que A_1 est le complété $\hat{A}$ de A. Dans ce cas, L est bien séparable sur K (III, 3). Nous pouvons, sans inconvénient, supposer que $R = K^{p^{-e}}$. Alors, comme

$$\hat{A} = K_0((x_1, \ldots, x_m))[[x_{m+1}, \ldots, x_n]],$$

C_1 n'est autre que l'anneau

$$K_0^{p^{-e}}((x_1^{p^{-e}}, \ldots, x_m^{p^{-e}}))[[x_{m+1}^{p^{-e}}, \ldots, x_n^{p^{-e}}]],$$

puisque ce dernier est un anneau intégralement clos, entier sur $\hat{A}$, et de corps des fractions $L^{p^{-e}} = L(K^{p^{-e}})$; au moyen d'une base de $K_0^{p^{-e}}$ sur K_0 (qui est finie d'après l'hypothèse faite sur les noyaux), et de monômes en les x_{m+k}, on construit une base (z''_j) de C_1 considéré comme $\hat{A}$-module. On a alors $C_1 = \sum_j z''_j \hat{A}$; comme il existe $d' \in R$ tel que $d'B_1 \subset \sum_i z'_i C_1$ (V, 1, *c*), on a $d'B_1 \subset \sum_{i,j} z'_i z''_j \hat{A}$, $(z'_i z''_j)$ étant une base de Z sur K. On peut, sans inconvénient, supposer que l'élément $d' \in R$ est entier sur A; en posant alors $d = d'^{p^e}$, on a *a fortiori* $dB_1 \subset \sum_{i,j} z'_i z''_j \hat{A}$, avec $d \in A$. D'où le résultat suivant :

PROPOSITION 1. — *Soient* A *un noyau*, K *son corps des fractions*, Z *une extension algébrique finie de* K, L *le corps des fractions du complété* $\hat{A}$ *de* A, *et* B_1 *l'anneau des éléments de l'algèbre* Z_L *qui sont entiers sur* $\hat{A}$. *Alors, pour toute base* (z_k) *de* Z *sur* K, *il existe un élément non nul d de* A *tel que* $dB_1 \subset \sum_k \hat{A} z_k$.

COROLLAIRE 1. — *Soient* B *un anneau à noyau sans diviseurs de zéro,* $\hat{B}$ *son complété et* B_1 *la clôture intégrale de* $\hat{B}$*; il existe alors un élément non nul* d *de* B *tel que* $dB_1 \subset \hat{B}$.

On prend, en effet, pour A un noyau de B, pour (z_k) une base du corps des fractions Z de B sur le corps des fractions K de A telle que $z_k \in B$. Alors Z_L est l'anneau des fractions de $\hat{B}$, et la proposition 1 montre que l'on peut prendre d dans A.

On retrouve, en particulier, le fait que $\hat{B}$ n'a pas d'éléments nilpotents (*cf.* V, 1, *b* et III, 3).

COROLLAIRE 2. — *La clôture intégrale d'un anneau local géométrique est un* B*-module de type fini.*

2. **Théorème d'irréductibilité et de normalité analytiques :**

THÉORÈME. 1. — *Soit* B *un anneau à noyau, sans diviseurs de zéro et intégralement clos. Alors son complété* $\hat{B}$ *est un anneau d'intégrité intégralement clos.*

Soit d un élément non nul de B tel que $dB_1 \subset \hat{B}$, B_1 désignant la clôture intégrale de $\hat{B}$ (V, 1, d, cor. 1 de la prop. 1). Comme B est intégralement clos, l'idéal principal Bd est intersection de puissances symboliques d'idéaux premiers minimaux, soient $\mathfrak{p}_i^{(s(i))}$ ([42], n° 37). Soient $\bar{\mathfrak{p}}_{ij}$ les idéaux premiers de $\hat{B}\mathfrak{p}_i$ dans $\hat{B}$. Comme $B/\mathfrak{p}_i$ est un anneau à noyau, on a $\hat{B}\mathfrak{p}_i = \bigcap_j \bar{\mathfrak{p}}_{ij}$, toutes ces composantes étant isolées (III, 2, a et III, 3, cor. 1). Considérons un des $\mathfrak{p}_i$, soit $\mathfrak{p}$, et un des $\bar{\mathfrak{p}}_{ij}$, soit $\bar{\mathfrak{p}}$. L'anneau de fractions $B_\mathfrak{p}$ est un anneau intégralement clos de dimension 1, donc un anneau de valuation discrète. Formons $\hat{B}_{\bar{\mathfrak{p}}}$; soit $a \in \mathfrak{p}$, $a \notin \mathfrak{p}^{(2)}$; il existe $c \in \hat{B}$, $c \notin \bar{\mathfrak{p}}$ tel que $c\bar{\mathfrak{p}} \subset \hat{B}a$ (prendre $c = xy$, où $x \in (Ba : \mathfrak{p})$, $x \notin \mathfrak{p}$, et où $y \notin \bar{\mathfrak{p}}$ est élément de l'intersection des idéaux premiers de $\hat{B}\mathfrak{p}$ distincts de $\bar{\mathfrak{p}}$). Si φ est l'application canonique de $\hat{B}$ dans $\hat{B}_{\bar{\mathfrak{p}}}$, l'idéal maximal $\bar{\mathfrak{p}}\hat{B}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ de $\hat{B}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ est donc engendré par $\varphi(a)$; ceci montre que $\hat{B}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ est l'anneau d'une valuation discrète v, et aussi que le noyau de φ est un idéal premier de (o) dans $\hat{B}$ $\left[\overset{-1}{\varphi}(o)\right.$ est d'ailleurs égal à $\bigcap_n \bar{\mathfrak{p}}^{(n)}$, et c'est le seul idéal premier de (o) contenu dans $\bar{\mathfrak{p}}$; *cf.* I, 4, $\left.d\right]$. On a, par conséquent, $\hat{B}\mathfrak{p}_i^{(n)} = \bigcap_j \bar{\mathfrak{p}}_{ij}^{(n)}$ en vertu du théorème de transition (III, 3) et de l'équidimensionnalité de l'anneau à noyau $\hat{B}/\hat{B}\mathfrak{p}_i^{(n)}$ (III, 2, a), et donc $\hat{B}d = \bigcap_{i,j} \bar{\mathfrak{p}}_{ij}^{(s(i))}$ d'après le théorème des intersections d'idéaux (I, 3, prop. 3). Notons w_{ij} l'application composée $v_{ij} \circ \varphi$, où v_{ij} est la valuation définie par $\hat{B}_{\bar{\mathfrak{p}}_{ij}}$. Pour tout $z \in B_1$, on a $w_{ij}(z) \geqq 0$, d'où $w_{ij}(dz) \geqq w_{ij}(d)$; comme $dz \in \hat{B}$, ceci implique $dz \in \bar{\mathfrak{p}}_{ij}^{(s(i))}$, puisque $w_{ij}(d) = s(i)$. On a donc $dz \in \hat{B}d$, et il existe $z' \in \hat{B}$ tel que $d(z - z') = 0$. Comme l'élément d de B n'est pas diviseur de zéro dans $\hat{B}$, ni dans B_1 (I, 3, cor. 1 de la prop. 1), on a $z = z'$, et $\hat{B}$ est intégralement clos. Or un anneau local A intégralement clos (dans son anneau des fractions S), et sans élément nilpotent, est un anneau d'intégrité (sinon S serait composé direct de plusieurs corps, et contiendrait un idempotent e distinct de o et 1; comme $e^2 - e = 0$, e est entier sur A, d'où $e \in A$, contrairement au fait que e et $1 - e$ ne sont pas inversibles). Donc $\hat{B}$ est un anneau d'intégrité intégralement clos.

