ÉLIE CARTAN

La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 42 (1952)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1952__42__1_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

Henri VILLAT

Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE XLII

La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs

Par Élie CARTAN

Membre de l'Institut
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

Nouveau tirage

1952

LA

THÉORIE DES GROUPES FINIS ET CONTINUS

ET

L'ANALYSIS SITUS

Par M. Élie CARTAN.

INTRODUCTION.

La première idée d'appliquer des considérations d'*Analysis situs* à la théorie des groupes finis et continus remonte à Hurwitz [4] qui, en 1897, se servit, dans la recherche des invariants, d'intégrales appliquées à tout le domaine de certains groupes clos (groupe linéaire d'une forme d'Hermite définie positive, groupe orthogonal). Ce procédé fut utilisé en 1925 par H. Weyl [8] qui, grâce à des considérations d'*Analysis situs* appliquées aux groupes semi-simples clos, fit faire des progrès importants à la théorie de la représentation linéaire des groupes semi-simples, théorie dont E. Cartan avait posé les bases en 1912 en se plaçant au point de vue infinitésimal de S. Lie, mais avec une lacune qu'on n'a pas encore réussi à combler par voie algébrique. A un point de vue différent, H. Poincaré [5, 6, 7], dans trois Mémoires pénétrants publiés en 1900, 1901 et 1908, montra l'importance du rôle joué par les transformations singulières d'un groupe dans la théorie de la structure de ce groupe, rôle analogue à celui que jouent les points critiques d'une fonction analytique. Signalons enfin deux Mémoires de O. Schreier [24 et 25], parus en 1926 et 1927, sur les groupes continus abstraits envisagés d'un point de vue très général.

Dans tous ces travaux qui, à part ceux relativement récents de H. Weyl et O. Schreier, sont restés isolés, les groupes finis et continus sont étudiés dans leur domaine entier d'existence et non pas seulement, avec S. Lie, au voisinage de la transformation identique : ce sont des études « intégrales » et non « locales ». Le but de ce Fascicule est de passer en revue, en se plaçant au point de vue « intégral », un certain nombre de problèmes fondamentaux que pose la théorie des groupes, soit qu'on envisage, comme au Chapitre I, un groupe fini et continu comme une variété à l'intérieur de laquelle on a défini une loi de multiplication ou de composition associative, satisfaisant à un minimum de conditions de continuité, soit qu'on introduise, comme au Chapitre II, pour obtenir ce que j'appelle les groupes de Lie, des hypothèses supplémentaires sur les propriétés analytiques de la loi de composition du groupe. On ne connaît aucun groupe fini et continu qui ne soit pas un groupe de Lie; un théorème fondamental (nº 26) montre que si un tel groupe existe, il ne peut être isomorphe à aucun groupe linéaire. Dans la théorie même des groupes de Lie, signalons l'insuffisance des démonstrations ordinaires du troisième théorème fondamental qui ne prouvent l'existence, un système de constantes c_{iks} étant donné, que d'un *morceau de groupe*, incapable peut-être de se prolonger pour former un groupe complet; une démonstration rigoureuse du théorème est résumée au Chapitre II. Signalons aussi la recherche des conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doit satisfaire un sous-groupe g, connexe ou mixte, d'un groupe de Lie G pour que g soit le plus grand sous-groupe laissant invariant un point d'une variété transformée transitivement par G : ces conditions *ne sont pas* de nature exclusivement locale. Les variétés susceptibles d'être transformées transitivement par un groupe de Lie ne sont du reste pas quelconques au point de vue de l'*Analysis situs*.

Le Chapitre III est consacré à l'étude des groupes clos, qui jouent un rôle si important dans les applications. Le Chapitre IV expose les principes, envisagés du point de vue de la théorie des groupes, de la théorie des espaces riemanniens symétriques due à E. Cartan, dont les applications à la Géométrie et à la théorie des groupes elle-même sont d'une grande variété.

La théorie de la représentation linéaire des groupes clos, avec les applications qu'on en peut faire à la théorie des systèmes orthogonaux complets de fonctions dans une variété close transformée transitivement par un groupe clos, est laissée complètement de côté dans ce Fascicule, dont elle aurait trop facilement fait déborder le cadre, peut-être déjà trop étendu.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS SUR LES VARIÉTÉS ET LES GROUPES CONTINUS ABSTRAITS.

I. — Variétés; variétés closes et ouvertes.

1. La notion de variété est suggérée par celles de ligne et de surface plongées dans l'espace ordinaire. Nous la préciserons, la généraliserons et la limiterons en même temps par l'introduction d'un certain nombre de postulats, analogues à ceux qui ont été énoncés par F. Hausdorff dans ses *Grundzüge der Mengenlehre* (Leipzig, 1914).

Nous appellerons variété à n dimensions un ensemble d'éléments ou points tel qu'on puisse définir un système de sous-ensembles, appelés *voisinages*, satisfaisant aux conditions suivantes :

A. *A chaque voisinage $\mathcal{V}$ est associée une correspondance biunivoque déterminée entre les points de $\mathcal{V}$ et les points d'une hypersphère Σ de l'espace euclidien à n dimensions.* Les points de $\mathcal{V}$ qui correspondent à des points intérieurs à Σ seront dits intérieurs à $\mathcal{V}$, les autres constituent la frontière de $\mathcal{V}$.

B. *Tout point de la variété est intérieur à au moins un voisinage.*

C. *Soient $\mathcal{V}$ un voisinage quelconque, Σ l'hypersphère qui lui est associée,* M *un point intérieur à $\mathcal{V}$, m le point correspondant de Σ et σ une hypersphère de centre m intérieure à Σ. Il existe un voisinage $\mathcal{V}'$ intérieur à $\mathcal{V}$ et tel que les correspondants dans Σ de tous les points de $\mathcal{V}'$ appartiennent à σ.*

D. *Soient* M *un point appartenant à l'intérieur ou à la frontière de $\mathcal{V}$, m son correspondant dans Σ, $\mathcal{V}'$ un voisinage contenant* M *à son intérieur. Il existe une hypersphère σ de centre m telle que les correspondants dans $\mathcal{V}$ de tous les points de Σ qui appartiennent à σ soient intérieurs à $\mathcal{V}'$.*

E. *Étant donnés deux points distincts* M *et* N, *on peut trouver deux voisinages ayant respectivement* M *et* N *à leur intérieur et n'ayant aucun point commun.*

2. Un point A de la variété est dit *point d'accumulation* pour un ensemble infini de points distincts de cette variété si tout voisinage contenant A à son intérieur contient au moins un point de l'ensemble distinct de A. Tout ensemble infini de points distincts appartenant à un même voisinage $\mathcal{V}$ admet au moins un point d'accumulation appartenant à $\mathcal{V}$ (en vertu des postulats A, D et du théorème de Bolzano-Weierstrass).

On dit qu'une suite infinie de points $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ tend vers un point limite A si, étant donné un voisinage quelconque $\mathcal{V}$ contenant A à son intérieur, tous les points de l'ensemble sont, à partir d'un certain rang, intérieurs à $\mathcal{V}$. La suite infinie ne peut pas tendre vers un autre point limite B (en vertu du postulat E).

De tout ensemble infini admettant un point d'accumulation A on peut extraire une suite infinie de points distincts tendant vers A.

Il résulte des postulats A, C et D que la correspondance biunivoque qui existe entre l'intérieur d'un voisinage $\mathcal{V}$ et l'intérieur de l'hypersphère Σ qui lui est associée est bicontinue. On peut donc définir analytiquement d'une manière univoque les points intérieurs à tout voisinage d'une variété à n dimensions au moyen de n coordonnées, de telle sorte que deux points infiniment voisins aient des coordonnées infiniment voisines.

3. Un chemin continu est un ensemble de points qu'on peut mettre en correspondance biunivoque avec les valeurs numériques d'une variable réelle t satisfaisant à $0 \leqq t \leqq 1$, de telle sorte que si $t_n \rightarrow t_0$, la suite des points correspondant à t_n tende vers le point correspondant à t_0.

La variété est dite *connexe* si deux points quelconques peuvent être reliés par un chemin continu. Nous ne considérerons que des variétés connexes ou formées d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de variétés connexes.

4. Admettons maintenant l'hypothèse supplémentaire suivante :

F. *Il est possible de trouver des voisinages en nombre fini ou en infinité dénombrable tels que tout point de la variété soit intérieur à au moins l'un de ces voisinages.*

Nous conviendrons de dire pour abréger que la variété est *recouverte* par les voisinages considérés.

Rangeons les voisinages considérés dans un certain ordre

$$\mathcal{V}_1, \quad \mathcal{V}_2, \quad \ldots, \quad \mathcal{V}_n, \quad \ldots.$$

Nous supprimerons de la suite précédente le premier voisinage $\mathcal{V}_\alpha$ pour lequel tout point intérieur à $\mathcal{V}_\alpha$ est intérieur à l'un au moins des voisinages précédents. Nous recommencerons cette opération sur la nouvelle suite obtenue, et ainsi de suite. *Nous arriverons ainsi à une suite de voisinages telle que dans chaque voisinage $\mathcal{V}_i$ de la suite il existe au moins un point intérieur qui ne soit intérieur à aucun des voisinages* $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots, \mathcal{V}_{i-1}$. Une telle suite sera dite *normale*.

5. Les variétés susceptibles d'être recouvertes par une suite normale *finie* de voisinages se distinguent des autres par des propriétés caractéristiques. En effet, considérons dans une telle variété un ensemble infini de points; il existera au moins un des voisinages de la suite, soit $\mathcal{V}_\alpha$, contenant une infinité de points de l'ensemble, par suite (n° 2) l'ensemble donné admet au moins un point d'accumulation.

Supposons au contraire que la variété soit recouverte par une suite normale d'une infinité dénombrable de voisinages. Prenons dans chaque voisinage $\mathcal{V}_i$ un point M_i intérieur à $\mathcal{V}_i$, mais qui ne soit intérieur à aucun des voisinages précédents. L'ensemble infini ainsi obtenu ne peut avoir aucun point d'accumulation. Un tel point A en effet serait intérieur à un certain voisinage $\mathcal{V}_k$ sans être intérieur aux voisinages précédents; soit $\mathcal{V}'_k$ un voisinage (n'appartenant pas à la suite normale) intérieur à $\mathcal{V}_k$ et contenant A à son intérieur; aucun des points M_{k+1}, M_{k+2}, ... de l'ensemble n'appartient à $\mathcal{V}'_k$ et par suite $\mathcal{V}'_k$ ne peut contenir qu'un nombre fini de points de l'ensemble, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Nous dirons qu'une variété est ouverte ou close suivant qu'on peut ou non trouver des ensembles infinis de points n'admettant aucun point d'accumulation.

On voit que *si une variété close peut être recouverte par une infinité dénombrable de voisinages, elle peut l'être par un nombre fini de voisinages* (généralisation du théorème de Heine-Borel).

Une variété formée d'une infinité dénombrable de variétés connexes ne peut être close.

II. — Groupes finis et continus abstraits.

6. On appelle *groupe abstrait* un ensemble d'*éléments* sur lesquels on a défini une opération, dite multiplication, faisant correspondre à deux éléments quelconques A, B rangés dans un certain ordre un troisième élément noté AB, et satisfaisant aux conditions suivantes :

a. Il existe un élément I (*élément unité*) *tel que, pour tout élément* A, *on ait* $IA = AI = A$;

b. A tout élément A *correspond un élément* A^{-1} *tel que* $AA^{-1} = I$;

c. On a

$$(AB)C = A(BC).$$

Il résulte de ces hypothèses que l'on a aussi $A^{-1}A = I$. En effet l'égalité $BA = CA$ entraîne $B = C$; par suite le produit $A^{-1}A = J$ se confond avec I à cause des égalités $JA^{-1} = A^{-1}AA^{-1} = A^{-1}I = IA^{-1}$. L'égalité $AB = AC$ entraîne donc aussi $B = C$.

7. On peut associer à chaque élément A du groupe abstrait une *opération* ou *transformation* $\mathcal{T}_A$, à savoir celle qui fait correspondre à l'élément M du groupe l'élément $M' = AM$. Cet ensemble de transformations contient la *transformation identique* $\mathcal{T}_I$; à chaque transformation $\mathcal{T}_A$ correspond une transformation inverse $\mathcal{T}_{A^{-1}}$; enfin la résultante des transformations $\mathcal{T}_A$ et $\mathcal{T}_B$ effectuées successivement est la transformation

$$M' = B(AM) = (BA)M,$$

qui correspond à l'élément BA. Nous dirons que les transformations $\mathcal{T}_A$ *réalisent* le groupe abstrait comme groupe de transformations. Elles constituent le *groupe des paramètres* du groupe abstrait. Les transformations $M' = MA$ définissent le *second groupe des paramètres*.

8. Le groupe abstrait est dit *fini et continu d'ordre* r si ses éléments engendrent une variété à r dimensions; si de plus, étant

données deux suites infinies d'éléments A_n et B_n tendant respectivement vers A et B, la suite infinie d'éléments $A_n B_n$ tend vers AB; si enfin, A_n tendant vers I, A_n^{-1} tend vers I. Si $\mathcal{V}_0$ est un voisinage de la variété du groupe contenant à son intérieur l'élément I, l'ensemble des éléments $A\mathcal{V}_0$ obtenus en multipliant A par les éléments de $\mathcal{V}_0$ pourra être regardé comme un autre voisinage contenant l'élément A à son intérieur. Il en sera de même de l'ensemble des éléments $\mathcal{V}_0 A$.

Le groupe fini et continu est dit *connexe* ou *mixte* suivant que sa variété est connexe ou bien formée d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de variétés connexes; l'une des familles connexes d'éléments dont il est composé, à savoir celle qui contient l'élément I, définit par elle-même un groupe.

9. La variété d'un groupe abstrait fini et continu satisfait toujours d'elle-même à l'hypothèse F : *elle peut être recouverte par une infinité dénombrable de voisinages* $A_n\mathcal{V}_0$, *en désignant par* $\mathcal{V}_0$ *un quelconque des voisinages contenant l'élément* I *à son intérieur.*

Nous allons d'abord montrer que tout élément du groupe, qu'on peut supposer connexe, peut être obtenu par la multiplication d'un nombre fini d'éléments intérieurs à $\mathcal{V}_0$. Joignons en effet l'élément I à un élément donné A par un chemin continu, un élément variable du chemin dépendant d'un paramètre t variant de 0 à 1. Soit t_0 la borne inférieure de l'ensemble des valeurs de t correspondant aux éléments du chemin qui ne peuvent pas être obtenus par le procédé indiqué, et soit A_0 l'élément correspondant. L'élément A_0 lui-même ne peut pas être le produit d'un nombre fini q d'éléments intérieurs à $\mathcal{V}_0$, car pour toutes les valeurs de t supérieures à t_0 et suffisamment voisines de t_0, on aurait un élément qui serait le produit de $q+1$ éléments intérieurs à $\mathcal{V}_0$. Considérons maintenant le voisinage $A_0\mathcal{V}_0$; il contient des éléments de la courbe correspondant à des valeurs de t inférieures à t_0 et aussi voisines qu'on veut de t_0, par exemple un élément $A'_0 = A_0 s$, s étant aussi voisin de I qu'on veut, par exemple assez voisin de I pour que s^{-1} appartienne à $\mathcal{V}_0$; il en résulte que l'élément $A_0 = A'_0 s^{-1}$ est le produit d'un nombre fini d'éléments intérieurs à $\mathcal{V}_0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donnons-nous maintenant un entier p; on peut, par hypothèse, mettre les éléments de $\mathcal{V}_0$ en correspondance biunivoque continue avec les points d'une hypersphère Σ de rayon R dans l'espace ordinaire à r dimensions. On peut trouver un nombre ρ jouissant de la propriété suivante : si $A_1, A_2, \ldots, A_p$ sont p points intérieurs à Σ, et si $M_1, M_2, \ldots, M_p$ sont également intérieurs à Σ, mais respectivement intérieurs aux hypersphères de rayon ρ et de centres A_1, $A_2, \ldots, A_p$, le produit $M_1 M_2 \ldots M_p$ appartient au voisinage $A_1 A_2 \ldots A_p \mathcal{V}_0$. Le nombre ρ étant ainsi déterminé, nous pouvons trouver à l'intérieur de Σ une suite de points en nombre fini, soit $C_1, C_2, \ldots, C_{N_p}$, telle que tout point intérieur à Σ soit intérieur à l'une au moins des hypersphères de rayon ρ et de centres $C_1, C_2, \ldots,$ C_{N_p}. Il en résulte que tout élément susceptible d'être obtenu par multiplication de p éléments intérieurs à $\mathcal{V}_0$ est intérieur à l'un au moins des $(N_p)^p$ voisinages $C_{\alpha_1} C_{\alpha_2} \ldots C_{\alpha_p} \mathcal{V}_0$. Cette propriété ayant lieu quel que soit p, on arrive ainsi à une suite dénombrable de voisinages $A_k \mathcal{V}_0$ tels que tout élément du groupe soit intérieur à l'un au moins de ces voisinages [*cf.* **24**, p. 19].