Remarque. — On peut établir les propriétés des $\bar{\mathfrak{p}}_{ij}$ sans utiliser les résultats du chapitre III (*cf.* [95], I).

Corollaire. — *Soient* B *un anneau à noyau sans diviseurs de zéro*, $\hat{B}$ *son complété*, B′ *et* $(\hat{B})'$ *leurs clôtures intégrales. Alors* B′ *est un anneau semi-local, dont le complété est* $(\hat{B})'$.

En effet, B′ est extension finie de B (V, 1, d, cor. 2 de la prop. 1), et donc un anneau semi-local (I, 6, f). Il existe c non nul dans B tel que $cB' \subset B$ (V, 1, cor. 2); on en déduit $c(\hat{B'}) \subset \hat{B}$, donc $(\hat{B'})$ est un sous-anneau de $(\hat{B})'$. Enfin les anneaux locaux dont $(\hat{B'})$ est composé direct sont les complétés des anneaux $B'_{\mathfrak{m}_i}$, les $\mathfrak{m}_i$ désignant les idéaux maximaux de B′ (I, 5, *remarque* au cor. 2); ils sont intégralement clos d'après le théorème 1 ; par conséquent, $(\hat{B}')$ est intégralement clos et donc identique à $(\hat{B})'$.

Remarque. — Si A est un anneau local dont le complété $\hat{A}$ est intégralement clos, A est lui-même intégralement clos (en effet, si S désigne l'anneau des fractions de A, on a $\hat{A} \cap S = A$ puisque, pour tout $a \in A$, on a $\hat{A}a \cap A = Aa$).

3. Anneaux locaux factoriels. — Rappelons qu'un anneau A est dit *factoriel* s'il est anneau d'intégrité et si tout élément de A se met, et de façon unique, sous forme d'un produit d'éléments irréductibles (à un élément inversible près). Il revient au même de dire que A est un anneau d'intégrité et que tout idéal premier minimal de A est principal, ou encore que tout idéal engendré par un élément irréductible est premier.

LEMME (« Vorbereitungssatz »). — *Soient* A *un anneau local complet d'idéal maximal* $\mathfrak{m}$, B *l'anneau de séries formelles* $A[[X]]$, f *un élément de* B *n'appartenant pas à* $\mathfrak{m}B$; *si* $b_s X^s$ *est le terme de plus bas degré de* f *tel que* $b_s \notin \mathfrak{m}$, *on a, pour tout* $z \in B$, $z = uf + q$, *où* u *est inversible dans* B, *et où* $q = \sum_{i=0}^{s} a_i X^i$, *avec* $a_i \in A$.

La condition $f \notin \mathfrak{m}B$ veut dire que l'idéal $Bf + B\mathfrak{m}$ est primaire pour l'idéal maximal $\mathfrak{m}B + XB$ de B. L'anneau $A[[f]]$ a pour idéal maximal $(f, \mathfrak{m})$, et a même corps résiduel $A/\mathfrak{m}$ que A et B. Comme $B/(Bf + B\mathfrak{m})$ a pour base sur $A/\mathfrak{m}$ les classes de $1, X, \ldots, X^{s-1}$, $(1, X, \ldots, X^{s-1})$ est un système de générateurs de B sur $A[[f]]$ (I, 6, e). On a donc $B = fB + \sum_{0}^{s-1} AX^i$. On en déduit $b_s X^s = vf + \sum_{i=0}^{s-1} c_i X^i$ ($c_i \in A$) et, par réduction mod $\mathfrak{m}$, on voit que v est inversible dans B (son terme constant étant d'ailleurs dans $1 + \mathfrak{m}$). En posant $Q = \sum_{0}^{s} AX^i$, et en désignant par U l'ensemble des éléments inversibles de B, on a donc $0 \in Uf + Q$, d'où $Q \subset Uf + Q$. Comme $B = Bf + Q$, on a, pour tout $z \in B$, soit $z = uf + q$, avec $u \in U$ et $q \in Q$, soit $z = mf + q$, avec $m \in \mathfrak{m}$; dans ce dernier cas, on écrit $q = u'f + q'$, avec $u' \in U$ et $q' \in Q$; d'où $z = (m + u')f + q'$, où $m + u' \in U$.

THÉORÈME 2. — *Un anneau local régulier, complet et non ramifié* (IV, 3) *est un anneau factoriel.*

Nous procéderons par récurrence sur la dimension n de B; le théorème est évident pour $n = 1$, B étant alors l'anneau d'une valuation discrète. Soit f un élément irréductible de B; on va montrer que l'idéal Bf est premier. Si $(f) = (p)$ (p, caractéristique du corps résiduel), l'idéal (f) est premier. Sinon, il existe un système régulier de paramètres $(x, u_2, \ldots, u_n)$ de B tel que $u_2 = p$ dans le cas d'inégales caractéristiques, et que $(f, u_2, \ldots, u_n)$ soit un système de paramètres de B (II, 5, d). Soit C un anneau de Cohen (IV, 2) de B et soit $A = C[[u_2, \ldots, u_n]]$; c'est un anneau factoriel d'après l'hypothèse de récurrence; comme on a $B = A[[x]]$, on peut appliquer le lemme. En vertu de celui-ci, on a $B = Bf + A[x]$ et les anneaux B/Bf et $A[x]/(Bf \cap A[x])$ sont canoniquement isomorphes. Or le lemme montre qu'il existe un polynome unitaire et de degré s, $g \in A[x]$ tel que $Bf = Bg$ (y faire $z = 0$). Comme f est irréductible, il en est de même de g; étant donné que l'anneau de polynomes $A[x]$ est factoriel, $gA[x]$ est un idéal premier. Or l'idéal (g, x) de $A[x]$ est distinct de $A[x]$ puisque g n'est pas inversible; donc (I, 1, c), l'idéal $gA[x]$ est fermé pour la topologie $(xA[x])$-adique; par conséquent, $Bf \cap A[x] = gA[x]$ et Bf est premier, puisque B/Bf et $A[x]/gA[x]$ sont isomorphes.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — *Pour qu'un anneau local régulier non ramifié* B *soit factoriel, il faut et il suffit que tout idéal premier minimal de* B *soit analytiquement équidimensionnel.*