Tout groupe fini et continu clos peut donc être recouvert par un nombre fini de voisinages $A_i \mathcal{V}_0$, *tandis qu'un groupe fini et continu ouvert ne peut l'être que par une infinité dénombrable de tels voisinages*. En particulier tout groupe mixte clos ne contient qu'un nombre fini de familles connexes d'éléments.

III. — Sous-groupes.

10. Un sous-groupe d'un groupe abstrait G est un groupe dont tous les éléments appartiennent à G. Un sous-groupe peut ne contenir qu'un nombre fini d'éléments. S'il en contient une infinité, il peut être continu ou non. Dans ce dernier cas, il y a encore une distinction à faire. Le sous-groupe g est dit *proprement discontinu dans* G si l'on peut trouver dans G un voisinage $\mathcal{V}_0$ contenant I à son intérieur et ne contenant aucun élément de g différent de I. Dans le cas contraire le sous-groupe est *improprement discontinu dans* G : chaque élément de g est alors, dans G, élément d'accumulation pour l'ensemble des éléments de g.

Le sous-groupe g est dit *fermé dans* G si tout élément d'accumulation, dans G, de l'ensemble des éléments de g appartient aussi à g : tout sous-groupe proprement discontinu est fermé dans G. Dans le cas contraire, le sous-groupe est dit *ouvert dans* G.

L'ensemble des éléments d'un sous-groupe g ouvert dans G et de ses éléments d'accumulation forme un nouveau sous-groupe $\overline{g}$, qui est fermé dans G.

Si le groupe G est clos, les sous-groupes g fermés dans G sont les sous-groupes clos.

11. On appelle transformé d'un élément M du groupe G par un élement A de ce groupe l'élement AMA^{-1}. On dit qu'un sous-groupe g est *invariant dans* G si les transformés des éléments de g par les differents eléments de G appartiennent encore à g. Dans ce cas l'ensemble des eléments Ag obtenus en multipliant un élément donné A de G par les différents eléments de g est identique à l'ensemble des élements gA. Si l'on regarde de tels ensembles comme de nouveaux éléments, on peut definir sur eux une multiplication associative, en convenant que le produit de Ag par Bg est ABg. Ces nouveaux éléments définissent un groupe abstrait dont l'élément unité est g; on le désigne par le symbole G/g.

On appelle *centre* d'un groupe l'ensemble des éléments du groupe qui sont échangeables avec tous les éléments du groupe. Ces éléments forment un sous-groupe commutatif invariant dans G. Le centre de G se confond avec G si G est commutatif.

IV. — Les groupes abstraits d'ordre 1.

12. On peut déterminer facilemeut tous les groupes finis et continus connexes d'ordre 1. Soit $\mathcal{V}_0$ un voisinage contenant à son intérieur l'element I; on peut le représenter par un segment de droite sur lequel on pourra prendre pour origine le point correspondant à I; les abscisses x des points du segment varieront, par exemple, de $-a$ à $+a$. Si x et x' sont les abscisses de deux points suffisamment voisins de l'origine, par exemple compris entre $-b$ et $+b$, le produit des deux éléments correspondants appartiendra à $\mathcal{V}_0$; si x'' est l'abscisse du point représentant ce produit, on aura une relation

$$x''=\varphi(x, x'),$$

φ étant une fonction continue. On démontre facilement que φ est une fonction croissante de ses deux arguments.

On peut alors trouver, dans l'intervalle $(0, b)$, une racine et une seule des équations successives

$$
\begin{aligned}
&\varphi(a_1,\ a_1) = a,\\
&\varphi(a_2,\ a_2) = a_1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\varphi(a_n,\ a_n) = a_{n-1},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ vont en décroissant et restent positifs; ils tendent donc vers une limite $\alpha \geqq 0$. Mais comme on a

$$\varphi(\alpha,\ \alpha) < \varphi(\alpha,\ a_n) < \varphi(a_n,\ a_n) = a_{n-1},$$

il en résulte, à la limite,

$$\varphi(\alpha,\ \alpha) \leqq \alpha = \varphi(0,\ \alpha);$$

cela n'est possible que si $\alpha = 0$.

Soit S_n l'élément de paramètre a_n. Attribuons à l'élément $S_n^{p_n}$ un nouveau paramètre $\frac{p_n}{2^n}$; pour les éléments de cette nature, les nouveaux paramètres se succèdent dans le même ordre que les anciens et la multiplication de deux éléments dont les nouveaux paramètres sont t et t' donne un élément dont le nouveau paramètre est $t+t'$. L'attribution d'un nouveau paramètre t s'étend par continuité à tous les éléments dont l'ancien paramètre x est compris entre 0 et a et la formule de multiplication devient

$$t'' = t + t' \qquad (0 \leqq t,\ t',\ t'' \leqq 1).$$

Si nous convenons de poser $S_x = \Sigma_t$, on peut définir Σ_n comme étant $(\Sigma_1)^n$, pour tout entier positif n, puis Σ_{n+t} comme étant le produit $\Sigma_n \Sigma_t$, pour t compris entre 0 et 1. La loi de multiplication s'étend pour ces nouveaux éléments du groupe. Enfin on définira Σ_{-t} comme $(\Sigma_t)^{-1}$, pour t positif, et la loi de multiplication s'étend encore.

On est sûr d'avoir obtenu par ce procédé tous les éléments du groupe (n° 9), mais on a peut-être obtenu chacun plusieurs fois. S'il en est ainsi et si c est la plus petite valeur positive de t pour laquelle Σ_c est l'élément I, c'est que l'élément Σ_{t+c} est le même que l'élément Σ_t. Le groupe obtenu est alors *clos*, tandis que dans le cas contraire, t pouvant varier de $-\infty$ à $+\infty$ sans que les éléments du groupe soient obtenus deux fois, le groupe est *ouvert*.

Les groupes connexes d'ordre 1 *sont donc tous commutatifs; les uns sont ouverts, les autres sont clos.*

On peut ajouter que tous les groupes ouverts sont au fond identiques, ainsi que tous les groupes clos : on peut toujours en effet, dans le cas d'un groupe clos, prendre un nouveau paramètre t' dont la période soit 1 au lieu de c.

V. — Isomorphisme.

13. Un groupe G est dit *isomorphe* d'un groupe G' s'il est possible de faire correspondre à un élément de G' un élément déterminé de G de telle sorte que si A', B', C' sont trois éléments de G' satisfaisant à $A'B' = C'$, les trois éléments correspondants A, B, C de G satisfassent à $AB = C$. A l'élément unité I' de G' correspond nécessairement l'élément unité I de G.

L'isomorphisme est dit holoédrique si tout élément de G correspond à un élément et un seul de G'; il est hémiédrique dans le cas contraire : les éléments de G' qui ont pour correspondant l'élément unité de G forment un sous-groupe invariant de G'.

Deux groupes finis et continus de même ordre G et G' sont dits *localement isomorphes* si l'on peut établir une correspondance biunivoque continue entre les éléments d'un voisinage $\mathcal{V}_0$ de G contenant à son interieur l'élément unité et ceux d'un voisinage $\mathcal{V}'_0$ de G' contenant à son intérieur l'élément unité, cette correspondance satisfaisant à la condition que si A, B et C sont trois éléments de $\mathcal{V}_0$ tels que $AB = C$, les éléments correspondants de $\mathcal{V}'_0$ satisfassent à $A'B' = C'$.

Suppósons que la variété de l'un des groupes, de G par exemple, soit *simplement connexe*. Cela signifie que tout contour continu fermé peut être déformé d'une manière continue de manière à se réduire à un point. Soit alors S un élément quelconque de G n'appartenant pas à $\mathcal{V}_0$. Joignons l'élément unité I à S par un chemin continu ($\mathcal{C}$) et prenons sur ce chemin des points intermédiaires S_1, S_2, $\ldots$, S_{p-1} tels que les éléments S_1, $S_1^{-1}S_2$, $\ldots$, $S_{p-1}^{-1}S$ appartiennent à $\mathcal{V}_0$; désignons-les par $s_1, s_2, \ldots, s_p$; soient $s'_1, s'_2, \ldots, s'_p$ les éléments correspondants de $\mathcal{V}'_0$, et considérons l'élément $S' = s'_1 s'_2 \ldots s'_p$ de G'. Il est facile de voir que si l'on prend sur le chemin ($\mathcal{C}$) une autre suite de points intermédiaires, on arrivera toujours au même élément S'. Enfin on arrive encore au même elément en déformant suffisamment peu le chemin ($\mathcal{C}$) joignant I à S.

Comme la variété de G est simplement connexe, on fait ainsi correspondre à tout élément S de G un élément bien déterminé S' de G'.

Un raisonnement analogue montre que tout élément S' de G' provient d'au moins un élément S de G, et l'on voit facilement qu'on a entre les deux groupes une correspondance isomorphique, G' étant isomorphe de G.

14. Si l'isomorphisme n'est pas holoédrique, il correspondra à l'élément unité I' de G' plusieurs éléments de G, en nombre fini ou infini, qui engendreront un sous-groupe *proprement discontinu* de G. Soient I, T_1, T_2, ... les éléments de ce sous-groupe. Si l'élément S de G correspond à l'élément S' de G', tous les autres éléments de G qui jouiront de la même propriété seront de la forme $T_i S$ et aussi de la forme ST_j; mais l'égalité $T_i S = ST_j$ exige, si S est très voisin de I, que T_j soit égal à T_i, et par suite, en se déplaçant par continuité dans la variété du groupe, l'indice j ne peut que rester égal à l'indice i. Les éléments T_i appartiennent donc au centre (n° **11**) du groupe G.

Par suite *si le groupe* G' *est localement isomorphe au groupe simplement connexe* G, *à l'élément unité de* G' *correspond un sous-groupe proprement discontinu du centre de* G.

15. Ce théorème admet une réciproque. Soit g un sous-groupe proprement discontinu du centre de G. Prenons pour nouveaux éléments les ensembles $Sg = gS$, où S est fixe et g désigne successivement tous les éléments qui le composent. Définissons la multiplication de ces nouveaux éléments par la relation

$$Sg.S'g = SS'g:$$

on voit immédiatement que les nouveaux éléments Sg engendrent un groupe abstrait fini et continu G' localement isomorphe de G et tel qu'à l'élément unité de G' (à savoir g) corresponde le sous-groupe g donné.

La recherche des groupes localement isomorphes de G *revient donc à celle des sous-groupes proprement discontinus du centre de* G.

Par exemple si G est le groupe des translations de la droite, il est confondu avec son centre et tout sous-groupe proprement discontinu est formé des puissances à exposant entier d'une translation particulière : on obtient le groupe clos d'ordre 1.

Le groupe G des similitudes de la droite est simplement connexe et son centre se réduit à l'élément unité. Tout groupe qui lui est localement isomorphe lui est donc intégralement isomorphe.

16. Étant donné un groupe abstrait fini et continu connexe G, le problème de la recherche des groupes qui lui sont localement isomorphes est donc résolu si G est simplement connexe. Dans le cas contraire, on peut construire un groupe $\overline{G}$ simplement connexe localement isomorphe à G. Introduisons pour cela [15, 25] de nouveaux éléments dont chacun sera l'ensemble $[S, (\mathcal{C})]$ d'un élément de G et d'un chemin continu $(\mathcal{C})$ joignant I à S; nous continuerons de dire que les deux éléments $[S, (\mathcal{C})]$ et $[S', (\mathcal{C}')]$ sont identiques si $S' = S$ et si l'on peut passer par déformation continue de $(\mathcal{C})$ à $(\mathcal{C}')$. On définira le produit de deux éléments $[S, (\mathcal{C})]$ et $[S', (\mathcal{C}')]$ en imaginant un élément P mobile sur $(\mathcal{C})$, considérant le produit SP qui, suivi à partir de S, décrira un certain chemin $(\mathcal{C}'')$; le produit cherché sera $[S', (\mathcal{C}) + (\mathcal{C}'')]$. On vérifie facilement que cette définition satisfait aux conditions pour que les nouveaux éléments $[S, (\mathcal{C})]$ constituent un groupe abstrait $\overline{G}$. Ce groupe est évidemment simplement connexe et il est d'autre part localement isomorphe à G. A l'élément unité de G correspondent autant d'éléments de $\overline{G}$ qu'il y a dans la variété de G de contours fermés irréductibles les uns aux autres. Le sous-groupe commutatif proprement discontinu du centre de $\overline{G}$ qui correspond à l'élément unité de G est le *groupe fondamental*, au sens de *l'Analysis situs*, de la variété de G. Nous lui donnerons de préférence le nom de *groupe de connexion*, réservant, comme nous allons le faire dans le numéro suivant, une signification toute différente à l'expression « *groupe fondamental* ».

VI. — Espaces homogènes.

17. On appelle *espace homogène* à *n* dimensions une variété connexe à *n* dimensions dans laquelle opère transitivement un groupe fini

et continu G. Cela veut dire qu'il existe dans la variété un groupe fini et continu de transformations ponctuelles satisfaisant aux conditions suivantes :

1° *Toute transformation de* G *fait correspondre à un point* M *de la variété un point déterminé* M′ ;

2° *Étant donnés deux points quelconques* M *et* M′ *de la variété, il existe au moins une transformation du groupe amenant* M *en* M′ ;

3° *Si la suite des points* $M_1, M_2, \ldots M_n, \ldots$ *de la variété tend vers un point limite* M *et si la suite des transformations* $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ *du groupe tend vers une transformation* S, *le point* M'_n *transformé de* M_n *par* S_n *tend vers le point* M′ *transformé de* M *par* S.

Cette dernière condition exprime que la continuité dans la variété du groupe (considéré comme groupe abstrait) assure la continuité des effets produits sur les points de l'espace.

Un espace homogène doit donc être regardé comme l'ensemble d'une variété connexe et d'un groupe G opérant transitivement dans cette variété. Nous dirons que G est le *groupe fondamental* de l'espace.

On peut définir les voisinages d'un espace homogène par l'ensemble des points transformés d'un point fixe O par les transformations d'un voisinage quelconque du groupe fondamental. *Un espace homogène peut donc être recouvert par une infinité dénombrable de voisinages*. Un espace homogène dont le groupe fondamental est clos est évidemment clos, mais la réciproque n'est pas vraie. La droite projective par exemple, qui est un espace clos à une dimension, est transformée transitivement par le groupe homographique d'une variable, qui est ouvert.

18. L'ensemble des transformations de G qui laissent invariant un point particulier donné O de l'espace forme un sous-groupe g de G qui est manifestement *fermé dans* G, car si une suite infinie de transformations de g tend vers une transformation S de G, cette transformation laisse le point O invariant; nous reviendrons plus loin (n° 29) sur cette importante propriété.

Il peut arriver que G admette des transformations laissant fixes tous les points de l'espace; elles appartiennent nécessairement à g et elles engendrent un sous-groupe γ *invariant dans* G : le groupe de transformations de l'espace est alors en réalité G/γ. Si l'on exclut l'éventualité envisagée, c'est donc que le sous-groupe g ne contient aucun sous-groupe invariant dans le groupe total.

CHAPITRE II.

LES GROUPES DE LIE.

I. — Définition et rappel des théorèmes fondamentaux [1].

19. Nous dirons qu'un groupe abstrait fini et continu est un *groupe de Lie* si l'on peut trouver, dans un voisinage suffisamment petit $\mathcal{V}_0$ de l'élément unité, un système de coordonnées ou paramètres (réels) $a_1, a_2, \ldots, a_r$ tel que les paramètres c_i de l'élément $C = AB$ résultant de la multiplication de l'élément A de paramètres a_i par l'élément B de paramètres b_i s'expriment par des fonctions

$$c_i = \varphi_i(a, b)$$

admettant des dérivées partielles continues des deux premiers ordres.

Le problème de savoir s'il existe des groupes finis et continus d'ordre $r > 1$ qui ne soient pas des groupes de Lie n'a en somme jamais été abordé. Nous verrons plus loin (n° **26**) le seul résultat précis qu'on connaisse sur la question.

Si l'on a affaire à un groupe de Lie, on peut choisir les paramètres du groupe de manière que les φ_i soient des fonctions *analytiques* de leurs arguments [2]. Les opérations de chaque groupe des paramètres (n° 7) sont de plus engendrées par des *transformations infinitésimales* $X_1, X_2, \ldots, X_r$ linéairement indépendantes.

Les crochets deux à deux des transformations infinitésimales satisfont à des relations de la forme

$$(1) \qquad X_i(X_j) - X_j(X_i) \equiv (X_i X_j) = \sum_s c_{ijs} X_s;$$

les constantes (*réelles*) c_{ijs} satisfont à des relations algébriques

$$(2) \quad \sum_\rho (c_{ij\rho} c_{\rho kh} + c_{jk\rho} c_{\rho ih} + c_{ki\rho} c_{\rho jh}) = 0 \qquad (i, j, k, h = 1, 2, \ldots, r),$$

qui se déduisent de *l'identité de Jacobi*

$$[(X_iX_j)X_k]+[(X_jX_k)X_i]+[(X_kX_i)X_j]=0.$$

Si un groupe de transformations autre que l'un des groupes des paramètres *réalise* le groupe abstrait, et si ce groupe admet des transformations infinitésimales, elles satisfont aussi aux relations (1) avec les mêmes constantes c_{ijs}.

20. Aux propriétés précédentes, qui constituent les deux premiers théorèmes fondamentaux de S. Lie, on peut ajouter les suivantes [13]. Si dans un certain voisinage du groupe on a fait choix d'un système de coordonnées $a_1, \ldots, a_r$, l'élément infinitésimal $S_a^{-1}S_{a+da}$ peut être représenté par le symbole $\Sigma\omega_k X_k$, où les formes de Pfaff ω_i satisfont aux relations (*équations de Maurer-Cartan*)

$$(3)\qquad d\,\omega_s(\delta)-\delta\,\omega_s(d)=\sum_{i,j}c_{ijs}\,\omega_i(d)\,\omega_j(\delta).$$

De même la transformation infinitésimale $S_{a+da}S_a^{-1}$ peut être représentée par le symbole $\Sigma\varpi_k X_k$, avec les relations

$$(4)\qquad d\,\varpi_s(\delta)-\delta\,\varpi_s(d)=-\sum_{i,j}c_{ijs}\,\varpi_i(d)\,\varpi_j(\delta).$$

Les formes ω_s sont invariantes par le premier groupe des paramètres, les formes ϖ_s par le second groupe des paramètres.

Enfin le groupe peut être défini, dans un voisinage suffisamment petit $\mathcal{V}_0$ de l'élément unité, par ses *paramètres canoniques*, chaque opération étant caractérisée par les paramètres a_i de la transformation infinitésimale $\Sigma a_i X_i$ qui l'engendre. Les formes ω_s, avec ces paramètres canoniques, peuvent être obtenues [11] par l'intégration des équations différentielles

$$(5)\qquad \frac{d\omega_s}{dt}=da_s+\sum_{i,j}c_{ijs}\,a_i\,\omega_j.$$

en prenant la solution qui s'annule pour $t=0$ et y faisant ensuite $t=1$. Dans ces équations il faut regarder les arguments a_i et da_i comme des paramètres constants, les ω_s étant des fonctions inconnues de la variable indépendante t.

Les formes ϖ_s peuvent de même être obtenues par l'intégration des équations

$$\frac{d\varpi_s}{dt} = da_s - \sum_{i,j} c_{ijs} a_i \varpi_j. \tag{6}$$

Tous ces résultats peuvent être regardés comme classiques.

21. *Le troisième théorème fondamental* de S. Lie exprime que si l'on a un système de constantes c_{ijk} satisfaisant aux relations (2), il existe un groupe fini et continu d'ordre r dont les transformations infinitésimales indépendantes satisfont aux relations (1). On peut par exemple, pour le démontrer, intégrer les équations (5) comme il a été dit plus haut : les équations de Pfaff

$$\omega_s(u'; du') = \omega_s(u; du) \tag{7}$$

sont, en vertu des relations (2), *complètement intégrables* et donnent pour les u'_i des fonctions des u_i et de r paramètres a_i définissant un groupe d'ordre r satisfaisant aux conditions voulues; on prendra par exemple pour paramètre a_i la valeur de u'_i pour $u_1 = \ldots = u_r = 0$.

En réalité la démonstration précédente, comme du reste les autres démonstrations connues, sauf la première de Lie dont nous parlerons bientôt, est tout à fait insuffisante. Les ω_s sont des formes linéaires en $du_1, du_2, \ldots, du_r$ dont les coefficients sont des fonctions *analytiques entières* des variables u_i, mais le déterminant des coefficients des du_i n'est différent de zéro que dans un certain voisinage de l'origine $u_i = 0$. De plus le déterminant serait-il partout différent de zéro, cela ne suffirait pas pour assurer l'existence de transformations finies du groupe valable dans tout l'espace des u_i. Il suffit, pour s'en convaincre, de considérer l'équation simple

$$\frac{du'}{1+u'^2} = \frac{du}{1+u^2},$$

qui ne fournit *aucune* transformation finie valable dans tout le domaine d'existence de la variable réelle u.

On a donc démontré en définitive l'existence d'un ensemble de transformations définies pour des valeurs suffisamment petites des paramètres, dans une région suffisamment petite de l'espace euclidien des u_i, et le produit de deux des transformations de l'ensemble, *dans le cas où ce produit est défini dans la région considérée*, appartient encore à l'ensemble. On a obtenu en somme un *morceau de groupe* opérant dans un *morceau d'espace*. Il est nécessaire de prouver qu'on peut prolonger ce morceau d'espace et ce morceau de groupe de manière a obtenir une variété dans laquelle opère un groupe.

22. La première démonstration de Lie, lorsqu'elle est valable au point de vue *local*, fournit aisément la base d'une démonstration rigoureuse. Elle consiste à partir des r transformations infinitésimales

$$E_s = \sum_{i,j} c_{isj}\, e_i \frac{\partial f}{\partial e_j}, \tag{8}$$

qui satisfont aux relations (1); elles engendrent, pour des valeurs suffisamment petites des paramètres, un morceau de groupe, *dont toutes les opérations sont valables dans tout l'espace des e_i*; en les multipliant entre elles un nombre fini de fois, et cela de toutes les manières possibles, on obtient un groupe de transformations linéaires bien défini dans tout l'espace euclidien des variables e_i. Le raisonnement n'est valable que si les r transformations (8) sont linéairement indépendantes, ce qui exige que le groupe infinitésimal n'admette aucune transformation infinitésimale *distinguée*, c'est-à-dire échangeable avec toutes les autres. Il en est ainsi par exemple si la forme

$$\varphi(e) = \sum_{i,j,k,h} e_i e_j c_{ikh} c_{jhk},$$

qui donne la somme des carrés des racines de *l'équation de Killing*

$$\left| \sum_s e_s c_{isj} - \delta_{ij}\lambda \right| = 0 \qquad \left(\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}\right),$$

a son discriminant différent de zéro. Les groupes qui satisfont à cette condition sont les groupes *simples* ou *semi-simples* [3].

Dans le cas général on peut démontrer le théorème directement en commençant par le cas des groupes *intégrables*. On peut choisir la base infinitésimale d'un groupe intégrable et les paramètres $u_1, \ldots, u_r$ de manière que le tableau des coefficients de $du_1, \ldots, du_r$

dans $\omega_1, \dots, \omega_r$ soit de la forme

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \star & e^{U_2} & 0 & \dots & 0 \\ \star & \star & e^{U_3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \star & \star & \star & \dots & e^{U_r} \end{matrix},$$

U_i étant une forme linéaire par rapport aux variables $u_1, \dots, u_{i-1}$, les termes figurés par des astérisques étant, pour la $i^{\text{ème}}$ ligne, des fonctions analytiques *entières* des variables $u_1, \dots, u_{i-1}$ (1). L'intégration des équations (7) donne alors pour les u'_i des fonctions analytiques entières des u_i et des paramètres a_i, valeurs initiales des u'_i. On a donc directement un groupe dont la variété est homéomorphe à l'espace euclidien et qui opère dans un espace homéomorphe à l'espace euclidien. Ce groupe est simplement connexe.

Dans le cas d'un groupe infinitésimal non intégrable G, admettant un plus grand sous-groupe invariant intégrable g, on peut, pour obtenir un groupe fini de la structure infinitésimale donnée, se ramener à l'intégration d'un système de Pfaff

$$\omega_s(u'; du') = \alpha_{s1}(a)\,\omega_1(u; du) + \dots + \alpha_{sr}(a)\,\omega_r(u, du),$$

les ω_s étant les formes dont il vient d'être question pour les groupes intégrables, les $\alpha_{ij}(a)$ étant les coefficients d'un groupe *linéaire* semi-simple de structure infinitésimale connue. La conclusion est la même, la variété du groupe obtenu est formée des points (a, u) dont chacun est l'ensemble d'un point de la variété du groupe linéaire semi-simple et d'un point de l'espace euclidien des u_i.

II. — Groupe adjoint. Génération d'un groupe par ses transformations infinitésimales.

23. Si S_a est une opération particulière d'un groupe G, S_u une

---

(1) Il peut arriver cependant que pour deux lignes consécutives, par exemple la $i^{\text{ème}}$ et la $(i+1)^{\text{ème}}$, on ait

$$\begin{aligned} a_{ii} &= e^{U_i}\cos U_{i+1}, & a_{i,i+1} &= -e^{U_i}\sin U_{i+1}, \\ a_{i+1,i} &= e^{U_i}\sin U_{i+1}, & a_{i+1,i+1} &= e^{U_i}\cos U_{i+1}, \end{aligned}$$

les éléments a_{ij} et $a_{i+1,j}$ $(j < i)$ étant des fonctions entières de $u_1, \dots, u_{i-1}$.

opération variable, l'équation

$$S_{u'} = S_a S_u S_a^{-1}$$

définit une opération T_a faisant passer de S_u à la *transformée* $S_{u'}$ de S_u par S_a. Ces opérations T_a sont des *automorphies* du groupe, en ce sens que si S_u et S_v sont transformées en $S_{u'}$ et $S_{v'}$, le produit $S_v S_u$ est transformé en $S_{v'} S_{u'}$. De plus elles forment un groupe, qui est le *groupe adjoint* de Lie. En particulier elles laissent invariante la transformation identique et transforment entre elles *linéairement* les transformations infinitésimales : de ce point de vue, elles constituent le *groupe adjoint linéaire* Γ de G. Les transformations infinitésimales de Γ sont précisément données par les formules (8) : la transformation $\Sigma e_i X_i$, transformée par εX_s, devient en effet

$$\sum e_i X_i + \varepsilon\Big(\sum e_i X_i, X_s\Big) = \sum_j e_j X_j + \varepsilon \sum_{i,j} c_{isj} e_i X_j.$$

La transformation infinitésimale $\sum_s a_s E_s$ a pour coefficients les éléments de la matrice H_a :

$$(9) \qquad H_a = \begin{pmatrix} \sum a_s c_{s11} & \sum a_s c_{s21} & \dots & \sum a_s c_{sr1} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \sum a_s c_{s1r} & \sum a_s c_{s2r} & \dots & \sum a_s c_{srr} \end{pmatrix};$$

cette matrice va jouer un rôle fondamental dans la question de la génération d'un groupe par ses transformations infinitésimales.

24. Dans un voisinage $\mathcal{V}_0$ suffisamment petit de l'opération identique, toute opération du groupe admet un système de paramètres canoniques déterminés $(a_1, \dots, a_r)$, ceux de la transformation infinitésimale qui l'engendre. Suivons maintenant dans la variété du groupe un chemin continu partant de l'opération identique ; soit $S(t)$ l'opération correspondant à un point de ce chemin, qu'on peut supposer dépendre d'un paramètre t. On pourra suivre de proche en proche les paramètres canoniques à attribuer à $S(t)$; en effet si les a_i sont les paramètres de $S(t)$, on pourra calculer les paramètres $a_i + da_i$ de $S(t+dt)$ si les paramètres ω_i de $[S(t)]^{-1} S(t+dt)$ sont des formes linéaires indépendantes de $da_1, \dots, da_r$. Or les équations (5)

intégrées montrent que les ω_s se déduisent des da_s en effectuant la substitution linéaire représentée par la matrice

$$1+\frac{1}{2!}H_a+\frac{1}{3!}H_a^2+\ldots+\frac{1}{n!}H_a^{n-1}+\ldots=\frac{e^{H_a}-1}{H_a},$$

dont le déterminant ne s'annule que si l'une des racines caractéristiques de la matrice H_a (racines de Killing) est un multiple entier *non nul* de $2i\pi$. Par conséquent *tant qu'on n'arrivera pas à une transformation* S *dont les paramètres canoniques* (*obtenus par continuité de proche en proche*) *donneront à la matrice* H_a *une racine de Killing multiple entier non nul de* $2\pi i$, *on pourra poursuivre la détermination des paramètres canoniques.*

Les transformations S du groupe pour lesquelles on sera arrêté sont celles pour lesquelles la substitution correspondante T du groupe adjoint linéaire admet une racine caractéristique $e^{2ni\pi}$ égale à 1, *mais provenant par continuité d'une racine différente de* 1. Si l'on sait d'avance que ces transformations *singulières* forment, dans la variété du groupe, des variétés à $r-2$ dimensions au plus, on pourra toujours atteindre une transformation non singulière sans rencontrer une transformation singulière, et par suite *le groupe* (ou du moins l'ensemble de ses transformations non singulières) *sera tout entier engendré par ses transformations infinitésimales.*

Dans le cas contraire, il pourra arriver, contrairement à ce qu'avait cru démontrer H. Poincaré [5], que les transformations infinitésimales n'engendrent qu'une portion du groupe. Le cas le plus simple est fourni par le groupe des substitutions linéaires unimodulaires réelles de deux variables

$$(10)\qquad \begin{cases} x' = a\,x + b\,y, \\ y' = a'x + b'y; \end{cases}$$

les substitutions pour lesquelles l'équation $(a-\lambda)(b'-\lambda)-ba'=0$ admet deux racines réelles *négatives, distinctes* $(a+b'<-2)$ ne peuvent être engendrées par aucune transformation infinitésimale du groupe.

25. Dans le cas particulier d'un groupe G de substitutions linéaires *réelles*, on peut arriver à un résultat assez intéressant. Toute substitution du groupe non susceptible d'être engendrée par une substitution infinitésimale peut être regardée comme le produit de deux substitutions du groupe échangeables entre elles, dont l'une est *invo-*

lutive et dont l'autre est engendrée par une substitution infinitésimale. La démonstration s'appuie sur la considération du groupe G′ obtenu en regardant comme *complexes* les paramètres réels de G; d'une manière plus précise, G′ est le groupe linéaire à $2r$ paramètres réels engendré par les substitutions infinitésimales $X_1, \ldots, X_r$ de G et par les substitutions $iX_1, iX_2, \ldots, iX_r$.

Il importe à cet égard de remarquer qu'étant donné un groupe G d'ordre r, *il n'existe pas toujours* un groupe G′ d'ordre $2r$ dont G soit un sous-groupe et tel que les $2r$ paramètres canoniques réels de G′ s'obtiennent en donnant aux r paramètres canoniques de G des valeurs *complexes* arbitraires. Nous citerons comme exemple le groupe G *simplement connexe* infinitésimalement isomorphe au groupe homographique d'une variable réelle.

III — Les sous-groupes d'un groupe de Lie.

26. On peut démontrer, relativement aux sous-groupes d'un groupe de Lie, deux théorèmes fondamentaux.

Le premier théorème est le suivant : *Tout sous-groupe continu d'un groupe de Lie est un groupe de Lie*. D'une manière plus précise on peut trouver, dans la variété de G et dans celle de g, deux voisinages $\mathcal{V}_0$ et v_0 entourant l'élément unité, et suffisamment petits pour que les differentes opérations de v_0 intérieures à $\mathcal{V}_0$ soient celles qui sont engendrées par une certaine famille linéaire de transformations infinitésimales de G. Un cas particulier de ce théorème, celui qui se rapporte aux sous-groupes du groupe linéaire de n variables, a été démontré par J. von Neumann [23].

Soient N et n les ordres respectifs de G et de g. Prenons, dans l'espace euclidien $\mathcal{E}_N$ à N dimensions des paramètres canoniques de G, une hypersphère Σ ayant pour centre l'origine et de rayon R assez petit pour que deux points distincts intérieurs à Σ représentent deux éléments distincts de G; nous conviendrons d'appeler *module* d'un élément de G intérieur à Σ la distance de son point représentatif à l'origine. Considérons maintenant dans g un voisinage v_0 entourant l'élément unité, dont nous supposerons tous les éléments de module inférieur à R; il est loisible de le supposer représenté par une hypersphère σ de rayon r de l'espace euclidien $\mathcal{E}_n$ à n dimensions, le centre représentant l'élément unité. Soit $R' < R$ la borne inférieure des modules des éléments de g représentés par les points frontières de σ. Prenons un nombre $R'' < R'$; nous pourrons trouver dans $\mathcal{E}_n$ une hypersphère σ' de rayon r' assez voisin de r pour que les éléments de g extérieurs à σ' et intérieurs à σ soient tous de module supérieur à R''. Déterminons enfin un nombre ε assez petit pour que le produit d'un élément de g intérieur à l'hypersphère σ_ε de rayon ε par un élément de g intérieur à σ' soit lui-même intérieur à σ.