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal de B. Si B est factoriel, $\mathfrak{p}$ est principal et $\hat{B}\mathfrak{p}$ est équidimensionnel. Si, réciproquement, $\hat{B}\mathfrak{p}$ est équidimensionnel, c'est une intersection de puissances d'idéaux premiers principaux de $\hat{B}$, puisque $\hat{B}$ est factoriel; on a donc $\hat{B}\mathfrak{p} = \hat{B}a (a \in \hat{B})$. Si (c_i) est une base de $\mathfrak{p}$, on en déduit $a = \Sigma c_i b_i$ et $c_i = a d_i (b_i, d_i \in \hat{B})$; d'où $a(1 - \Sigma b_i d_i) = 0$; alors l'un au moins des $b_i d_i$ est inversible, par exemple $b_1 d_1$, et l'on a $\mathfrak{p} = Bc_1$; ceci montre que B est factoriel.

On en déduit que l'anneau local régulier non ramifié B est factoriel dans les deux cas suivants :

1° B est un anneau à noyau (III, 2, a);

2° B est de dimension 2 [en effet l'idéal maximal de $\hat{B}$ ne peut être un idéal premier de $\hat{B}\mathfrak{p}$ (I, 3, cor. 2 de la prop. 1)].

Remarque. — Il existe des anneaux locaux factoriels qui ne sont *pas* réguliers. Soit A l'anneau local d'un point P sur une variété V^d (algébrique ou algébroïde). Les idéaux premiers minimaux de A correspondent aux sous-variétés de dimension $d-1$ passant par P; dire que l'un d'eux est principal revient à dire que la sous-variété correspondante W^{d-1} est, localement en P, intersection complète de V et d'une hypersurface de l'espace. Or il existe des variétés projectives Q^r dont toutes les sous-variétés de dimension $r-1$ sont (globalement) des intersections complètes, et qui ne sont pas linéaires (un exemple, où la vérification se fait par un calcul élémentaire, est celui des hyperquadriques non singulières de l'espace projectif à quatre dimensions; d'autres exemples demandent une vérification algébro-géométrique plus délicate : surfaces génériques d'ordre > 4 de l'espace ordinaire [53], hypersurfaces non singulières d'un espace projectif de dimension ≥ 4 [67], grassmanniennes [68]). On prend alors pour V^{r+1} un cône projectant Q, et pour P son sommet (on vérifie en effet que, pour toute W^r de V, il existe un diviseur X^r formé de cônes de sommet P tel que $W - X$ soit intersection complète en P[62]; comme X est intersection complète, il en est de même de W).

Historique. — Le théorème du paragraphe 2 est dû à Zariski ([95] pour l'irréductibilité analytique des variétés normales; [98] pour le complément de normalité analytique) Nous avons ajouté le paragraphe 1 afin de lever les hypothèses de séparabilité faites dans [98]. Le théorème d'unique factorisation (th. 2), sous cette forme, est dû à Cohen ([20], th. 18); pour les anneaux de séries formelles sur un corps infini, il remonte à Krull. Quant au « Vorbereitungssatz », c'est essentiellement un résultat fort ancien (*cf.* [42], n° 9); la forme sous laquelle il est énoncé ici nous a été suggérée oralement par H. Cartan.

Divers problèmes restent ouverts sur les anneaux locaux factoriels : que peut-on dire du complété d'un anneau local factoriel ? Y a-t-il des anneaux locaux réguliers non complets qui ne sont pas factoriels (*cf.* cor. du th. 2)? Un anneau local régulier, complet et ramifié est-il factoriel (il suffit de regarder le cas où ce n'est pas un anneau de séries formelles sur un anneau complet de valuation discrète; *cf.* [20], cor. du th. 18)?

CHAPITRE VI.

Questions diverses.

1. **Produits tensoriels d'anneaux $\mathfrak{m}$-adiques.** — *a.* Soient A et A' des anneaux $\mathfrak{m}$-adique et $\mathfrak{m}'$-adique. Nous supposerons pour simplifier qu'ils contiennent un même corps K. Sur leur produit tensoriel $A\otimes A'$ (sur K), il est naturel de considérer la topologie définie par les puissances de l'idéal $\mathfrak{m}\otimes A'+A\otimes\mathfrak{m}'$. Cependant, ce procédé direct a les inconvénients suivants :

1° Il n'est pas évident que l'on ait $\bigcap_{n=0}^{\infty}(\mathfrak{m}\otimes A'+A\otimes\mathfrak{m}')^n=(0)$ (nous le démontrerons cependant plus loin);

2° Lorsque A et A' sont des anneaux de Zariski (I, 1, *c*), $A\otimes A'$ ne l'est pas forcément. Par exemple, dans $K[[X]]\otimes K[[Y]]$, l'élément $1-XY$ n'a pas d'inverse $\Big($si $1/(1-XY)$ était de la forme $\sum_{i=j}^{n}s_i(X)\,t_i(Y)$, s_i et t_i étant des séries formelles, on peut montrer qu'il serait aussi de la forme $\sum_{i=1}^{n}f_i(X)\,g_i(Y)$, f_i et g_i étant des fractions rationnelles; et l'on voit, en mettant $\sum_{i=1}^{n} f_i(X) g_i(Y)$ sous forme réduite, que c'est impossible);

3° Le même exemple montre que, même si A et A' sont complets, $A \otimes A'$ peut n'être pas complet;

4° Il y a enfin la question de savoir si $A \otimes A'$ est nœthérien, question que nous n'aborderons pas.

b. La situation étant celle décrite en *a*, nous considérerons l'algèbre C_n, produit tensoriel au sens ordinaire ([7], § 3) de $A/\mathfrak{m}^n$ et $A'/\mathfrak{m}'^n$. Pour tout n, il existe un homomorphisme canonique φ_n de C_n sur C_{n-1} (qui est le produit tensoriel des homomorphismes canoniques de $A/\mathfrak{m}^n$ sur $A/\mathfrak{m}^{n-1}$ et de $A'/\mathfrak{m}'^n$ sur $A'/\mathfrak{m}'^{n-1}$). Nous noterons B la *limite projective* des C_n pour les homomorphismes φ_n, c'est-à-dire l'ensemble des suites (c_n) $(c_n \in C_n)$ telles que $c_{n-1} = \varphi_n(c_n)$. Comme la famille d'indices est une suite dénombrable, il existe des homomorphismes canoniques p_n de B *sur* les C_n, compatibles avec les φ_n. Nous appellerons B le *produit tensoriel complété* de A et A', et nous le noterons $A \overline{\otimes} A'$. Cet anneau a les propriétés suivantes :