Cela posé, considérons dans σ une suite infinie d'éléments tendant vers l'origine; soient $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ les points correspondants de Σ; les demi-droites joignant, dans $\mathcal{E}_N$, l'origine à ces points admettent au moins une demi-droite d'accumulation Δ; prenons sur cette demi-droite un point quelconque H situé à une distance donnée $R_0 \leq R''$ de l'origine. Si s_n est l'élément de g représenté dans $\mathcal{E}_N$ par A_n, déterminons le plus grand entier p_n tel que s_n et toutes ses puissances jusqu'à $s_n^{p_n}$ inclusivement soient de module inférieur à R_0. Dans l'espace $\mathcal{E}_n$, le point représentatif de s_n^2, si n est assez grand pour que s_n soit à l'intérieur de σ_ε, sera à l'intérieur de σ, et même, comme son module est inférieur à R'', à l'intérieur de σ'; il en sera de même de toutes les autres puissances. Dans l'espace $\mathcal{E}_N$ les points représentatifs sont tous intérieurs à l'hypersphère de rayon R_0 et ils admettent manifestement le point H comme élément d'accumulation; on peut donc extraire de leur suite une suite infinie partielle de points tendant vers H. La suite des points correspondants de $\mathcal{E}_n$, tous intérieurs à σ', admet dans $\mathcal{E}_n$ au moins un élément d'accumulation, et comme elle ne peut pas dans G en admettre plus d'un, c'est donc que le point H représente un élément de g intérieur à σ. Le raisonnement fait pour H est valable pour tous les points de Δ de module inférieur à R'' et par suite à R'. Autrement dit *le voisinage v_0 de g contient tous les éléments de module inférieur à R' d'un sous-groupe engendré par une transformation infinitésimale de* G.

On voit facilement alors que toutes les transformations infinitésimales de G appartenant à g engendrent un sous-groupe de Lie g' contenu dans g, et dont les éléments de module inferieur à R' appartiennent tous au voisinage v_0 de g. Il ne peut pas y avoir à l'intérieur de l'hypersphère Σ' de rayon R' d'autre élément appartenant à v_0. En effet un tel élément s pourrait être joint à l'élément unité de g par un chemin continu appartenant à v_0 et dont tous les éléments seraient de module inférieur à R. Soit A le point intérieur à Σ représentatif de cet élément; la variété lieu des éléments sg' serait, à l'intérieur de Σ, une variété *analytique* passant par A, de même dimension n' que l'ordre de g' ; la variété plane à $N - n'$ dimensions issue de l'origine et orthogonale à g' rencontrerait cette variété en un point déterminé ; on aurait ainsi une suite de points tendant vers l'origine en même temps que A et tels que les droites joignant l'origine à ces points feraient des angles tendant vers $\frac{\pi}{2}$ avec les droites qui engendrent g'; il en résulterait l'existence dans g de transformations infinitésimales distinctes de celles de g', contrairement à l'hypothèse. Le théorème est ainsi complètement démontré.

On en déduit en particulier la conséquence suivante. *Tout groupe linéaire fini et continu est un groupe de Lie.* Il en serait de même de tout groupe projectif, conforme, etc. *Si donc il existe un groupe fini et continu qui ne soit pas un groupe de Lie, il ne peut être isomorphe à aucun groupe linéaire.* La question de savoir si tout groupe de Lie est isomorphe à un groupe linéaire est encore, comme on sait, en suspens.

27. Le second théorème fondamental est relatif aux sous-groupes *fermés dans* G. Il s'énonce de la manière suivante. *Si un sous-groupe g d'un groupe de Lie* G *est fermé dans* G *sans être proprement discontinu, on peut trouver dans* G *un voisinage* $\mathcal{V}_0$ *suffisamment petit de l'élément unité pour que tous les éléments de g intérieurs à $\mathcal{V}_0$ soient ceux qui sont engendrés par une certaine famille linéaire de transformations infinitésimales de* G.

La démonstration est analogue à la précédente, mais plus simple, le point de départ étant encore la considération d'une suite infinie d'éléments de g tendant vers l'élément unité dans G.

Il résulte en particulier de ce second théorème que *tout sous-groupe g improprement discontinu est ouvert dans* G, *le sous-groupe formé de g et de ses éléments d'accumulation dans* G *étant un groupe de Lie continu.*

IV. — Les espaces homogènes dont le groupe fondamental est un groupe de Lie.

28. Parmi les espaces homogènes dont le groupe fondamental est un groupe de Lie (espaces homogènes de Lie) se trouvent en particulier les variétés des groupes de Lie, dans lesquelles opère transitivement l'un ou l'autre des groupes des paramètres. Ces espaces ne sont pas, au point de vue de *l'Analysis situs*, des variétés quelconques, comme le montre l'examen du cas de deux dimensions. Les groupes de Lie à deux paramètres sont commutatifs ou isomorphes au groupe des similitudes de la droite. La variété d'un groupe commutatif est homéomorphe soit au plan euclidien (groupe des translations du plan), soit au cylindre de révolution, soit au tore. Quant à la variété du groupe des similitudes de la droite $x' = ax + b (a > 0)$, elle est homéomorphe au plan euclidien (ou à un demi-plan, ce qui est la même chose); ce groupe est donc simplement connexe et comme son centre se réduit à l'opération identique, il n'en existe pas d'autre qui ait la même structure infinitésimale. *Nous obtenons donc, comme seules variétés de groupes de Lie d'ordre* 2, *le plan euclidien, le cylindre de révolution et le tore.*

29. Considérons maintenant un espace homogène de Lie quelconque E admettant un groupe continu connexe G pour groupe fondamental. Le plus grand sous-groupe g qui laisse invariant un point particulier O de l'espace est, comme nous l'avons vu (n° 18), fermé dans G, et par suite (n° 27) proprement discontinu ou bien continu, connexe ou mixte. De plus il n'admet aucun sous-groupe invariant dans G.

Réciproquement soit g un sous-groupe quelconque fermé dans G et n'admettant aucun sous-groupe invariant dans G; soient $r - n$ et n les ordres respectifs de g et de G. S'il existe un espace homogène transformé transitivement par G et tel que g soit le plus grand sous-groupe laissant invariant un point O de l'espace, on pourra associer à chaque point M de l'espace l'ensemble Sg des transformations de G amenant O en M, et qui sont toutes obtenues en multipliant une transformation particulière S par toutes les transformations de g. Considérons alors l'ensemble des « éléments » ou « points » Sg. Ils forment une variété à n dimensions satisfaisant aux conditions voulues.

Définissons en effet le voisinage d'un « point » Sg comme l'ensemble des « points » sSg, où s est un élément arbitraire d'un voisinage $\mathcal{V}_0$ de l'élément unité dans G. Choisissons arbitrairement n transformations infinitésimales $X_1, \ldots, X_n$ formant avec les $r - n$ transformations infinitésimales de SgS^{-1} une base pour le groupe G;

tout élément s est, d'une manière et d'une seule, le produit d'une transformation t de $\mathcal{V}_0$ engendrée par $e_1 X_1 + \ldots + e_n X_n$ et d'une transformation de $\mathcal{V}_0$ appartenant à $S g S^{-1}$; on a donc

$$sSg = tSg;$$

on peut donc faire correspondre à tout « point » du voisinage $\mathcal{V}_0 S g$ considéré un point $(e_1, \ldots, e_n)$ d'un espace euclidien à n dimensions intérieur à une hypersphère de rayon suffisamment petit. D'autre part, deux points distincts de cette hypersphère correspondent à deux « points » distincts tSg; s'il n'en était pas ainsi, et cela quelque petit qu'on prenne le voisinage $\mathcal{V}_0$, c'est qu'on pourrait trouver une suite infinie de couples d'éléments t_n, t'_n tendant vers l'élément unité et tels que $t'_n S$ soit de la forme $t_n S R_n$, l'élément R_n appartenant à g; on aurait donc

$$t_n^{-1} t'_n = S R_n S^{-1},$$

R_n tendant vers l'élément unité, *sans appartenir au voisinage immédiat de l'élément unité dans g*. Mais cela est en contradiction avec le second théorème fondamental (n° 27) relatif aux sous-groupes g fermés dans G. Le postulat A est ainsi vérifié. Les autres postulats ne soulèvent aucune difficulté, sauf peut-être le dernier E, qui se démontre de la manière suivante. Si étant donnés deux « points » distincts Sg et $S'g$, on ne pouvait pas trouver deux voisinages de ces « points » n'ayant aucun point commun, c'est qu'on pourrait trouver une suite infinie de couples d'éléments s_n, s'_n de G tendant vers l'élément unité et tels que

$$s_n S g = s'_n S' g;$$

on aurait alors

$$S' = s'^{-1}_n s_n S R_n,$$

R_n appartenant à g; l'élément R_n tendrait vers $S^{-1} S'$, qui n'appartient pas à g, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que g est fermé dans G.

Il est bien clair qu'on pourrait, pour engendrer l'espace homogène, partir de tout autre sous-groupe $S_0 g S_0^{-1}$ *homologue* de g dans G.

30. On peut, au lieu de supposer que l'espace E est transformé transitivement par un groupe isomorphe holoédrique de G, supposer simplement qu'il est transformé par un groupe *infinitésimalement isomorphe de* G. Dans ce cas le sous-groupe g peut contenir des éléments formant un sous-groupe γ invariant dans G, mais non continu; comme d'autre part γ est constitué par l'ensemble des transformations de G qui laissent invariants tous les points de l'espace, il est fermé dans G et par suite dans g; il est donc *proprement discontinu dans* g. Chacun de ses éléments est alors invariant par lui-même dans G, autrement dit appartient au centre de G. *Les espaces homogènes transformés transitivement par* G, *avec la possibilité qu'il existe dans* G *un sous-groupe non continu laissant invariants tous les points de l'espace, sont donc associés aux différents sous-groupes* g *fermés dans* G *et n'admettant, comme sous-groupe possible invariant dans* G, *qu'un sous-groupe proprement discontinu du centre de* G.

Si G *est simplement connexe*, on pourra donc construire, au moyen de G, tous les espaces homogènes admettant pour groupe fondamental un groupe infinitésimalement isomorphe de G.

31. Supposons le groupe G simplement connexe. Le sous-groupe g peut être connexe ou mixte; dans ce dernier cas la famille connexe g_0 de g qui contient l'élément unité est invariante par toutes les transformations de g.

Si g *est connexe, l'espace homogène* E *est simplement connexe*. Prenons en effet dans E un contour fermé ($\mathcal{C}$) partant de O et y revenant et associons par continuité à chaque point M de ce contour une des transformations de G amenant O en M, la transformation de départ étant la transformation identique. Au contour ($\mathcal{C}$) correspondra dans la variété de G un chemin ($\mathcal{C}'$) partant de l'élément unité et aboutissant à un élément de g, *chemin qu'on pourra fermer sans sortir de* g, puisque g est connexe. On pourra déformer d'une manière continue le contour fermé ($\mathcal{C}'$) ainsi obtenu de manière à le réduire à un point. Cette déformation entraînera une déformation continue correspondante du contour ($\mathcal{C}$), qui peut ainsi se réduire à un point. C. Q. F. D.

Si g n'est pas connexe, à chaque famille connexe g_i constituant g correspond dans l'espace E un ensemble de contours fermés réductibles les uns aux autres par déformation continue; pour les obtenir, on joint, dans la variété de G, l'élément unité à un élément de g_i par un chemin continu; les éléments de ce chemin fournissent des transformations qui, appliquées au point O, donnent dans E un contour fermé. D'une manière générale il y a autant de contours fermés irréductibles les uns aux autres dans E qu'il y a dans g de familles connexes distinctes. Le *groupe de connexion* de l'espace E, au sens de l'*Analysis situs*, est le groupe abstrait dont chaque élément (e_i) peut être identifié à la famille g_i, le produit $(e_i)(e_j)$ étant égal à (e_k) si les produits des éléments de g_i par les éléments de g_j donnent les éléments de g_k.

32. De ce qui précède résulte une conséquence intéressante. Ne supposons plus G simplement connexe. Si l'espace homogène E est simplement connexe, on peut affirmer que le sous-groupe g de G associé à l'espace E est connexe. Si au contraire l'espace E n'est pas simplement connexe, on peut affirmer ou que le sous-groupe g n'est pas connexe, ou que le groupe G n'est pas simplement connexe. C'est ce qui se passe par exemple pour la droite projective transformée transitivement par le groupe homographique (connexe) d'une variable; la droite projective n'est pas simplement connexe, mais le sous-groupe g qui laisse invariant le point $x = \infty$ est le groupe $x' = ax + b\,(a > 0)$, qui est connexe; *donc le groupe homographique n'est pas simplement connexe*. On peut tirer la même conclusion pour le groupe linéaire unimodulaire de deux variables réelles, qui transforme transitivement le plan euclidien pointé (d'où l'on a enlevé l'origine), et pour lequel le sous-groupe g qui laisse invariant le point $(1, 0)$ est le groupe connexe

$$\begin{aligned} x' &= x + ay, \\ y' &= y. \end{aligned}$$

Ces remarques montrent le grand intérêt que peut présenter, pour l'étude topologique d'un espace homogène, l'étude topologique du groupe fondamental de cet espace.

33. Indiquons en terminant que la connaissance de tous les types de groupes de Lie à deux variables permet la détermination de tous les espaces homogènes de Lie à deux dimensions. Contentons-nous de signaler le résultat.

Tout espace homogène de Lie à deux dimensions est homéomorphe à l'un des espaces suivants :

Le plan euclidien;
Le cylindre de révolution;
Le plan projectif pointé;
La sphère;
Le plan projectif;
Le tore.

Les trois premiers sont ouverts, les trois derniers sont clos. On voit que *la surface de Riemann d'une courbe algébrique de genre supérieur à* 1 *ne peut être transformée transitivement par aucun groupe de Lie*. Un théorème analogue, mais moins restrictif en ce qui concerne la nature du groupe, a été démontré par V. van Dantzig et B. L. van der Waerden [26].

V. — Espaces homogènes orientables et non orientables; volume; espaces homogènes métriques.

34. Soient G le groupe fondamental d'un espace homogène, g le sous-groupe associé, γ le sous-groupe du groupe adjoint linéaire correspondant à g. Supposons que dans la base infinitésimale de G les $r-n$ dernières transformations infinitésimales soient celles qui engendrent g, ou du moins la partie connexe de g qui contient l'élément unité. Les substitutions linéaires de γ portent sur les paramètres e_i de la transformation infinitésimale $\Sigma e_i X_i$ la plus générale du groupe, mais, comme γ laisse évidemment invariant l'ensemble des transformations de g, ces substitutions transforment entre eux les paramètres $e_1, e_2, \ldots, e_n$; nous désignerons par $\bar{\gamma}$ le groupe linéaire qui indique comment ces n paramètres sont transformés.

Supposons que le déterminant des différentes substitutions de $\bar{\gamma}$ soit toujours positif; l'espace E sera alors *orientable*. Considérons un parallélépipède construit sur n vecteurs infiniment petits OA_i issus du point origine O; chaque point A_i peut être obtenu en appliquant à O une transformation infinitésimale $\sum_{k=1}^{k=n} e_k^{(i)} X_k$. Rangeons les n vecteurs dans un certain ordre et convenons de dire que le parallélépipède est de sens *positif* ou *négatif* suivant que le déterminant $|e_i^{(j)}|$ est positif ou négatif. Par toute transformation de g, le parallélépipède sera changé en un autre qui aura le même sens que le premier, car on passe des valeurs $e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \ldots, e_n^{(i)}$ aux valeurs transformées par une substitution de $\bar{\gamma}$, la même pour tous les indices i. On pourra de même définir le sens d'un parallélépipède infiniment petit d'origine A différente de O en ramenant son origine en O par une transformation de G, et *le sens se conserve par toute transformation de* G.

Si au contraire certaines substitutions de $\bar{\gamma}$ sont de déterminant négatif, l'espace n'est pas orientable.

Si le sous-groupe g est connexe, il est clair que le déterminant des substitutions du groupe linéaire *connexe* $\bar{\gamma}$ est toujours positif; l'espace est donc orientable. *La variété d'un groupe est en particulier toujours orientable.*

35. Les considérations précédentes permettent de définir le volume d'un parallélépipède infiniment petit d'un espace homogène si toutes les substitutions linéaires de $\bar{\gamma}$ sont de déterminant égal à 1 (espaces orientables), ou de déterminant égal à ± 1 (espaces non orientables). Le volume ainsi défini se conserve par toute transformation de G.