1° Il contient des sous-algèbres canoniquement isomorphes à A et A', que nous identifierons à celles-ci [si $a \in A$, on considère sa classe $c_n(a)$ modulo $\mathfrak{m}^n$; alors $c_n(a) \in C_n$ et la suite $(c_n(a))$ est élément de B]. Dans B, les sous-algèbres A et A' sont *linéairement disjointes* ([7], § 3). [Soit (a_i) une famille finie d'éléments de A linéairement indépendants sur K, et soit V l'espace vectoriel engendré par les a_i; comme $\bigcap_n \mathfrak{m}^n = (0)$, les sous-espaces $\mathfrak{m}^n \cap V$ sont réduits à (o) à partir d'un certain indice n_0; alors les classes $p_n(a_i)$ des a_i mod $\mathfrak{m}^n$ sont linéairement indépendantes pour $n \geqq n_0$; donc, de $\sum_i a_i a'_i = 0$ $(a'_i \in A')$, on déduit, pour $n \geqq n_0$, $\sum_i p_n(a_i) p_n(a'_i) = 0$ et $p_n(a'_i) = 0$ puisque C_n est un produit tensoriel; d'où $a'_i \in \mathfrak{m}'^n$ pour tout $n \geqq n_0$ et $a'_i = 0$]. Ceci montre que $A \hat{\otimes} A'$ contient le produit tensoriel ordinaire $A \otimes A'$;

2° Considérons les idéaux $(B\mathfrak{m} + B\mathfrak{m}')^n$ de B. Comme $(B\mathfrak{m} + B\mathfrak{m}')^{2n}$ est contenu dans $B\mathfrak{m}^n + B\mathfrak{m}'^n$ qui est le noyau de p_n, on a $\bigcap_n (B\mathfrak{m} + B\mathfrak{m}')^n = (0)$. La topologie définie par les puissances de $B\mathfrak{m} + B\mathfrak{m}'$ est donc *séparée*. Comme elle est aussi définie par les idéaux $B\mathfrak{m}^n + B\mathfrak{m}'^n$, et que B est la limite projective des C_n, B est un anneau *complet*. Comme $A \otimes A'$ est dense dans B (appliquer p_n), B est le complété de $A \otimes A'$ pour la topologie (séparée; *cf.* VI, 1, *a*, 1) définie par les idéaux $(\mathfrak{m} \otimes A' + A \otimes \mathfrak{m}')^n$; ceci *caractérise* l'anneau B. En particulier, B ne dépend *pas* du choix des idéaux $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$ dont les puissances définissent la topologie de A.

c. L'idéal $B\mathfrak{m} + B\mathfrak{m}'$ a une base finie. Donc, si $B/(B\mathfrak{m} + B\mathfrak{m}')$ (qui est isomorphe à $(A/\mathfrak{m}) \otimes (A'/\mathfrak{m}')$) est nœthérien, l'anneau B est *nœthérien* puisqu'il est complet (II, 1, *g*, cor. de la prop. 1). Comme $A/\mathfrak{m}$ et $A'/\mathfrak{m}'$ sont nœthériens, ceci a lieu lorsque l'un d'eux est engendré sur K par un nombre fini d'éléments [car alors $(A/\mathfrak{m}) \otimes (A'/\mathfrak{m}')$ est un quotient d'un anneau de polynomes sur l'autre]. En particulier, lorsque $A/\mathfrak{m}$ et $A'/\mathfrak{m}'$ sont des algèbres de dimension finie sur K, ou lorsque $A/\mathfrak{m}$ est une algèbre de dimension finie sur K et $A'/\mathfrak{m}'$ un surcorps quelconque de K, B est un anneau *semi-local* (I, 1, *f*).

d. Proposition 1. — *Soient* A *et* A' *deux anneaux locaux*, $\mathfrak{v}$ *et* $\mathfrak{v}'$ *des idéaux primaires pour les idéaux maximaux* $\mathfrak{m}$ *et* $\mathfrak{m}'$ *de* A *et* A', *et* B *le produit tensoriel complété de* A *et* A' *sur un corps* K *sur lequel* $A/\mathfrak{m}$ *et* $A'/\mathfrak{m}'$ *sont finis. Si* $(A/\mathfrak{m}) \otimes (A'/\mathfrak{m}')$ *est un corps*, B *est un anneau local*, $B\mathfrak{v} + B\mathfrak{v}'$ *est un idéal primaire pour l'idéal maximal* $B\mathfrak{m} + B\mathfrak{m}'$ *de* B, *et l'on a* $\dim B = \dim A + \dim A'$ *et* $e(B\mathfrak{v} + B\mathfrak{v}') = e(\mathfrak{v})\, e(\mathfrak{v}')$.

Soient $f(i)$ et $g(j)$ les longueurs des modules $\mathfrak{v}^i/\mathfrak{v}^{i+1}$ et $\mathfrak{v}'^j/\mathfrak{v}'^{j+1}$; si d et d' sont les dimensions de A et A', $f(i)$ et $g(j)$ sont, pour i et j assez grands, des polynomes de termes dominants $e(\mathfrak{v})\, i^{d-1}/(d-1)!$ et $e(\mathfrak{v}')\, j^{d'-1}/(d'-1)!$ (II, 5). Les dimensions sur K de ces modules sont, en notant r et r' les dimensions sur K de $A/\mathfrak{m}$ et $A'/\mathfrak{m}'$, $rf(i)$ et $r'g(j)$. Comme

$$(B\mathfrak{v} + B\mathfrak{v}')^n = B\mathfrak{v}^n + B\mathfrak{v}^{n-1}\mathfrak{v}' + \ldots + B\mathfrak{v}\mathfrak{v}'^{n-1} + B\mathfrak{v}'^n,$$

la dimension sur K de $B/(B\mathfrak{v} + B\mathfrak{v}')^n$ est égale à $\sum_{i+j<n} rr' f(i) g(j)$: on le voit en se plaçant dans $B/(B\mathfrak{v}^n + B\mathfrak{v}'^n)$ qui est produit tensoriel de $A/\mathfrak{v}^n$ et $A'/\mathfrak{v}'^n$. Comme la dimension sur K du corps résiduel $B/(B\mathfrak{m} + B\mathfrak{m}')$ est rr', la longueur de $B/(B\mathfrak{v} + B\mathfrak{v}')^n$ est $\sum_{i+j<n} f(i) g(j)$. Or le terme dominant de cette somme est le même que celui de la somme $e(\mathfrak{v})\,e(\mathfrak{v}') \sum_{i+j<n} \binom{i+d-1}{d-1}\binom{j+d'-1}{d'-1}$; ce dernier se calcule aussitôt en considérant, à la place de A, A′, $\mathfrak{v}$ et $\mathfrak{v}'$, les anneaux de séries formelles à d et d' variables sur K et leurs idéaux maximaux : ce terme dominant est celui de $e(\mathfrak{v})\,e(\mathfrak{v}')\binom{d+d'+n}{d+d'}$ et il vaut $e(\mathfrak{v})\,e(\mathfrak{v}')\,n^{d+d'}/(d+d')\,!$; ceci démontre nos assertions.

Remarque. — Lorsque B n'est *pas* un anneau local [ce qui a lieu quand $(A/\mathfrak{m}) \otimes (A'/\mathfrak{m}')$ a plusieurs idéaux premiers], des exemples simples ($E[[X]] \otimes F$, E et F étant des extensions algébriques isomorphes de K) montrent que l'on peut avoir $e(B\mathfrak{v} + B\mathfrak{v}') \neq e(\mathfrak{v})\,e(\mathfrak{v}')$. Cependant, comme

$$\sum_{i+j<n} f(i)\,g(j) \leqq L(B/(B\mathfrak{v} + B\mathfrak{v}')^n) \leqq \dim_K(B/(B\mathfrak{v} + B\mathfrak{v}')^n),$$

le calcul précédent montre que, si A et A′ sont des anneaux semi-locaux et K un corps sur lequel $A/\mathfrak{v}$ et $A'/\mathfrak{v}'$ sont finis, la relation $\dim B = \dim A + \dim A'$ reste vraie, et que l'on a $e(B\mathfrak{v} + B\mathfrak{v}') \geqq e(\mathfrak{v})\,e(\mathfrak{v}')$.

e. Proposition 2. — *Soient* A *et* A′ *deux anneaux* $\mathfrak{m}$-*adique et* $\mathfrak{m}'$-*adique et* $B = A \overline{\otimes} A'$. *Si* $\mathfrak{v}$ *et* $\mathfrak{v}'$ *sont deux idéaux fermés quelconques de* A *et* A′, *on a* $(B\mathfrak{v} + B\mathfrak{v}') \cap A = \mathfrak{v}$, $(B\mathfrak{v} + B\mathfrak{v}') \cap A' = \mathfrak{v}'$, *et* $B/(B\mathfrak{v} + B\mathfrak{v}')$ *est isomorphe à* $(A/\mathfrak{v}) \overline{\otimes} (A'/\mathfrak{v}')$.

Soit B_1 le produit tensoriel ordinaire $A \otimes A'$, considéré comme sous-anneau partout dense de B. D'après [7] (§ 3, prop. 1), il existe un isomorphisme canonique u de $B_1/(B_1\mathfrak{v} + B_1\mathfrak{v}')$ sur $(A/\mathfrak{v}) \otimes (A'/\mathfrak{v}')$. Comme $(A/\mathfrak{v}) \otimes (A'/\mathfrak{v}')$ est séparé (VI, 1, *b*, 2), $B_1\mathfrak{v} + B_1\mathfrak{v}'$ est un idéal fermé de B_1. On a donc $(B\mathfrak{v}+B\mathfrak{v}')\cap B_1 = B_1\mathfrak{v}+B_1\mathfrak{v}'$, puisque $B\mathfrak{v}+B\mathfrak{v}'$ est l'adhérence de $B_1\mathfrak{v}+B_1\mathfrak{v}'$ dans B. Par conséquent, $B/(B\mathfrak{v}+B\mathfrak{v}')$ est le complété de $B_1/(B_1\mathfrak{v}+B_1\mathfrak{v}')$; et l'isomorphisme u, qui est continu, se prolonge en un isomorphisme $\bar{u}$ de $B/(B\mathfrak{v}+B\mathfrak{v}')$ sur $(A/\mathfrak{v})\overline{\otimes}(A'/\mathfrak{v}')$. La considération de $\bar{u}$ démontre alors aussitôt les deux premières assertions.

Sur les produits tensoriels d'anneaux locaux, *voir* [16] (I, 3) (où la notion introduite équivaut à celle du texte), [18] (App.) et [63] (ch. II, § 5). La notion a été introduite en vue de l'étude locale des produits de variétés algébriques et algébroïdes.

2. **Sous-espaces topologiques.** — Soient A un anneau $\mathfrak{m}$-adique semi-local, B un anneau $(\mathfrak{m}B)$-adique contenant A. Comme $\mathfrak{m}^n \subset \mathfrak{m}^n B \cap A$, la topologie $\mathfrak{m}$-adique de A est plus fine que la topologie induite sur A par celle de B. Désignons par φ l'isomorphisme canonique de A dans B; comme φ est continu, il se prolonge en un homomorphisme $\bar{\varphi}$ du complété $\hat{A}$ dans le complété $\hat{B}$.

Proposition. — *Pour que* A *soit un sous-espace de* B, *il faut et il suffit que l'homomorphisme* $\bar{\varphi}$ *soit un isomorphisme de* $\hat{A}$ *dans* $\hat{B}$.

Si $\bar{\varphi}$ est un isomorphisme, $\hat{A}$ s'identifie à un sous-anneau de $\hat{B}$ et, comme $\bigcap_n (\mathfrak{m}^n\hat{B}\cap\hat{A}) = (0)$, $\hat{A}$ est un sous-espace de $\hat{B}$ en vertu de (I, 3, cor. 1 de la prop. 2). Si, réciproquement, A est un sous-espace de B, $\hat{A}$ s'identifie à un sous-espace de $\hat{B}$.

Un cas intéressant d'application de la proposition est le suivant [96] : A est un anneau local analytiquement irréductible et l'on sait, par ailleurs, que la dimension de $\bar{\varphi}(\hat{A})$ est égale à celle de A et $\hat{A}$ (II, 4, prop. 2). Dans [96], B est l'anneau d'une valuation discrète v du corps des fractions de A, et le corps des valeurs de v est une extension de $A/\mathfrak{m}$ dont le degré de transcendance est égal à $\dim A - 1$; alors la vérification du fait que $\dim(\bar{\varphi}(\hat{A})) = \dim A$ se fait en utilisant les théorèmes de structure des anneaux locaux complets (IV; 1, th. 1 et 2, th. 2).