Prenons en particulier la variété d'un groupe G, considérée comme un espace transformé transitivement par le premier groupe des paramètres. Ici g se réduit à la transformation identique. Définissons le volume du parallélépipède d'origine O (élément unité) et construit sur les vecteurs que définissent les transformations infinitésimales $e_1X_1, e_2X_2, \ldots, e_rX_r$, comme étant égal à $e_1e_2\ldots e_r$. L'élément de volume de l'espace sera [12, 13]

$$d\tau = \omega_1\omega_2\ldots\omega_r,$$

le second membre étant un produit extérieur.

Si au contraire on regarde la variété du groupe comme un espace transformé transitivement par le second groupe des paramètres, on a un second élément de volume [12, 13]

$$d\tau' = \varpi_1\varpi_2\ldots\varpi_r.$$

36. Si le groupe linéaire $\bar{\gamma}$ laisse invariante une forme quadratique

définie positive, par exemple $e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_n^2$, il existe dans l'espace homogène E une métrique riemannienne invariante par G. Soit en effet A un point infiniment voisin du point origine O; appelons distance OA la quantité $\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_n^2}$, en désignant par $e_1, \ldots, e_n$ les paramètres de la transformation infinitésimale $e_1 X_1 + \ldots + e_n X_n$ qui amène O en A. Si, par une transformation de g, A vient en A′, on voit que la distance OA′ est égale à la distance OA. On définit alors la distance MN de deux points infiniment voisins M et N, en amenant M en O par une transformation de G; si alors N vient en A, on pose MN = OA; la distance obtenue est indépendante de la transformation qui a amené M en O. Elle se conserve par une transformation quelconque de G.

Analytiquement, si S_a et S_{a+da} sont deux transformations de G amenant respectivement O en deux points infiniment voisins M et N, et si $S_a^{-1} S_{a+da}$ a pour symbole $\omega_1 X_1 + \ldots + \omega_r X_r$, on a

$$\overline{MN}^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_n^2.$$

En particulier l'espace du groupe G, considéré comme transformé transitivement par le premier groupe des paramètres, admet une infinité de métriques invariantes par ce groupe : il suffit de prendre une forme quadratique définie positive à coefficients constants arbitraires en $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Si l'on prend pour g, au lieu de la transformation identique, un sous-groupe proprement discontinu fini, $\bar{\gamma}$ est un groupe linéaire fini qui laisse toujours invariante au moins une forme quadratique définie positive, et par suite l'espace E à r dimensions associé à g admet toujours au moins une métrique invariante par G.

CHAPITRE III.

LES GROUPES DE LIE CLOS.

I. — Volume d'un groupe clos.

37. Nous avons vu (n° 35) qu'on pouvait définir dans la variété d'un groupe de Lie deux volumes différents. Il est évident que chacun

d'eux est fini si le groupe est clos, puisque la variété peut être recouverte par un nombre fini de voisinages, dont chacun a un volume fini.

Si au contraire le groupe est ouvert, l'un et l'autre des volumes de sa variété sont infinis. Soient en effet $\mathcal{V}_0$ un voisinage de l'élément unité et $\mathcal{V}'_0$ un voisinage intérieur à $\mathcal{V}_0$ et suffisamment petit pour que, s et s' étant deux éléments quelconques de $\mathcal{V}'_0$, l'élément ss'^{-1} appartienne à $\mathcal{V}_0$. Nous savons que p étant un entier quelconque, il existe des éléments de G qui ne peuvent pas être obtenus par multiplication de p éléments intérieurs à $\mathcal{V}_0$, sans quoi la variété de G pourrait être recouverte par un nombre fini de voisinages. Soit alors S un élément de cette nature :

$$S = s_1 s_2 \dots s_q \qquad (q > p);$$

nous pouvons supposer que q est le nombre minimum de facteurs qu'on peut prendre à l'intérieur de $\mathcal{V}_0$ pour obtenir S. Considérons les voisinages

$$\mathcal{V}'_0, \quad s_1 s_2 \mathcal{V}'_0, \quad s_1 s_2 s_3 s_4 \mathcal{V}'_0, \quad \dots;$$

on voit facilement qu'ils n'ont deux à deux aucun élément commun; ils ont d'autre part tous le même premier volume v', volume de $\mathcal{V}'_0$. On peut donc trouver dans la variété du groupe autant de régions qu'on veut, toutes de volume v' et n'ayant aucun point commun. C. Q. F. D.

Les deux volumes qu'on peut définir dans la variété d'un groupe clos sont identiques.

II. — Le théorème de H. Weyl.

38. Il existe pour les groupes linéaires clos G, connexes ou mixtes, un théorème fondamental dû à H. Weyl [8, p. 289], c'est qu'*un tel groupe laisse invariante au moins une forme d'Hermite définie positive*.

Supposons d'abord le groupe G connexe, défini par les équations

$$x'_i = \sum_k a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

où les coefficients a_{ik} dépendent naturellement de la substitution S du groupe. Nous désignerons les seconds membres par Sx_i et leurs complexes conjugués par $\overline{Sx_i}$. Formons l'intégrale suivante étendue à toute la variété du groupe :

$$\int (Sx_1\,\overline{Sx_1} + Sx_2\,\overline{Sx_2} + \ldots + Sx_n\,\overline{Sx_n})\,d\tau_S;$$

c'est une forme d'Hermite définie positive $F(x_1, \ldots, x_n)$. Elle est invariante par G, car si l'on effectue sur les variables x_i la substitution particulière S_0, la forme devient

$$\int (SS_0x_1\,\overline{SS_0x_1} + \ldots + SS_0x_n\,\overline{SS_0x_n})\,d\tau_s;$$

en posant $SS_0 = S'$ et remarquant que $d\tau_s = d\tau_{S'}$, si l'on a pris pour $d\tau$ le *second* élément de volume, on démontre le théorème.

Si le groupe G est mixte, il est nécessairement formé d'un nombre *fini* de familles connexes; il suffit alors de définir la forme F par la somme d'autant d'intégrales qu'il y a de familles dans le groupe.

Si le groupe linéaire clos G est à coefficients réels, on peut substituer à la forme d'Hermite une forme quadratique définie positive.

39. Une conséquence particulière du théorème de Weyl est que les coefficients a_{ij} des substitutions d'un groupe linéaire clos sont *bornés*, car si l'on suppose que la forme invariante F est, par exemple,

$$F \equiv x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} + \ldots + x_n\overline{x_n},$$

on a

$$\sum_k a_{ki}\overline{a}_{ki} = 1: \qquad (1)$$

Cette propriété peut du reste se démontrer directement. Appelons module d'une substitution linéaire la quantité $\sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}\overline{a}_{ij}}$. Si les coefficients n'étaient pas bornés, on pourrait trouver une suite infinie de substitutions $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ du groupe telle que le module de chacune soit supérieur au double du module de la précédente, et cette suite ne pourrait avoir aucun élément d'accumulation dans le groupe.

On peut ajouter une autre propriété essentielle qui découle de la précédente, c'est que les racines λ de l'équation caractéristique de S, à savoir

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

sont toutes de module égal à 1. En effet on peut, par un changement préalable de variables, supposer que l'une des équations de la substitution S est

$$x'_1 = \lambda x_1 ;$$

la substitution S^n aurait donc λ^n pour coefficient, et cette quantité ne peut être bornée que si λ est de module 1. Il résulte enfin de là que le déterminant Δ de la substitution, qui est le produit des racines caractéristiques, est de module égal à 1. On pourrait dire directement que à chaque substitution S est associée la substitution $v' = \Delta v$ qui indique comment S change les volumes; ces substitutions ne peuvent engendrer un groupe clos que si Δ est de module égal à 1. C'est du reste la raison du fait qu'il ne peut y avoir dans la variété d'un groupe clos qu'une seule espèce de volumes.

40. On peut rattacher aux considérations précédentes le théorème important suivant : *Tout groupe linéaire borné et algébrique est clos.* Un groupe linéaire G sera dit borné si les coefficients de ses équations sont bornés, et algébrique s'il est défini par un système de relations algébriques entières entre les coefficients. Le théorème est à peu près évident, car tout ensemble infini de substitutions du groupe admet au moins, les coefficients étant bornés, un élément d'accumulation Σ dans le groupe de *toutes* les substitutions linéaires portant sur les variables données, et Σ appartient au groupe G, car ses coefficients satisfont aux relations algébriques entières données.

Le groupe orthogonal de n variables réelles, le groupe linéaire d'une forme d'Hermite définie positive, le groupe linéaire unimodulaire d'une telle forme sont donc des groupes clos. Mais *leurs sous-groupes ne sont pas tous clos*, comme le prouve l'exemple du groupe

$$x' = e^{ia}x, \qquad y' = e^{mia}y$$

au paramètre réel a, m étant une constante réelle *irrationnelle;* ce groupe n'est pas clos, et cependant il laisse invariante la forme d'Hermite $x\bar{x} + y\bar{y}$.

III. — La structure des groupes clos.

41. Si un groupe G est clos, son groupe adjoint Γ l'est aussi; il laisse donc invariante au moins une forme quadratique définie positive, soit

$$F(e) \equiv e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_r^2;$$

en exprimant que la transformation infinitésimale E_i (n° 22) du groupe adjoint laisse F invariante, on obtient les relations

$$c_{jik} + c_{kij} = 0.$$

On peut donc choisir la base d'un groupe clos de manière à avoir

$$(1) \qquad c_{ijk} = c_{jki} = c_{kij} = -c_{ikj} = -c_{kji} = -c_{jik}.$$

On en déduit, pour le coefficient de e_1^2 dans la forme $\varphi(e)$ définie au n° 22,

$$\sum_{j,k} c_{1jk} c_{1kj} = -\sum_{j,k} c_{1jk}^2.$$

La forme $\varphi(e)$ est donc définie ou semi-définie négative : c'est du reste une propriété qui résulte immédiatement du fait qu'elle représente la somme des carrés des racines caractéristiques des substitutions infinitésimales du groupe adjoint et que ces racines sont purement imaginaires, sans quoi les racines caractéristiques des substitutions finies du groupe adjoint ne pourraient être de module 1.

42. Regardons $e_1, e_2, \ldots, e_r$ comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans un espace euclidien à r dimensions. Si Γ laisse invariante dans cet espace une variété plane passant par l'origine, elle laisse aussi invariante la variété orthogonale. On peut donc supposer choisie la base infinitésimale du groupe de manière que Γ laisse invariantes séparément les variétés planes définies par les p_1 premiers axes de coordonnées, puis par les p_2 suivants, puis par les p_3 suivants, et ainsi de suite, Γ ne laissant invariante aucune variété plane plus petite contenue dans l'une des variétés précédentes. Un calcul facile montre alors que les constantes c_{ijk} ne peuvent être différentes de zéro que si les indices i, j, k appartiennent tous les trois, soit à la suite des p_1 premiers indices, soit à la suite des p_2 suivants et ainsi de suite. Les transformations infinitésimales de chaque suite engendrent un groupe et *le groupe* G *est*, au moins au voisinage de l'élément identique, *le produit direct d'un certain nombre d'autres groupes* G_1, G_2, ..., G_h. Cela veut dire que toute transformation de G suffisamment voisine de la transformation identique peut être regardée, d'une manière et d'une seule, comme le produit d'une transformation de G_1, d'une transformation de G_2, etc., ces h transformations composantes étant échangeables entre elles (et prises chacune dans le voisinage de la transformation identique).

Les *groupes composants* G_1, G_2, ..., G_h sont *simples*, car ils ne peuvent évidemment admettre aucun sous-groupe invariant continu, un tel sous-groupe invariant correspondant à une variété plane invariante par Γ.

43. Certains des groupes composants peuvent être à un paramètre. Supposons d'abord qu'ils jouissent tous de cette propriété. Les constantes c_{ijk} sont alors toutes nulles et l'on a un *groupe commutatif clos*. Le groupe simplement connexe de même structure infinitésimale est le groupe des translations de l'espace euclidien à r dimensions. Pour passer de ce dernier à un groupe clos, il faut en déterminer un sous-groupe proprement discontinu; on voit immédiatement que le groupe clos peut toujours s'obtenir en regardant comme identiques deux translations dont les projections diffèrent de nombres entiers. Un tel groupe est donc toujours isomorphe holoédrique au groupe linéaire

$$x'_1 = e^{ia_1}x_1, \qquad x'_2 = e^{ia_2}x_2, \qquad \ldots, \qquad x'_r = e^{ia_r}x_r$$

aux paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_r$.

Tout groupe linéaire isomorphe au précédent est réductible à la forme

$$y'_1 = e^{i\sum m_{1k}a_k}y_1, \qquad y'_2 = e^{i\sum m_{2k}a_k}y_2, \qquad \ldots, \qquad y'_n = e^{i\sum m_{nk}a_k}y_n,$$

les m_{kh} étant des *entiers* arbitraires. Pour que l'isomorphisme soit holoédrique, il faut et il suffit qu'on puisse réciproquement exprimer $a_1, a_2, \ldots, a_r$ par des combinaisons linéaires à coefficients entiers des n formes $\sum_k m_{ik}a_k$ ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Il est intéressant de remarquer que le groupe G admet une infinité continue d'automorphies *locales*, celles qu'on obtient en effectuant sur les a_i une substitution linéaire arbitraire. Mais une telle automorphie locale ne peut se prolonger dans tout le groupe que si la substitution est à coefficients entiers et de déterminant égal à ± 1.

44. Tout groupe clos est (infinitésimalement) le produit direct d'un groupe commutatif et d'un autre groupe pour lequel la forme $\varphi(e)$ est définie négative. Les groupes pour lesquels la forme $\varphi(e)$ est de discriminant non nul sont les groupes simples et semi-simples. Nous allons étudier sommairement les groupes pour lesquels la forme $\varphi(e)$ est définie.

IV. — Les groupes semi-simples clos.

45. Soit G un groupe connexe pour lequel la forme $\varphi(e)$ est définie :

$$\varphi(e) = \pm(e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_r^2);$$

les constantes de structure c_{ijk} satisfont alors aux relations (2) et par suite la forme $\varphi(e)$ est définie *négative*. Nous allons montrer que *le groupe adjoint linéaire* Γ *est clos.*

Considérons en effet [9, 21] l'ensemble des *automorphies linéaires* de G, c'est-à-dire l'ensemble des substitutions linéaires

$$e'_i = \sum_k a_{ik} e_k$$

qui, effectuées sur les paramètres d'une transformation infinitésimale $\sum_i e_i X_i$, conservent les relations de structure

$$(X_i X_j) = \sum_k c_{ijk} X_k.$$

Elles sont définies par les relations algébriques entières

$$(3) \qquad \sum_{k,h} a_{ki} a_{hj} c_{khs} = \sum_k c_{ijk} a_{sk} \qquad (i, j, s = 1, 2, \ldots, r).$$

Le groupe des automorphies linéaires est donc algébrique et aussi borné puisqu'il laisse invariante la forme $\varphi(e)$. Il est donc clos (n° 40). Or le groupe adjoint linéaire Γ en est un sous-groupe, et même un sous-groupe invariant, car la transformée par une automorphie $\mathfrak{A}$ de la transformation T_a du groupe adjoint

$$(T_a) \qquad S_{u'} = S_a S_u S_a^{-1}$$

est la transformation T_b qui provient de l'élément S_b de G transformé de S_a par l'automorphie $\mathcal{A}$. Le groupe Γ' est donc (n° 42), au moins infinitésimalement, le produit direct de Γ par un groupe Γ_1 échangeable avec Γ; mais il est impossible que ce groupe Γ_1 ne se réduise pas à l'opération identique, car il donnerait des automorphies linéaires laissant invariante chaque transformation T_u du groupe adjoint et par suite chaque élément de G.

Le groupe Γ est donc identique à Γ', ou, du moins, il constitue l'une des familles connexes, en nombre fini, qui composent Γ'. Il est donc clos.

46. Nous allons maintenant montrer que le groupe G lui-même est clos; il suffit pour cela de démontrer avec H. Weyl [8, p. 380], que le groupe simplement connexe de la même structure infinitésimale ne recouvre le groupe adjoint qu'un nombre fini de fois, ou encore *qu'il existe dans la variété du groupe adjoint un nombre fini de contours fermés irréductibles les uns aux autres par déformation continue*. Ce nombre sera celui des éléments du centre du groupe simplement connexe de la structure infinitésimale donnée.