Remarques. — 1° Le résultat précédent a d'importantes applications géométriques [96], [18];

2° Une méthode analogue de passage au complété permet de démontrer le résultat suivant : si A est un anneau local analytiquement irréductible d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, et si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A, la puissance symbolique $\mathfrak{p}^{(n)}$ est contenue dans $\mathfrak{m}^{s(n)}$, où $s(n)$ tend vers l'infini avec n [93] [on considère un idéal premier isolé $\bar{\mathfrak{p}}$ de $\hat{A}\mathfrak{p}$; on remarque que $\hat{A}\mathfrak{p}^{(n)} \subset \bar{\mathfrak{p}}^{(n)}$, puisque $\bar{\mathfrak{p}} \cap A = \mathfrak{p}$ (I, 3, cor. 2 de la prop. 1), et que $\bigcap_n \bar{\mathfrak{p}}^{(n)} = (0)$, puisque $\hat{A}$ est un anneau d'intégrité (théorème de Krull, I, prop. 1); on conclut encore au moyen de I, 3, prop. 2].

3. **Le passage du local au global.** — Dans de nombreux cas, en particulier en Géométrie algébrique, on étudie un anneau A de fonctions d'un certain type, définies sur un ensemble V, et tel que tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A soit l'idéal des fonctions s'annulant en un certain point P de V. Les propriétés « locales » de V au voisinage de P sont, par définition, décrites par l'anneau de fractions $A_{\mathfrak{m}}$ (I, 4). Si $\mathfrak{b}$ est un idéal de A, l'idéal $\mathfrak{b}A_{\mathfrak{m}}$ est appelé l'*idéal local* de $\mathfrak{b}$ en P. Les mêmes définitions s'appliquent aux « sous-variétés » de V, si l'on suppose celles-ci en correspondance biunivoque avec les idéaux premiers de A.

Proposition. — *Si une fonction* $a \in A$ *est telle que son image canonique* $p_{\mathfrak{m}}(a)$ *dans* $A_{\mathfrak{m}}$ (I, 4, *b*) *appartienne à l'idéal local* $\mathfrak{b}A_{\mathfrak{m}}$ *en tout point de* V, *alors* $a \in \mathfrak{b}$.

La classe $p_{\mathfrak{m}}(a)$ est la classe de a modulo l'idéal $\mathfrak{n}(\mathfrak{m})$ des éléments x de A tels que $xs = 0$ pour certain $s \notin \mathfrak{m}$. L'hypothèse veut dire qu'il existe $s'_{\mathfrak{m}} \notin \mathfrak{m}$ et $b'_{\mathfrak{m}}$ dans $\mathfrak{b}$ tels que $s'_{\mathfrak{m}}a - b'_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{n}(\mathfrak{m})$; ce qui, par multiplication par un élément convenable du complément de $\mathfrak{m}$, s'écrit aussi $s_{\mathfrak{m}}a - b_{\mathfrak{m}} = 0$ ($s_{\mathfrak{m}} \notin \mathfrak{m}$, $b_{\mathfrak{m}} \in \mathfrak{b}$). Comme l'idéal de A engendré par les $s_{\mathfrak{m}}$ n'est contenu dans aucun idéal maximal, il existe des $t_{\mathfrak{m}}$ dans A, nuls sauf un nombre fini, et tels que $\Sigma s_{\mathfrak{m}} t_{\mathfrak{m}} = 1$ (« partition de l'unité »). Alors $a = \Sigma t_{\mathfrak{m}} b_{\mathfrak{m}} \in \mathfrak{b}$.

On déduit, par exemple, de la proposition que, si tous les $A_{\mathfrak{m}}$ sont *intégralement clos*, il en est de même de A : si y/x (x non diviseur de zéro) est entier sur A, $p_{\mathfrak{m}}(x)$ n'est pas diviseur de zéro dans $A_{\mathfrak{m}}$ [sinon x le serait dans A, d'après la définition de $\mathfrak{n}(\mathfrak{m})$]; alors $p_{\mathfrak{m}}(y)/p_{\mathfrak{m}}(x)$ est entier sur $A_{\mathfrak{m}}$ et $p_{\mathfrak{m}}(y)\in xA_{\mathfrak{m}}$ pour tout $\mathfrak{m}$; d'où $y\in Ax$.

Remarques. — 1° En Géométrie algébrique, ceci veut dire qu'une variété normale en tout point (et en particulier non singulière) est localement normale (c'est-à-dire a son anneau de coordonnées affines intégralement clos). La conclusion que A est intégralement clos ne subsiste pas si l'on suppose seulement $A_{\mathfrak{p}}$ intégralement clos pour tout idéal premier minimal $\mathfrak{p}$ de A [il existe des variétés non localement normales de dimension r sans singularités en dimension $r-1$, par exemple le cône de point générique (u^4, u^3v, uv^3, v^4)].

2° Contrairement à la propriété d'être intégralement clos, celle d'être un anneau factoriel ne subsiste pas « par passage du local au global »; il suffit de considérer un anneau non principal d'entiers algébriques. Il en est de même de la propriété d'être un anneau nœthérien : on prend un corps algébriquement clos K de caractéristique $\neq 2$, et l'anneau

$$A = K[x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, 1/x_1, \ldots, 1/x_n, \ldots], \qquad \text{où} \quad x_n^2 = x_{n-1};$$

tout idéal premier non nul $\mathfrak{p}$ de A est de la forme $(x_1-a_1, \ldots, x_n-a_n, \ldots)$, où $a_i\in K$, $a_i\neq 0$ et où $a_n^2=a_{n-1}$; un tel idéal n'a pas de base finie (considérer $\mathfrak{p}\cap K[x_n, 1/x_n]$); mais $A_{\mathfrak{p}}$ est l'anneau d'une valuation discrète, car $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ est engendré par x_1-a_1 (en effet $x_n-a_n=(x_{n-1}-a_{n-1})/(x_n+a_n)$, et l'on a $x_n+a_n\notin\mathfrak{p}$, sinon $2a_n\in\mathfrak{p}$, contrairement au fait que $a_n\neq 0$ et que K n'est pas de caractéristique 2).

BIBLIOGRAPHIE.

1. Abellanas. — On the geometrical theory of algebraic surfaces for a perfect coefficient field of characteristic p (*Rev. Acad. Ci. Madrid*, t. 36, 1942, p. 482-499).