Il est nécessaire, pour démontrer ce théorème, d'établir au préalable quelques propriétés du groupe adjoint Γ. Supposons qu'on puisse trouver l transformations infinitésimales indépendantes de Γ qui soient échangeables entre elles et qui ne soient toutes à la fois échangeables avec aucune autre transformation infinitésimale; nous pouvons supposer que ces l transformations sont $E_1, E_2, \ldots, E_l$. Le sous-groupe γ de Γ qu'elles engendrent est *clos*, parce que c'est une des parties connexes du groupe borné et algébrique formé des substitutions de Γ' qui laissent invariantes les variables $e_1, e_2, \ldots, e_l$. Ce sous-groupe γ est d'autre part commutatif; par suite (n° 43) les racines caractéristiques de sa transformation infinitésimale la plus générale $a_1E_1 + a_2E_2 + \ldots + a_lE_l$ sont de la forme $\pm i\omega_\alpha$, les ω_α étant des combinaisons linéaires à coefficients entiers de l paramètres canoniques $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$, définis chacun à 2π près et dépendant euxmêmes linéairement des paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_l$, également canoniques. Les racines caractéristiques sont deux à deux égales et opposées parce que le groupe γ est à coefficients réels.

47. Les transformations infinitésimales de γ qui ne sont pas *singulières*, c'est-à-dire pour lesquelles aucune des quantités ω_α ne s'annule, étant invariantes par γ, admettent chacune ∞^{n-l} homologues dans Γ, et, comme elles dépendent de l paramètres, on voit que les transformations de γ et leurs homologues dépendent de r paramètres. Les transformations singulières de γ, invariantes par un sous-groupe à $l+2$ paramètres au moins, admettent chacune ∞^{n-l-2} homologues au plus et, comme elles dépendent de $l-1$ paramètres au plus, *les transformations singulières de* Γ *dépendent de*

$$r-l-2+(l-1)=r-3$$

paramètres au plus. Il en résulte en particulier (n° 24) que *toutes les transformations finies non singulières de* Γ, *et aussi de* G, *admettent des transformations infinitésimales génératrices.* Il en est de même du reste des transformations singulières, qui sont limites de transformations non singulières, car on peut toujours supposer que les paramètres $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ d'une transformation infinitésimale génératrice soient compris entre o et 2π, c'est-à-dire bornés, et dans ces conditions les transformations infinitésimales génératrices d'une suite infinie de transformations finies non singulières tendant vers une transformation finie singulière admettent au moins un élément d'accumulation, qui fournit une transformation infinitésimale génératrice de la transformation singulière. *Tout groupe semi-simple à forme* $\varphi(e)$ *définie est donc complètement engendré par ses transformations infinitésimales.*

48. Considérons maintenant, dans l'espace euclidien à l dimensions dont les coordonnées rectangulaires sont les paramètres canoniques $a_1, \ldots, a_l$ d'une transformation de γ, les hyperplans

$$\omega_\alpha = 0, \qquad \omega_\alpha = \pm 2\pi.$$

Les premiers délimitent autour de l'origine un certain nombre d'angles polyèdres (D_1), (D_2), ...; les derniers délimitent avec les premiers, à l'intérieur de ces angles polyèdres, un certain nombre de polyèdres (P_1), (P_2), ... ayant l'origine pour sommet. Décrivons dans la variété de Γ un chemin $(\mathcal{C})$ allant de l'élément unité à un élément quelconque T; nous pouvons toujours au besoin, par une petite déformation, supposer que ce chemin ne rencontre aucun élément singulier. Suivons par continuité les paramètres $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ de l'élément variable sur $(\mathcal{C})$; partant de l'origine, nous pénétrerons dans un dès polyèdres (P) sans en sortir jamais; par suite *tout élément de* Γ *est homologue à un élément de* γ *ayant son image à l'intérieur ou sur la frontière d'un des polyèdres* (P). Supposons maintenant que le contour $(\mathcal{C})$ revienne à l'élément unité; le point image intérieur à (P), partant de l'origine, aboutira nécessairement à un des sommets de (P) correspondant à la transformation identique de Γ (pour la transformation identique de Γ, les ω_α sont tous des multiples de 2π). Si le point image revient à l'origine, le contour fermé qu'il décrit peut être réduit à l'origine par une suite d'homothéties de rapport k décroissant de 1 à 0 et le contour fermé $(\mathcal{C})$ peut être corrélativement réduit à un point par déformation con inue. Si au contraire le point image intérieur à (P) va de l'origine à un autre sommet, le contour $(\mathcal{C})$ ne pourra pas être réduit à un point par déformation continue, car s'il le pouvait, il serait toujours possible de réaliser la réduction sans jamais rencontrer les éléments singuliers, *qui forment des variétés à* $r - 3$ *dimensions seulement*, mais alors le point image, ne sortant pas de (P), irait toujours de l'origine au même sommet de (P), ce qui est absurde.

Il y a donc [15] *dans la variété de* Γ *autant de contours fermés irréductibles les uns aux autres qu'il y a dans le polyèdre* (P) *de sommets représentant la transformation identique*. Ce nombre étant fini, le théorème est démontré.

49. Les différents polyèdres (P) qui rayonnent autour de l'origine dans l'espace à l dimensions représentent chacun toutes les transformations du groupe. En particulier deux polyèdres voisins (P) et (P_1), contigus par une face latérale issue de l'origine, sont symétriques l'un de l'autre par rapport a cette face. Il existe une transformation du groupe adjoint transformant les transformations infinitésimales de γ intérieures à (P) dans les transformations infinitésimales de γ intérieures à (P_1). Toutes ces transformations de γ en lui-même engendrent un groupe fini (S). Il n'y a pas du reste dans le groupe adjoint Γ d'autre transformation laissant γ invariant; sinon en effet une de ces transformations T laisserait invariant l'angle polyèdre (D); par suite il existerait une transformation infinitésimale X *non singulière* de γ invariante par T; or la transformation T peut toujours être engendrée par une transformation infinitésimale de Γ laissant X invariante; mais les seules transformations infinitésimales de Γ échangeables avec X appartiennent toutes à γ; la transformation T laisserait donc invariantes toutes les transformations de γ, ce qui est absurde.

L'angle polyèdre (D) est donc la *région fondamentale* du groupe fini (S) dont les opérations génératrices sont les symétries par rapport aux faces latérales de (D). Le nombre des polyèdres (P) qui rayonnent autour de l'origine est égal au nombre des opérations de (S). Le nombre des faces latérales de (D) est égal au rang l du groupe [16].

50. La recherche des automorphies de G peut se rattacher aux considérations précédentes. Elle se ramène à la recherche des rotations et symétries autour de l'origine qui laissent invariante la figure formée par les angles polyèdres (D), (D_1), etc. Le nombre de ces opérations est un multiple du nombre des opérations de (S); sa connaissance donne immédiatement le nombre de familles connexes distinctes dans lesquelles se décompose le groupe total Γ' des automorphies de G. Ce nombre, pour les groupes simples, est égal à 1, 2 ou 6, il a été déterminé par E. Cartan [10].

51. Il existe quatre classes générales de groupes simples clos et, en outre, cinq groupes exceptionnels. Les groupes des classes générales sont isomorphes :

A. Au groupe linéaire unimodulaire d'une forme d'Hermite définie positive à $l+1$ variables; ce groupe est simplement connexe et recouvre $l+1$ fois son groupe adjoint; il admet, pour $l>1$, deux familles distinctes d'automorphies.

B et D. Au groupe orthogonal de n ($n=2l+1$ ou $n=2l\geq 8$) variables réelles; ce groupe recouvre deux fois son groupe adjoint si n est pair et une seule fois si n est impair; il est recouvert deux fois par le groupe simplement connexe de la même structure; le nombre de ses familles connexes distinctes d'automorphies est 1 pour n impair, 6 pour $n=8$, et 2 pour n pair et supérieur à 8.

C. Au groupe linéaire qui laisse invariantes la forme d'Hermite

$$x_1\bar{x}_1+x_2\bar{x}_2+\ldots+x_{2l}\bar{x}_{2l}$$

et la forme quadratique extérieure

$$[x_1 x_2] + [x_3 x_4] + \ldots + [x_{2l-1} x_{2l}];$$

ce groupe est simplement connexe et recouvre deux fois son groupe adjoint. Ses automorphies appartiennent toutes au groupe adjoint.

V. — La formation du groupe clos le plus général.

52. Revenons à un groupe clos connexe quelconque G. Il est infinitésimalement (n° **42**), le produit direct d'un groupe commutatif et de plusieurs groupes simples. Le groupe $\overline{G}$ simplement connexe de même structure infinitésimale que G est donc le produit direct d'un groupe de translations $\overline{G}_0$ d'ordre r_0 et de plusieurs groupes simples clos simplement connexes $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \ldots, \overline{G}_h$.

Pour passer de $\overline{G}$ à G, il faut (n° **14**) construire un sous-groupe g proprement discontinu du centre de $\overline{G}$, sous-groupe qui fournira l'élément unité de G. Or le centre de $\overline{G}$ est le produit direct des centres des groupes composants; le centre de $\overline{G}_0$ étant d'autre part le groupe $\overline{G}_0$ lui-même, on aura, en désignant par C, $C_1, \ldots, C_h$ les centres de $\overline{G}, \overline{G}_1, \ldots, \overline{G}_h$,

$$C = \overline{G}_0 \times C_1 \times \ldots \times C_h.$$

Tout élément de C est le produit de $h+1$ éléments pris respectivement dans $\overline{G}_0, C_1, \ldots, C_h$. Il se peut que le sous-groupe g soit le produit direct d'un sous-groupe de $\overline{G}_0$, d'un sous-groupe de $C_1, \ldots$, d'un sous-groupe de C_h. Dans ce cas G est le produit direct d'un groupe commutatif clos et de h groupes simples clos.

Dans le cas général, désignons respectivement par $g_0, g_1, \ldots, g_h$ les plus grands sous-groupes de $\overline{G}_0, C_1, \ldots, C_h$ qui font partie de g. Le groupe $g_0 \times g_1 \times \ldots \times g_h$ est un sous-groupe de g; il définit un groupe G′, qui recouvre G un nombre entier de fois, et ce nombre est fini, car il est au plus égal au nombre des opérations de $C_1 \times \ldots \times C_h$; le groupe G′ est donc clos. On passe d'autre part de G′ à G en construisant un sous-groupe fini de son centre.

Par suite on peut obtenir tout groupe clos G *en partant d'un groupe clos* G′ *produit direct d'un groupe commutatif clos et* *d'un certain nombre de groupes simples clos; il suffit de prendre pour élément unité de* G *un sous-groupe fini* g' *du centre de* G', g' *n'ayant en commun que l'élément unité avec chacun des groupes facteurs dont le centre de* G' *est le produit direct.* Si g' ne se réduit pas à l'élément unité, G *n'est pas* le produit direct de groupes commutatifs ou simples.

53. Un exemple classique d'un groupe clos semi-simple qui n'est pas le produit direct de groupes simples est fourni par le groupe orthogonal connexe de quatre variables qui est recouvert deux fois par le produit direct de deux groupes simples simplement connexes d'ordre 3, et qui recouvre deux fois son groupe adjoint. De même le groupe linéaire d'une forme d'Hermite définie positive $x_1\bar{x}_1 + \ldots + x_n\bar{x}_n$ est recouvert n fois par le produit direct du groupe commutatif clos

$$x'_k = e^{i\theta} x_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

et du groupe linéaire unimodulaire de la forme d'Hermite.

VI. — Les espaces homogènes à groupe fondamental clos.

54. Si G est un groupe clos, tout espace homogène E transformé transitivement par G est associé à un sous-groupe clos g de G. L'espace est clos lui-même. *Il existe dans l'espace au moins une métrique riemannienne invariante par le groupe;* cela tient à ce que le sous-groupe γ du groupe adjoint qui correspond à g est clos et par suite laisse invariante une forme quadratique définie positive; cette forme permet de définir la métrique au voisinage du point origine et par suite dans tout l'espace (n° 36).

Le raisonnement précédent s'applique du reste à tout espace homogène pour lequel le groupe g est clos, que le groupe fondamental G soit clos ou ouvert. On peut démontrer facilement que si l'espace E est susceptible d'une métrique invariante par G, et si G est le plus grand groupe continu laissant cette métrique invariante, g est clos.

La propriété d'un espace clos transformé transitivement par un groupe clos G d'admettre une métrique invariante par G est très importante. On peut s'en servir pour démontrer la possibilité de construire dans l'espace un système orthogonal *complet* de fonctions en partant des groupes linéaires isomorphes de G. Mais c'est là une théorie qui, à cause de son importance, dépasse le cadre de ce Fascicule.

CHAPITRE IV.

LES ESPACES RIEMANNIENS SYMÉTRIQUES [1].

I. — Définition et premières propriétés.

35. Considérons une variété riemannienne à métrique partout régulière et sur laquelle nous supposons que tout ensemble infini et *borné* de points distincts admet au moins un point d'accumulation. Un ensemble est dit borné si la distance de tous ses points à un point fixe reste bornée, la distance de deux points étant définie comme la borne inférieure des longueurs des arcs de courbe joignant les deux points.

La variété riemannienne sera dite *symétrique*, si la symétrie prise par rapport à un point quelconque A de l'espace conserve la métrique. La symétrie est définie de la manière suivante : on fait correspondre à tout point M (suffisamment rapproché de A) le point M′ obtenu en joignant la géodésique MA et la prolongeant d'un arc AM′ de même longueur que l'arc AM. La propriété d'une variété riemannienne d'être symétrique est équivalente à la suivante : le transport parallèle de Levi-Civita conserve la courbure riemannienne; mais nous laisserons complètement de côté ce point de vue.

Toute variété riemannienne symétrique admet un groupe continu transitif de transformations isométriques. Si en effet M et N sont deux points quelconques (suffisamment voisins), on n'a qu'à joindre la géodésique MN et à effectuer successivement la symétrie par rapport à M et la symétrie par rapport au milieu P de MN : le point M est ainsi amené en N. Cette transformation isométrique fait partie d'une famille continue d'isométries obtenues en laissant le point M fixe et en faisant décrire au point N une géodésique issue de M.

---

[1] Nous résumons dans ce chapitre, en les simplifiant, les théories exposées dans les Mémoires [14], [15], [16], [17], [21] de E. Cartan; *voir* aussi [12] et [13].

Si G est le plus grand groupe continu connexe d'isométries de la variété, cette variété peut être considérée comme un espace homogène de groupe fondamental G doué d'une métrique invariante par G. Le plus grand sous-groupe g de G qui laisse invariant un point donné O de l'espace est alors *clos* (n° 54). *Nous admettrons que* G *est un groupe de Lie.*

56. Soit σ la symétrie prise par rapport à O. Cette symétrie définit une *automorphie involutive* du groupe G, faisant correspondre au déplacement S le déplacement

$$\bar{S} = \sigma S \sigma^{-1} = \sigma S \sigma;$$

si S amène M en N, $\bar{S}$ amène le symétrique $\bar{M}$ de M par rapport à O dans le symétrique $\bar{N}$ de N par rapport à O.

Les transformations de g sont manifestement invariantes par cette automorphie; d'autre part, s'il y en a d'autres, chacune d'elles amène O en un point qui doit être son propre symétrique par rapport à O, elles forment donc, si elles existent, une famille de déplacements qu'on ne peut lier par continuité à g. En particulier les seules transformations infinitésimales invariantes par l'automorphie sont celles qui appartiennent à g.

57. Partons réciproquement d'un groupe continu connexe G et d'une automorphie involutive $\mathfrak{A}$ de ce groupe telle que les transformations infinitésimales invariantes par $\mathfrak{A}$ engendrent un sous-groupe clos g. Nous allons montrer que l'espace homogène $\mathcal{E}$ associé à g peut être doué d'une métrique riemannienne symétrique invariante par G.

L'automorphie $\mathfrak{A}$ effectue sur les paramètres e_i des transformations infinitésimales de G une subsitution linéaire de la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} e'_i = -e_i & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ e'_\alpha = e_\alpha & (\alpha = n+1, \ldots, r); \end{cases}$$

nous désignerons dans la suite par des lettres latines les n premiers indices et par des lettres grecques les $r - n$ derniers.

Par hypothèse les transformations infinitésimales X_α engendrent un sous-groupe continu clos g. Le sous-groupe γ du groupe adjoint Γ qui correspond à g est clos; il transforme entre elles les variables $e_1, \ldots, e_n$; il laisse donc invariante (n° 38) au moins une forme quadratique définie positive, soit

$$f(e) \equiv e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_n^2.$$

58. Soit O le point origine invariant par g. Désignons par $\overline{S}$ la transformation de G transformée de S par l'automorphie $\mathfrak{A}$. Soit enfin S_g l'ensemble des transformations de G qui amènent O en un point M de l'espace; les transformations conjuguées $\overline{S}_g$ définissent un autre point bien déterminé $\overline{M}$. On obtient ainsi, dans l'espace $\mathcal{E}$, une transformation ponctuelle laissant fixe le point O; désignons-la par le symbole σ. *Cette transformation est isométrique;* en effet si S_a et S_{a+da} amènent O en deux points infiniment voisins M et M', leurs transformés $\overline{M}$ et $\overline{M}'$ par σ sont les points transformés de O par $\overline{S}_a$ et $\overline{S}_{a+da}$. La distance MM' s'obtient (n° 36) en considérant la transformation infinitésimale $S_a^{-1} S_{a+da}$ de symbole $\Sigma(\omega_i X_i + \omega_\alpha X_\alpha)$, et l'on a

$$MM' = \sqrt{\sum_i \omega_i^2};$$

la distance $\overline{M}\overline{M}'$ s'obtient de son côté en considérant la transformation infinitésimale conjuguée $\Sigma(-\omega_i X_i + \omega_\alpha X_\alpha)$: on voit ainsi que la distance MM' n'est pas altérée par l'opération σ.

Les trajectoires des transformations infinitésimales $\Sigma e_i X_i$ appliquées au point O sont évidemment invariantes par σ (avec un sens de parcours changé); la transformation σ conserve donc les directions issues de O, mais en les changeant de sens. En particulier les *géodésiques* issues de O sont invariantes par l'isométrie σ; il en résulte immédiatement que l'on passe d'un point M au point $\overline{M}$ transformé de M par σ en effectuant la symétrie par rapport à O, du moins tant qu'il existe une géodésique joignant O à M.

L'espace $\mathcal{E}$ admet donc une symétrie isométrique par rapport à O.

59. L'existence d'une symétrie isométrique σ_A par rapport à un point A quelconque de l'espace découle immédiatement de ce qui précède. Deux points seront dits symétriques par rapport à A si l'on peut, par un déplacement de G, amener simultanément A en O et les deux points donnés en deux points symétriques par rapport à O. La symétrie σ_A est évidemment isométrique.

Si S_0 est l'une des transformations amenant O en A, si S est l'une des transformations amenant O en un point M, le symétrique de M par rapport à A est défini par la transformation

$$(2) \qquad S' = S_0 \bar{S}_0^{-1} \bar{S};$$

on vérifie immédiatement que ce point ne change pas si l'on multiplie S_0 et S par des transformations quelconques de g.

60. Convenons de dire qu'une transformation de G est une *rotation* si elle appartient à g, et qu'elle est une *transvection* si l'on peut l'engendrer au moyen d'une transformation infinitésimale $\Sigma e_i X_i$. Nous désignerons une rotation par la lettre R, une transvection par la lettre T. On a

$$\bar{R} = R, \qquad \bar{T} = T^{-1}.$$

Soit (C) la ligne lieu des points obtenus en appliquant au point O les transformations $T(t)$ du groupe à un paramètre de transvections engendré par une transvection infinitésimale donnée

$$e_1 X_1 + \ldots + e_n X_n.$$

Nous prendrons pour t le paramètre canonique du sous-groupe, que nous pouvons supposer égal à la longueur de l'arc qui sépare sur (C) le point O du point M transformé de O par $T(t)$.

Le symétrique du point M d'abscisse t de la ligne (C) par rapport au point A d'abscisse t_0 est donné, d'après (2), par

$$S' = T(t_0)[T(-t_0)]^{-1} T(-t) = T(2t_0 - t);$$

c'est donc encore un point de (C). *La trajectoire est donc sa propre symétrique par rapport à un quelconque de ses points.*

Cela posé, soit A un point voisin de O sur la ligne (C); la géodésique OA est sa propre symétrique par rapport à A; elle contient donc le point A_1 symétrique de O par rapport à A, point qui appartient à (C). Elle contiendra de même les points $A_2, A_3, \ldots$ obtenus en portant successivement sur (C) des longueurs constantes. Si A se rapproche indéfiniment de O, on a à la limite la géodésique tangente en O à (C), qui doit contenir tous les points de (C). *Les géodésiques issues de O sont donc les trajectoires des transvections.*

61. On peut ajouter un théorème remarquable. Prenons sur la

géodésique (C) deux points A et A′ d'abscisses t_0 et t'_0 ; en prenant le symétrique d'un point S successivement par rapport à A et à A′, on obtient les points

$$T(2t_0)\overline{S} \qquad \text{et} \qquad T(2t'_0)T(-2t_0)S = T(2t'_0 - 2t_0)S.$$

Le résultat des deux symétries est donc la transvection dont l'amplitude est le double de la distance AA′; elle ne change pas si l'on fait glisser l'arc AA′ sur la géodésique qui le porte sans changer sa longueur et son sens.

Il importe de remarquer que *la trajectoire d'un groupe de transvections à un paramètre n'est une géodésique que si la trajectoire part du point* O.

II. — Espaces symétriques réductibles et irréductibles.

62. Les formules (1) qui définissent l'automorphie involutive $\mathcal{A}$ montrent immédiatement que les crochets $(X_i X_j)$ et $(X_\alpha X_\beta)$ ne dépendent que des X_α, tandis que les crochets $(X_i X_\alpha)$ ne dépendent que des X_i. On a donc des formules de structure de la forme

$$(3) \qquad \begin{cases} (X_i X_j) = \sum_\rho c_{ij\rho} X_\rho, \\ (X_i X_\alpha) = \sum_k c_{i\alpha k} X_k, \\ (X_\alpha X_\beta) = \sum_\rho c_{\alpha\beta\rho} X_\rho. \end{cases}$$

Le sous-groupe γ du groupe adjoint Γ qui correspond au sous-groupe g transforme entre elles les variables e_i; il transforme entre elles les variables e_α, puisque g laisse invariante la famille linéaire de transformations infinitésimales $\Sigma e_i X_i$. Le sous-groupe γ, étant clos, laisse donc invariante non seulement la forme $f(e) \equiv e_1^2 + \ldots + e_n^2$, mais aussi une forme définie positive telle que

$$(4) \qquad F(e) \equiv e_1^2 + \ldots + e_n^2 + e_{n+1}^2 + \ldots + e_r^2.$$

On en déduit immédiatement les relations

$$(5) \qquad c_{\alpha ij} + c_{\alpha ji} = 0, \qquad c_{\alpha\beta\gamma} + c_{\alpha\gamma\beta} = 0.$$

63. Considérons la forme $\varphi(e)$ relative au groupe G. Comme elle est invariante par l'automorphie $\mathfrak{A}$, on peut supposer choisie la base infinitésimale du groupe de manière à avoir

$$(6) \qquad -\varphi(e) = \sum_i \lambda_i e_i^2 + \sum_\alpha \lambda_\alpha e_\alpha^2.$$

Les coefficients λ_α sont tous positifs; on a en effet

$$\lambda_\alpha = \sum_{i,j} c_{\alpha ij}^2 + \sum_{\beta,\gamma} c_{\alpha\beta\gamma}^2;$$

si λ_α était nul, c'est que la transformation infinitésimale X_α serait *distinguée;* le sous-groupe g contiendrait donc un sous-groupe continu invariant dans G, ce qui est impossible (n° 18). Comme le sous-groupe γ laisse invariante la forme $\Sigma\lambda_\alpha e_\alpha^2$, rien n'empêche de supposer que c'est celle qui a servi à former F, ce qui revient à supposer les λ_α égaux à 1.

En exprimant maintenant que les transformations infinitésimales E_i et E_α du groupe adjoint laissent invariante la forme $\varphi(e)$, on obtient les relations

$$(7) \qquad c_{ij\alpha} = \lambda_j c_{\alpha ij} = \lambda_i c_{\alpha ij}.$$

64. Ces préliminaires étant posés, supposons que les coefficients λ_i ne soient pas tous égaux entre eux; séparons par exemple les n premiers indices en deux séries, les lettres $i, j, \ldots$ étant réservées à la première série, les lettres $i', j', \ldots$ à la seconde série, et supposons que les λ_i soient tous différents des $\lambda_{i'}$. Les relations (7) donnent alors

$$c_{ii'\alpha} = c_{\alpha ii'} = 0.$$

On voit immédiatement que les transformations infinitésimales X_i et X_α engendrent un groupe G_1; de même les transformations $X_{i'}$ et X_α engendrent un groupe G'_1; enfin les transformations X_i sont échangeables avec les $X_{i'}$. Toute transvection de G est par suite le produit d'une transvection de G_1 et d'une transvection de G'_1 échangeables entre elles. Le groupe G_1 donne naissance à un espace symétrique $\mathcal{E}_1$ associé à g; le groupe G_2 à un espace symétrique $\mathcal{E}_2$. Tout point de $\mathcal{E}$ (suffisamment voisin de O) peut être défini par une transvection $T = T_1 T'_1$; il existe donc une correspondance biunivoque entre les points de $\mathcal{E}$ et les couples de points de $\mathcal{E}_1$ et de $\mathcal{E}'_1$. D'autre part la distance de deux points infiniment voisins $T_{e,e}$ et $T_{e+de,e'+de'}$ de $\mathcal{E}$ est donnée par la considération de la transformation infinitésimale

$$T_{e,e'}^{-1} T_{e+de,e'+de'} = (T_{1e}^{-1} T_{1e+de})(T_{1e'}'^{-1} T'_{1e'+de'});$$

si le premier facteur du second membre a pour symbole

$$\sum \omega_i X_i + \sum \omega_\alpha X_\alpha,$$

et si le second a pour symbole

$$\sum \omega_{i'} X_{i'} + \sum \omega'_\alpha X_\alpha,$$

on voit immédiatement que le ds^2 de $\mathcal{E}$ est la somme des ds^2 de $\mathcal{E}_1$ et de $\mathcal{E}'_1$.

Nous dirons que l'*espace* $\mathcal{E}$ *résulte de la composition des espaces symétriques* $\mathcal{E}_1$ *et* $\mathcal{E}'_1$; il sera dit *réductible*.

On arriverait à une conclusion analogue si le sous-groupe γ, considéré comme opérant sur les e_i, laissait invariante une variété plane à moins de n dimensions, que l'on peut supposer $e_{i'} = 0$; dans ce cas en effet on aurait $c_{\alpha i i'} = 0$, d'où, grâce aux relations (7), $c_{i i' \alpha} = 0$.

65. Si l'espace $\mathcal{E}$ est *irréductible*, les n coefficients λ_i de la forme $-\varphi(e)$ sont donc tous égaux entre eux. Mais il y a trois cas à distinguer.

1° Si les λ_i sont tous nuls, les relations (7) montrent que les transvections sont échangeables entre elles; *l'espace est euclidien*, ou plus exactement c'est la variété d'un groupe commutatif dans laquelle on a pris pour ds^2 une forme quadratique définie positive à coefficients constants des différentielles des n paramètres canoniques. Pour $n = 2$, l'espace est homéomorphe au plan euclidien ou au cylindre de révolution ou au tore.

2° Si la valeur commune λ des λ_i est négative, le groupe G est simple ou semi-simple *ouvert*. L'espace $\mathcal{E}$ est lui-même ouvert, comme on peut le démontrer en s'appuyant sur la propriété de g d'être clos.

3° Si la valeur commune λ des λ_i est positive, le groupe G est simple ou semi-simple *clos;* l'espace $\mathcal{E}$ est également clos.

66. On peut déduire les espaces symétriques irréductibles ouverts des espaces clos par un procédé très simple. Introduisons en effet les symboles

$$Y_k = iX_k, \qquad Y_\alpha = X_\alpha;$$

nous obtenons

$$(3') \quad \left\{ \begin{aligned} (Y_i Y_j) &= -\sum_\rho c_{ij\rho} Y_\rho, \\ (Y_i Y_\alpha) &= \sum_k c_{i\alpha k} Y_k, \\ (Y_\alpha Y_\beta) &= \sum_\rho c_{\alpha\beta\rho} Y_\rho. \end{aligned} \right.$$

formules qui définissent une nouvelle structure de groupe admettant l'automorphie involutive (1). La nouvelle forme $-\varphi(e)$ correspondante se déduit évidemment de la précédente en changeant λ en $-\lambda$. Par suite *à tout espace symétrique irréductible non euclidien ouvert est associé un espace symétrique irréductible non euclidien clos, et réciproquement.*

La recherche des espaces symétriques irréductibles est donc ramenée à celle des espaces clos.

67. Avant d'aborder cette recherche, nous allons démontrer que *si un espace symétrique irréductible est fourni par un groupe* G *semi-simple,* G *est le plus grand groupe continu de déplacements de l'espace.*

Observons d'abord que les crochets $(X_i X_j)$ doivent fournir $r-n$ combinaisons linéaires indépendantes des X_α; sinon en effet ces crochets engendreraient un sous-groupe invariant g' de g, comme le montre l'identité de Jacobi appliquée à $[X_\alpha(X_i X_j)]$. Le sous-groupe g, étant clos, serait le produit direct de g' et d'un autre sous-groupe g''; mais si X_ρ appartient à g'', les formules (7) montrent que, $c_{ij\rho}$ étant nul, les $c_{\rho ij}$ sont nuls; g'' est donc invariant dans G, ce qui est impossible.

Cela posé, supposons qu'il y ait un groupe continu G′, contenant G comme sous-groupe, et laissant invariante la métrique de l'espace. Il est impossible que G′ soit semi-simple, parce qu'alors les $(X_i X_j)$ ne fourniraient pas toutes les transformations du nouveau sous-groupe g' qui laisse invariant l'origine; d'autre part, l'espace, étant irréductible, ne pourrait qu'être euclidien, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il y a donc contradiction.

III. — Les espaces symétriques irréductibles clos.

68. Laissons de côté les espaces localement euclidiens. Le groupe G est alors simple ou semi-simple clos.

Si un groupe clos G est simple et admet une automorphie involutive $\mathcal{A}$ laissant invariantes les transformations d'un sous-groupe continu g, on voit facilement que g est clos. *L'espace symétrique associé $\mathcal{E}$ est nécessairement irréductible;* si en effet γ laissait invariante une famille linéaire $e_1 X_1 + \ldots + e_\nu X_\nu$ $(\nu < n)$, les transformations X_i et $(X_i X_j)$, où les indices i et j prennent les valeurs 1, 2, ..., ν, engendreraient un sous-groupe invariant de G, ce qui est impossible. On a donc ainsi une classe très générale d'espaces symétriques irréductibles.

Supposons maintenant que G soit, au moins infinitésimalement, le produit direct de plusieurs groupes simples $G_1, G_2, \ldots, G_h$. L'automorphie $\mathcal{A}$ transformera G_1 en un des groupes composants; comme elle est involutive, elle effectuera sur les groupes composants une permutation involutive. Si donc h est supérieur à 2, on pourra regarder G comme le produit direct de deux groupes G'_1, G'_2 dont chacun est invariant par $\mathcal{A}$. Le sous-groupe g correspondant sera le produit direct de deux sous-groupes g'_1 et g'_2 de G'_1 et G'_2. On voit immédiatement que l'espace $\mathcal{E}$ résulte de la composition des espaces associés aux sous-groupes g'_1 et g'_2; il est réductible.

Le seul cas où l'espace soit irréductible avec un groupe G semi-simple est celui où G est le produit direct de deux groupes simples G_1, G_2 *isomorphes entre eux*, et où l'automorphie $\mathcal{A}$ transforme chaque élément de G_1 dans l'élément correspondant de G_2.

69. Désignons, dans le cas où le groupe G est semi-simple, par S_a et Σ_a deux éléments correspondants des deux groupes composants. Les rotations, invariantes par $\mathcal{A}$, sont les transformations $S_a \Sigma_a$, les transvections sont les transformations $S_a \Sigma_a^{-1}$ inverses de leurs conjuguées $S_a^{-1} \Sigma_a$.

Parmi toutes les transformations de G, de la forme

$$S_a \Sigma_b g = S_a \Sigma_b S_u \Sigma_u,$$

qui amènent O en un point M de l'espace, une et une seule appartient à G_1, à savoir $S_a S_b^{-1}$; *on peut donc regarder l'espace* $\mathcal{E}$ *comme l'espace du groupe simple* G_1. Si l'on applique au point S_x de l'espace $\mathcal{E}$ la transformation $S_a \Sigma_b$, on obtient la transformation $S_a \Sigma_b S_x$, ou plutôt l'ensemble des transformations

$$S_a \Sigma_b S_x g = S_a S_x S_b^{-1} g.$$

Le déplacement général de l'espace est donc défini par

$$S_{x'} = S_a S_x S_b^{-1}.$$

Désignons par $X_1, X_2, \ldots, X_r$ les transformations infinitésimales du groupe G_1; par $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ les transformations correspondantes de G_2. Les rotations infinitésimales sont

$$U_i = X_i + Y_i;$$

les transvections infinitésimales sont

$$V_i = X_i - Y_i.$$

La forme $-\varphi(e)$ relative à G est la somme des formes $-\varphi(e)$ relatives aux deux groupes G_1 et G_2, et chacune d'elles est la somme des carrés des r paramètres. Il en résulte que le ds^2 de l'espace $\mathcal{E}$, considéré comme l'espace de G_1, est

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_r^2.$$

La symétrie par rapport à l'origine remplace $S_x g$ par $\Sigma_x g$ ou $S_x^{-1} g$; elle est donc définie par

$$S_{x'} = S_x^{-1};$$

les formes ω_i sont changées par cette opération dans les formes $-\varpi_i$. paramètres de $S_x S_{x+dx}^{-1}$; on a donc la relation

$$\omega_1^2 + \ldots + \omega_r^2 = \varpi_1^2 + \ldots + \varpi_r^2.$$

Dans l'espaee $\mathcal{E}$ il existe deux familles remarquables de déplacements, les *translations gauches* $S_{x'} = S_a S_x$ et les *translations droites* $S_{x'} = S_x S_b$. Dans le cas particulier où G_1 est le groupe des rotations de l'espace ordinaire, l'espace $\mathcal{E}$ est l'espace elliptique à trois dimensions, qui admet en effet deux familles de translations au sens de Clifford.