2. Ancochea. — Courbes algébriques sur corps fermés de caractéristique quelconque (*Acta Salmanticensia*, t. 1, 1946).
3. Apery. — Sur les branches superlinéaires des courbes algébriques (*C. R. Acad. Sc.*, t. 222, 1946, p. 1198-1200).
4. Barsotti. — Algebraic correspondences between algebraic varieties (*Ann. of Math.*, t. 52, 1950, p. 427-464).
5. Bourbaki. — *Algèbre*, Chap. I (Paris, Hermann, 1942, n° 934).
6. Bourbaki. — *Algèbre*, Chap. II (Paris, Hermann, 1947, n° 1032).
7. Bourbaki. — *Algèbre*, Chap. III (Paris, Hermann, 1948, n° 1044).
8. Bourbaki. — *Algèbre*, Chap. IV et V (Paris, Herman, 1950, n° 1102).
9. Bourbaki. — *Topologie générale*, Chap. I et II (Paris, Herman, 1940, n° 858).
10. Bourbaki. — *Topologie générale*, Chap. III et IV (Paris, Hermann, 1942, n° 916).
11. Bourbaki. — *Topologie générale*, Chap. IX (Paris, Hermann, 1948, n° 1045).
12. H. Cartan. — Sur l'homologie des espaces où opère un groupe (*C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 148-150).
13. Chevalley. — On the theory of local rings (*Ann. of Math.*, t. 44, 1943, p. 690-708).
14. Chevalley. — On the notion of the ring of quotients of a prime ideal (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 50, 1944, p. 93-97).
15. Chevalley. — Some properties of ideals in rings of power series (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 55, 1944, p. 68-84).
16. Chevalley. — Intersections of algebraic and algebroid varieties (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 57, 1945, p. 1-85).
17. Chow. — On compact complex analytic varieties (*Amer. J. Math.*, t. 81, 1949, p. 893-914).
18. Chow. — Algebraic systems of positive cycles in an algebraic variety (*Amer. J. Math.*, t. 82, 1950, p. 247-283).
19. Chow et Van der Waerden. — Zur algebraischen Geometrie IX (*Math. Ann.*, t. 113, 1937, p. 692-704).
20. Cohen. — On the structure and ideal theory of complete local rings (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 59, 1946, p. 54-106).
21. Cohen. — Commutative rings with restricted minimum condition (*Duke Math. J.* t. 17, 1950, p. 27-42).
22. Cohen et Seidenberg. — Prime ideals and integral dependence (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 52, 1946, p. 252-261).
23. Dubreil. — Recherches sur la valeur des exposants des composantes primaires des idéaux de polynomes (*J. Math. pures et appl.*, t. 9, 1930, p. 231-309).
24. Dubreil. — Quelques propriétés des variétés algébriques (*Exposés Herbrand*, Paris, Hermann, 1935).
25. Dubreil. — La fonction caractéristique de Hilbert (*Colloque d'Algèbre et Théorie des Nombres*, Paris, C. N. R. S., 1950, p. 109-114).
26. Grell. — Beziehungen zwischen den Idealen verschiedener Ringe (*Math. Ann.*, t. 97, 1927, p. 490-523).

27. GROBNER. — Idealtheoretischer Aufbau deralgebraischen Geometrie (*Hamb. Math. Einzelschriften*, t. 30, 1941).
28. GROBNER. — *Algebraische Geometrie*, 1949.
29. GODDARD. — Bases for the prime ideals associated with certain classes of algebraic vaiieties (*Proc. Cambridge Phil. Soc.*, t. 39, 1943, p. 35-48).
30. GODDARD. — Prime ideals and postulation formulae (*Proc. Cambridge. Phil. Soc.*, t. 44, 1948, p. 43-49).
31. GRUNDY. — On integrally dependent integral domains (*Phil. Trans. Roy. Soc. London*, série A, t. 240, 1947, p. 295-326).
32. GRUNDY. — A generalization of additive ideal theory (*Proc. Cambridge Phil. Soc.*, t. 38, 1942, p. 241-279)..
33. HASSE et SCHMIDT. — Die Struktur diskret bewerteter Körper (*J. Reine, Angew. Math.*, t. 170, 1934, p. 4-63).
34. HILBERT. — Uber die Theorie der algebraischen Formen (*Math. Ann.* t. 36, 1898, p. 473-534).
35. HOPKINS. — Rings with minimum condition for left ideals (*Ann. of Math.*, t. 40, 1939, p. 712-730).
36. IGUSA. — On the algebraic geometry of Weil and Chevalley (*J. Math. Soc. Japan*, t. 1, 1949, p. 198-201).
37. IWASAWA. — Der Bezoutsche Satz in zweifach projektiven Räumen (*Proc. Japan Acad.*, t. 21, 1949, p. 213-222).
38. IWASAWA. — Zur theorie der algebraischen Korrespondenzen (*Proc. Japan Acad.*, t. 21, 1949, p. 204-212).
39. IWASAWA. — Zur theorie der algebraischen Korrespondenzen (*Proc. Japan Acad.*, t. 21, 1949, p. 411-418).
40. JACOBSON. — Theory of rings (*Math. Surveys*, New-York, 1943).
41. JACOBSON. — Radical and semi simplicity for arbitrary rings (*Amer. J. Math.*, t. 67, 1945, p. 300-320).
42. KRULL. — *Idealtheorie* (Ergebnisse, IV, 3, Berlin, 1935).
43. KRULL. — Zum Dimensions begriff der Idealtheorie (*Math. Z.*, t. 42, 1937, p. 745-766).
44. KRULL. — Pozreihenringe (*Math. Z.*, t. 43, 1938, p. 768-782).
45. KRULL. — Dimensionsthoerie in Stellenringen (*J. Reine Angew. Math.*, t. 179, 1938, p. 204-226).
46. KRULL. — Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, I, 1, 5 (Leipzig, Teubner, 1939).
47. KRULL. — Funktionaldeterminanten und Diskriminanten bei Polynomen in mehreren Unbestimmten (*Monatsh. Math. Phys.*, t. 48, 1939, p. 353-368 et t. 50, 1942, p. 234-256).
48. KRULL. — Parameterspezialisierung in Polynomringen (*Arch. Math.*, t. 1, 1948, p. 56-64 et 129-137).
49. MACAULAY. — The algebraic theory of modular systems (*Cambridge Tracts*, 19, Cambridge, 1916).
50. MAC LANE. — Subfields and automorphism groups of p-adic fields (*Ann. of Math.*, t. 40, 1939, p. 423-442).

51. MUHLY. — Independent integral bases and a characterization of normal surfaces (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 54, 1943, p. 340-360).

52. NAGATA. — On the structure of complete local rings (*Nagoya Math. J.*, t. 1, 1950, p. 63-70).

53. M. NOETHER. — Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven (*Abh. Brelin. Akad.*, 1882).

54. OKUGAWA. — Remarks on O. Zariski's paper (*Mem. Coll. Sci. Kyoto Imp. Univ.*, série A, t. 23, 1941, p. 437-444).

55. PERRON. — Studien über die Vielfachheitbegriff und den Bezoutschen Satz (*Math. Z.*, t. 49, 1944, p. 654-680).

56. SAMUEL. — On universal mappings and free topological groups (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 54, 1948, p. 591-598).