70. Les géodésiques issues de l'origine dans un espace de groupe

simple clos sont les lignes représentatives des sous-groupes à un paramètre [13]. Si le rang l du groupe est supérieur à 1, une géodésique arbitraire n'est pas fermée, mais passe infiniment près de tous les points d'une variété à l dimensions localement euclidienne. Cette variété est représentée par le polyèdre formé de l'ensemble des polyèdres (P) (n° 48) qui rayonnent autour de l'origine dans l'espace euclidien à l dimensions; les faces opposées du polyèdre total doivent être regardées comme identiques [15]. Tout point de l'espace admet différentes *variétés antipodiques* [15].

71. Il se présente des particularités analogues dans les espaces symétriques irréductibles clos dont le groupe G est simple [17]. Le rang de l'espace est ici le nombre maximum λ des transvections infinitésimales linéairement indépendantes et échangeables entre elles; il s'introduit des polyèdres ($\mathcal{P}$) analogues aux polyèdres (P), dont les points intérieurs servent à représenter les transvections du groupe G. Si ce groupe est simplement connexe, ce qu'on peut toujours supposer (n° 30), on démontre comme au n° 48 que la variété des transvections finies est simplement connexe.

Supposons maintenant le sous-groupe g connexe : l'espace $\mathcal{E}$ est simplement connexe (n° 31). On démontre que toute transformation S de G peut se mettre d'au moins une manière sous la forme du produit TR d'une transvection et d'une rotation, ce qui revient à dire que tout point M peut être relié au point origine O par au moins une géodésique. Quelle que soit la transformation S qui amène O en M, le produit $S\bar{S}^{-1} = T^2$ est toujours le même; à tout point M correspond donc une transvection T^2 déterminée. Par suite l'espace $\mathcal{E}$ est l'espace de recouvrement simplement connexe de la variété des transvections, que nous avons vue être de son côté simplement connexe. *Il existe donc une correspondance biunivoque entre les points de $\mathcal{E}$ et les transvections* T^2. De ce point de vue les déplacements de l'espace se traduisent par la formule

$$T'^2 = ST^2\bar{S}^{-1}. \tag{8}$$

Cette formule montre que si l'on considère, *dans l'espace du groupe* G, la variété V des transvections, qu'on peut regarder comme l'image de l'espace $\mathcal{E}$, les déplacements de cet espace $\mathcal{E}$ se traduisent, sur la variété V, par des déplacements de tout l'espace du groupe ambiant. Il y a plus : la métrique induite sur V par sa présence dans l'espace du groupe est identique à la métrique propre de $\mathcal{E}$. La variété V est une variété *totalement géodésique* [13] de l'espace du groupe.

72. Si le sous-groupe qui laisse invariant le point origine de l'espace symétrique est mixte, il se compose du sous-groupe connexe g et d'un certain nombre d'autres familles $\Theta_1 g$, $\Theta_2 g$, ..., les Θ_i étant des transvections convenablement choisies. Les transvections Θ_i, en nombre nécessairement fini, appartiennent au centre de G. Réciproquement à tout sous-groupe de transvections appartenant au centre de G correspond ce qu'on peut appeler une *forme de Klein* de l'espace simplement connexe $\mathcal{E}$; on peut l'obtenir en regardant comme identiques les points T^2, $\Theta_1^2 T^2$, $\Theta_2^2 T^2$, ..., de $\mathcal{E}$. Les transformations de G qui fournissent un déplacement identiquement nul sont les transformations qui appartiennent au centre de G et qui laissent fixe le point origine.

IV. — Les espaces symétriques clos réductibles.

73. Si un espace symétrique clos $\mathcal{E}$ est réductible, cela veut dire (n° 64) qu'*au voisinage de* O, tout point de $\mathcal{E}$ est en correspondance biunivoque avec un couple de points de deux autres espaces symétriques. Mais cette correspondance ne se prolonge peut-être pas dans tout l'espace.

Partons d'un certain nombre d'espaces symétriques clos irréductibles $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, ..., $\mathcal{E}_h$ simplement connexes et considérons l'espace symétrique clos $\mathcal{E}$, *intégralement réductible*, qui résulte de la composition des espaces précédents. On en aura une forme de Klein, également symétrique, en considérant dans chacun des groupes simplement connexes G_1, G_2, ..., G_h le sous-groupe abélien fini formé des transvections qui appartiennent au centre du groupe considéré. Soient (c_1), (c_2), ..., (c_h) ces sous-groupes. On prendra un sous-groupe quelconque du groupe

$$(c_1)\times(c_2)\times\ldots\times(c_h).$$

Si ce sous-groupe est le produit direct de h sous-groupes appartenant respectivement à (c_1), (c_2), ..., (c_h), l'espace symétrique obtenu sera *intégralement* réductible. Dans le cas contraire il ne le sera que *localement*. C'est ainsi que l'espace à quatre dimensions dont chaque point est défini par un couple de points de deux sphères est intégralement réductible, mais il cesse de l'être si l'on regarde comme identiques deux points correspondant à deux couples de points MN, M'N', M' étant l'antipode de M sur la première sphère et N' l'antipode de N sur la seconde. Cet espace n'est autre que la variété des droites de l'espace elliptique à trois dimensions.

V. — Les espaces symétriques irréductibles ouverts.

74. Tout espace symétrique irréductible ouvert $\mathcal{E}$ est *associé* (n° 66) à un espace symétrique irréductible clos $\mathcal{E}_u$.

Supposons d'abord que l'espace clos $\mathcal{E}_u$ soit l'espace d'un groupe simple clos G. Les rotations infinitésimales et les transvections infinitésimales du groupe des déplacements sont respectivement

$$\begin{matrix} X_k + Y_k \\ X_k - Y_k \end{matrix} \qquad (k = 1, 2, \dots, r),$$

en introduisant les transformations infinitésimales X_k et Y_k de deux groupes isomorphes de G. Posons

$$U_k = X_k + Y_k, \qquad V_k = i(X_k - Y_k);$$

nous aurons

$$(U_i U_j) = -(V_i V_j) = \sum_k c_{ijk} U_k,$$

$$(U_i V_j) = (V_i U_j) = \sum_k c_{ijk} V_k.$$

Ces formules définissent la structure du groupe *à paramètres complexes* engendré par les transformations infinitésimales $\Sigma(a_k + ib_k)U_k$. *L'espace ouvert $\mathcal{E}$ a donc pour groupe fondamental le groupe simple à paramètres complexes de même structure que* G. L'automorphie involutive qui donne naissance à l'espace $\mathcal{E}$ est celle qui fait correspondre à toute transformation du groupe complexe la transformation imaginaire conjuguée, changeant $\Sigma(a_k + ib_k)U_k$ en $\Sigma(a_k - ib_k)U_k$.

Si l'espace clos $\mathcal{E}_u$ admet un groupe simple G_u pour plus grand groupe des déplacements, l'espace ouvert associé $\mathcal{E}$ admettra pour plus grand groupe des déplacements un groupe simple ouvert G *de même structure complexe*, mais de structure réelle différente.

75. Prenons, dans l'un et l'autre cas, pour réaliser le groupe fondamental de l'espace ouvert, le groupe adjoint linéaire ouvert correspondant Γ. Les transvections infinitésimales réelles de l'espace correspondent aux transvections infinitésimales purement imaginaires de l'espace clos associé; les racines caractéristiques d'une transvection finie de $\mathcal{E}$ sont donc toutes réelles et positives. On démontre facilement que toute transformation de Γ peut se mettre *d'une manière et d'une seule* sous la forme TR, T étant une transvection et R une rotation. Il passe donc par deux points quelconques de l'espace une géodésique et une seule. De plus les paramètres canoniques sont valables dans tout le domaine des transvections, de sorte que *l'espace $\mathcal{E}$ est simplement connexe et homéomorphe à l'espace euclidien*. Il n'admet aucune forme de Klein non simplement connexe.

Deux espaces symétriques localement réductibles à plusieurs autres espaces symétriques ouverts sont intégralement réductibles.

Remarquons enfin que le sous-groupe g des rotations est connexe pour un espace symétrique irréductible ouvert et il est le même que pour l'espace clos simplement connexe qui lui est associé.

76. On peut se demander si le groupe adjoint Γ d'un groupe simple ouvert arbitrairement donné peut toujours être regardé comme le groupe des déplacements d'un espace symétrique irréductible. La réponse est affirmative. Il y a plus; toutes les automorphies involutives d'un groupe simple ouvert susceptibles d'engendrer un espace symétrique sont homologues entre elles dans le groupe adjoint continu [13, 21]. Autrement dit *étant donné un espace à groupe fondamental simple ouvert, il existe un choix et un seul de l'élément générateur de l'espace susceptible de rendre riemannienne symétrique la géométrie de l'espace.*

Le théorème précédent affirme en particulier l'existence, pour tout groupe simple à paramètres complexes, d'une forme close à paramètres réels. Si l'on pouvait démontrer *a priori* ce théorème, sans le vérifier avec E. Cartan pour chaque structure particulière, ou sans s'appuyer avec H. Weyl [8, p. 371] sur la théorie préalablement établie des groupes simples, cela permettrait une simplification considérable dans l'exposé de la théorie des groupes simples [21].

VI. — Applications à la topologie des groupes simples ouverts.

77. Soit Γ le groupe adjoint d'un groupe simple ouvert G à paramètres réels ou à paramètres complexes. Il existe un espace symétrique irréductible ouvert $\mathcal{E}$, homémorphe à l'espace euclidien, admettant Γ pour groupe des déplacements. Soit g le sous-groupe connexe clos des rotations de l'espace. Toute transformation S de Γ peut, d'une manière et d'une seule, être mise sous la forme du produit TR d'une transvection et d'une rotation. Toute variété fermée tracée dans la variété de Γ correspond d'une manière biunivoque à l'ensemble de deux variétés fermées tracées, l'une dans la variété du groupe clos g, l'autre dans l'espace $\mathcal{E}$. Cette dernière est réductible à un point par déformation continue. Il en résulte [17, 21] que *les nombres de Betti de la variété du groupe ouvert* Γ *sont les mêmes que ceux de la variété du groupe clos* g; il faut leur ajouter un nombre de Betti égal à 1 correspondant précisément à la variété de g, qui est fermée dans l'espace de Γ. Le dernier nombre de Betti non nul de la variété d'un groupe simple ouvert est donc égal à 1, et c'est celui qui se rapporte aux variétés fermées ayant le même nombre de dimensions que l'espace riemannien symétrique dont Γ est le groupe des déplacements.

Le premier nombre de Betti du groupe clos g est d'ailleurs égal à 0 ou à 1; dans le premier cas, le groupe de recouvrement de Γ ne recouvre Γ qu'un nombre fini de fois; dans le second cas, il le recouvre une infinité de fois, mais il n'existe dans Γ qu'une catégorie de courbes fermées dont aucun multiple entier ne soit réductible à un point par déformation continue. Au premier cas appartiennent le groupe projectif réel à $n \geqq 2$ variables et le groupe projectif complexe à une ou plusieurs variables; au second cas appartient le groupe projectif réel à une variable, dont la variété est homéomorphe au volume intérieur à un tore.

78. On voit que tout progrès dans la topologie des groupes clos entraîne un progrès dans la topologie des groupes ouverts. En ce qui

concerne les premiers, si l'on est exactement renseigné sur le premier et même le second nombre de Betti, on ne sait à peu près rien sur les autres nombres de Betti. Néanmoins on est sûr [20] que le troisième nombre de Betti n'est pas nul, du moins si le groupe n'est pas commutatif, car il existe une intégrale triple de différentielle exacte, à savoir l'invariant intégral $\int\int\int \Sigma c_{ijk}\omega_i\omega_j\omega_k$, qui admet des périodes non nulles, par exemple celles qu'on obtient en étendant l'intégrale à la variété d'un sous-groupe simple à trois paramètres du groupe donné. Il y a là un sujet très important de recherches qu'on peut dire à peu près inexploré.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. LIE (S.) et ENGEL (Fr.). — Theorie der Transformationsgruppen (B. G. Teubner, Leipzig; t. I, 1888; t. II, 1890; t. III, 1893).
2. SCHUR (F.). — Ueber den analytischen Charakter der eine endliche continuierliche Transformationsgruppe darstellenden Funktionen (*Math. Ann.*, t. **41**, 1893, p. 509-538).
3. CARTAN (E.). — Sur la structure des groupes de transformations finis et continus (*Thèse*, Nony, Paris, 1894).
4. HURWITZ (A.). — Ueber die Erzeugung der Invarianten durch Integration (*Gött. Nachr.*, 1897, p. 71-90).
5. POINCARÉ (H.). — Sur les groupes continus (*Comptes rendus*, t. **128**, 1899, p. 1065-1069).
6. POINCARÉ (H.). — Sur les groupes continus (*Cambr. Trans.*, t. **18**, 1900, p. 220-255).
7. POINCARÉ (H.). — Sur les groupes continus (*Rend. Circ. matem. Palermo*, t. **15**, 1901, p. 321-368; t. **25**, 1908, p. 81-130).
8. WEYL (H.). — Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen (*Math. Zeitschr.*, t. **23**, 1925, p. 271-309; t. **24**, 1925, p. 328-395).
9. CARTAN (E.). — Les tenseurs irréductibles et les groupes linéaires simples et semi-simples (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. **49**, 1925, p. 130-152).
10. CARTAN (E.). — Le principe de dualité et la théorie des groupes simples et semi-simples (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. **49**, 1925, p. 361-374).
11. CARTAN (E.). — Sur certains systèmes différentiels dont les inconnues sont des formes de Pfaff (*Comptes rendus*, t. **182**, 1926, p. 956-958).

12. CARTAN (E.) and SCHOUTEN (J.-A.). — On the Geometry of the Group-manifold of simple and semi-simple groups (*Proc. Amsterdam*, t. **29**, 1926, p. 803-815).

13. CARTAN (E.). — La géométrie des groupes de transformations (*Journal Math. pures et appl.*, t. **6**, 1927, p. 1-119).

14. CARTAN (E.). — Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann (*Bull. Soc. math.*, t. **54**, 1926, p. 214-264; t. **55**, 1927, p. 114-134).

15. CARTAN (E.). — La géométrie des groupes simples (*Annali di Mat.*, 4e série, t. **4**, 1926-1927, p. 209-256).

16. CARTAN (E.). — Complément au Mémoire : « Sur la géométrie des groupes simples » (*Annali di Mat.*, 4e série, t. **5**, 1928, p. 253-260).

17. CARTAN (E.). — Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple (*Ann. École Norm.*, 3e série, t. **44**, 1927, p. 345-467).

18. CARTAN (E.). — La théorie des groupes et la géométrie (*L'Enseignement math.*, t. **26**, 1927, p. 200-225).

19. CARTAN (E.). — Sur les espaces de Riemann clos admettant un groupe continu transitif de déplacements (*Comptes rendus*, t. **186**, 1928, p. 1817-1819).

20. CARTAN (E.). — Sur les nombres de Betti des espaces de groupes clos (*Comptes rendus*, t. **187**, 1928, p. 196-198).

21. CARTAN (E.). — Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne (*Journal Math. pures et appliquées*, t. 8, 1929, p. 1-33).

22. BUHL (A.). — Aperçus modernes sur la théorie des groupes continus et finis (*Mémorial Sc. math.*, fasc. XXXIII, 1928).

23. NEUMANN (J. VON). — Zur Theorie der Darstellung kontinuierlicher Gruppen (*Sitzungsber. Akad. Berlin*, 1927, p. 76-90).

24. SCHREIER (O.). — Abstrakte kontinuierliche Gruppen (*Abh. math. Seminar Hamburg*, t **4**, 1926, p. 15-32).

25. SCHREIER (O.). — Die Verwandschaft stetiger Gruppen im grossen (*Abh. math. Seminar Hamburg*, t. **5**, 1927, p. 233-244).

26. DANTZIG (D. van) und WAERDEN (B.-L. van der). — Ueber metrisch homogene Räume (*Abh. math. Seminar Hamburg*, t. **6**, 1928, p. 367-376).

TABLE DES MATIÈRES.