57. SAMUEL. — Une généralisation des polynomes de Hilbert (*C. R. Acad. Sc.*, t. 225, 1947, p. 1111-1113).

58. SAMUEL. — Sur les anneaux locaux (*C. R. Acad. Sc.*, t. 225, 1947, p. 1244-1245).

59. SAMUEL. — Multiplicités des composantes excédentaires d'intersection (*C. R. Acad. Sc.*, t. 228, 1949, p. 158-159).

60. SAMUEL. — Multiplicités des composantes singulières d'intersection (*C. R. Acad. Sc.*, t. 228, 1949, p. 292-294).

61. SAMUEL. — Multiplicités d'intersection en Géométrie algébrique (*Colloque d'Algèbre et Théorie des Nombres*, Paris, C. N. R. S., 1950, p. 123-124).

62. SAMUEL. — Multiplicités des composantes singulières d'intersection (*Colloque de Géométrie algébrique*, Liége, Thone, 1950, p. 87-90).

63. SAMUEL. — Sur la notion de multiplicité en Algèbre et en Géométrie algébrique (*J. Math. pures et appl.*, t. 30, 1951, p. 159).

64. SAMUEL. — Sur les variétés algébroïdes (*Ann. Inst. Fourier*, t. 2, 1950, p. 147-160).

65. SCHILLING. — Valuation theory (*Math. Surveys*, New-York, 1950).

66. SEIDENBERG. — The hyperplane sections of normal varieties (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 63, 1950, p. 357-386).

67. SEVERI. — Una proprieta delle forme algebriche prive di punti multipli (*Rend. Lincei*, vol. V, t. 15, 1906, p. 691-696).

68. SEVERI. — Sulla varieta che representa gli spazi subordinati... (*Ann. di Mat.*, vol. III, t. 24, 1915, p. 89-120).

69. SEVERI. — Uber die Grundlagen der algebraischen Geometrie (*Abh. Hamburg Univ.*, t. 9, 1933, p. 335-364).

70. SNAPPER. — Polynomial matrices ... (*Amer. J. Math.*, t. 69, 1947, p. 299-326 et 622-652).

71. SPERNER. — Ueber einem kombinatorischen Satz von Macaulay (*Abh. Hamburg Univ.*, t. 7, 1930, p. 149-163).

72. TERPSTRA. — Over zekere ongemengde Idealen (*Thèse*, Amsterdam, 1946).

73. TEICHMULLER. — Diskret bewertete perfekte Körper mit unvollkommenen Restklassenkörper (*J. Reine Angew. Math.*, t. 176, 1937, p. 141-152).

74. TODD. — On algebraic curve branches (*J. London Math. Soc.*, t. 21, 1946, p. 223-240).

75. UZKOV. — An algebraic lemma and the normalization theorem of E. Noether (*Mat. Sbornik*, N. S., t. 22 (64), 1948 (en russe), p. 349-350; *Math. Rev.*, t. 10, 1949, p. 562).

76. UZKOV. — On rings of quotients of commutative rings (*Mat. Sbornik*, N. S., t. 22 (64), 1948 (en russe), p. 439-441; *Math. Rev.*, t. 10, 1949, p. 97).

77. VAN DER WAERDEN — *Moderne Algebra*, 2e édition

78 VAN DER WAERDEN — Der Multiplizitätsbegriff der algebraischen Geometrie (*Math Ann* , t 97, 1927, p 756-774)

79 VAN DER WAERDEN — On Hilberts function ... (*Proc. Kon. Acad. Amsterdam*, t 31, 1928, p 749-770)

80 VAN DER WAERDEN — Eine Verallgemeinerung des Bézoutschen Theorems (*Math Ann.*, t. 99, 1928, p. 497-541).

81. VAN DER WAERDEN. — *Einführung in die algebraische Geometrie* (New-York, Dover, 1945).

82. VAN DER WAERDEN. — Die Bedeutung des Bewertungsbegriff für die algebraische Geometrie (*J. ber. Deutsch. Math. Verein.*, t. 52, 1942, p. 161-172).

83. VAN DER WAERDEN. — Uebei einfache Punkte von algebraischen Mannigfaltigkeiten (*Math. Z.*, t. 51, 1948, p. 497-501).

84. WEIL. — Foundations of algebraic geometry (*Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, New-York, 1946).

85. ZARISKI. — Some results in the arithmetic theory of algebraic varieties (*Amer. J. Math.*, t. 61, 1939, p. 249-294).

86. ZARISKI. — The reduction of singularities of an algebraic surface (*Ann. of Math.*, t. 40, 1939, p. 639-689).

87. ZARISKI. — Algebraic varieties over ground fields of characteristic zero (*Amer. J. Math.*, t. 62, 1940, p. 187-221).

88. ZARISKI. — Local uniformization of algebraic varieties (*Ann. of Math* t. 41, 1940, p. 852-896).

89. ZARISKI. — Normal varieties and birational correspondences (*Bull. Amer Math. Soc.*, t. 48, 1942, p. 402-413).

90. ZARISKI. — A simplified proof for the resolution of singularities of an algebraic surface (*Ann. of Math.*, t. 43, 1942, p. 583-593).

91. ZARISKI. — Foundations of a general theory of birational correspondences (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 53, 1943, p. 490-542).

92. ZARISKI. — Reduction of singularities of algebraic three dimensional varieties (*Ann. of Math.*, t. 45, 1944, p. 472-542).

93. ZARISKI. — Generalized semi-local rings (*Summa Bras. Math.*, t. 1, 1946, p. 169-195).

94. ZARISKI. — The concept of a simple point of an abstract algebraic variety (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 62, 1947, p. 1-52).

95. ZARISKI. — Analytical irreducibility of normal varieties (*Ann. of Math.* t. 49, 1948, p. 352-361).

96. ZARISKI. — A simple analytical proof of a fundamental property of birational transformations (*Proc. Nat. Acad. Sc.*, t. 35, 1949, p. 62-66).

97. ZARISKI. — Quelques questions concernant la théorie des fonctions holomorphes sur une variété algébrique (*Colloque d'Algèbre et Théorie des Nombres*, Paris, C. N. R. S., 1950, p. 129-133).

98. ZARISKI. — Sur la normalité analytique des variétés normalés (*Ann. Inst. Fourier*, t. 2, 1950, p. 161-166).

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre IV.

Structure des anneaux locaux complets.

Chapitre V.

Anneaux locaux intégralement clos et factoriels.

Chapitre VI.

Questions diverses.

141751 Paris. — Imprimerie Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins.