MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

N. W. Mc Lachlan
P. Humbert
L. Poli.

Supplément au formulaire pour le calcul symbolique

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 113 (1950)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1950__113__1_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

Henri VILLAT

Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE CXIII

Supplément au Formulaire pour le Calcul symbolique

Par MM. N. W. Mc LACHLAN, P. HUMBERT
et L. POLI

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1950

SUPPLÉMENT AU FORMULAIRE

POUR

LE CALCUL SYMBOLIQUE

Par MM. N. W. Mc LACHLAN, P. HUMBERT
et L. POLI.

NOTE LIMINAIRE.

Les usagers du calcul symbolique, qui depuis ces dernières années deviennent de plus en plus nombreux, ont bien voulu accueillir favorablement le formulaire que nous avons établi, N. W. Mc Lachlan et moi, et dont M. Villat a fait le fascicule C du *Mémorial*. Mais, paru en 1941, ce formulaire a été rédigé en 1938, et depuis ce temps les travaux sur le calcul symbolique, contenant formules ou images nouvelles, se sont multipliés. Aussi avons-nous pensé qu'un supplément, tenant compte des résultats récents, pourrait rendre quelques services. C'est cet Ouvrage que nous donnons aujourd'hui, et que M. Villat a, une fois de plus, consenti à accueillir : nous espérons qu'il connaîtra le même succès que son aîné. En voici les principales caractéristiques.

Le nouveau fascicule suit exactement l'ordre de l'ancien. Il débute par la présentation des notations, ne signalant d'ailleurs que les fonctions figurant au supplément lui-même. Viennent ensuite des corrections au formulaire de 1941, où quelques erreurs s'étaient glissées, dont nous nous excusons. Le *dictionnaire opératoire* a été complètement remanié : il reprend les formules anciennes, au nombre d'une quarantaine, et en donne à peu près autant de nouvelles, le tout présenté dans un ordre beaucoup plus rationnel. Le *dictionnaire d'images* ne contient que des correspondances nouvelles : on remarquera en particulier celles qui ont trait aux logarithmes, aux fonctions d'erreurs, aux logarithmes intégraux. Mais on notera surtout plusieurs sections qui ne figuraient pas dans le formulaire : fonctions eulériennes, sinus d'ordre supérieur, fonction $\nu(x)$ et fonctions associées, qui jouent un grand rôle comme images ou originaux de fonctions usuelles, fonctions de Mathieu. Enfin la section consacrée aux fonctions discontinues a été enrichie de très intéressantes images, introduisant les coefficients du binôme, la fonction ζ de Riemann, les fonctions θ de Jacobi, etc.

Nous présentons aux calculateurs environ 440 correspondances nouvelles; on voit que l'ensemble des deux fascicules contient ainsi plus de 1100 formules symboliques. Sur celles qui sont dans ce supplément, près de 200 sont dues à M. l'abbé Poli, qui nous a également fait connaître un certain nombre des errata au fascicule C. Aussi avons-nous trouvé juste que son nom figure sur la couverture, à côté de ceux des auteurs du premier formulaire.

P. H.

ABRÉVIATIONS ET NOTATIONS.

Comme dans le fascicule C, nous désignons par t la variable indépendante et par p la variable paramétrique, par m et n des nombres entiers, par μ et ν des nombres quelconques, pour lesquels il ne saurait y avoir de confusion avec des fonctions $\mu(x, m)$ et $\nu(x)$ que nous introduisons par ailleurs.

Rappelons les symboles abréviatifs utilisés dans l'expression des images de certaines fonctions (Bessel et associées) :

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{P} = p + \sqrt{p^2 + a^2}, & q = \sqrt{p^2 + 1}; \\
\mathrm{Q} = p + \sqrt{p^2 + 1}, & r = \sqrt{p^2 + a^2}; \\
\mathrm{R} = p + \sqrt{p^2 - a^2}, & s = \sqrt{p^2 - a^2}; \\
\mathrm{S} = p + \sqrt{p^2 - 1}, & u = \sqrt{p^2 - 1}; \\
\mathrm{T} = p + \sqrt{p^2 - i}, & v = \sqrt{p^2 - ia^2}; \\
\mathrm{U} = \dfrac{1 + \sqrt{p^2 + 1}}{p}, & w = \sqrt{p^2 - i};
\end{array}
$$

$$y = \sqrt{t^2 - b^2}.$$

$\mathrm{R}(x)$ désigne, suivant l'usage, la partie réelle de x.

DÉFINITIONS ET NOTATIONS UTILISÉES POUR LES FONCTIONS.

$$\left.\begin{aligned}A(x, j, n) = &-\sum_{s=1}^{j} F(x, s, n) f(x, j+1-s, n)\\ &+\sum_{s=j+1}^{n} F(x, s, n) f(x, n+j+1-s, n)\end{aligned}\right\}$$ combinaison de sinus et sinus intégraux d'ordre supérieur

B_n = Nombre de Bernoulli d'ordre n

$\left.\begin{matrix} bei_\nu x \\ ber_\nu x\end{matrix}\right\} J_\nu(xi\sqrt{i}) = ber_\nu x + i bei_\nu x$ fonctions de Kelvin

$$J_0(xi\sqrt{i}) = I_0(x\sqrt{i}) = ber x + i bei x$$

$$C(x) = \int_0^x \cos\frac{\pi u^2}{2} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x} \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du$$ intégrale de Fresnel

C_m^n = coefficient du binôme

$$\mathrm{chi}(x) = \gamma + \log x + \frac{x^2}{2.2!} + \frac{x^4}{4.4!} + \dots$$ cosinus hyperbolique intégral

$$\mathrm{ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos u}{u} du$$ cosinus intégral

$$\left.\begin{aligned}D_\nu(x) &= 2^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}} x^{-\frac{1}{2}} W_{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{4}}\left(\frac{x^2}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{\pi}\, 2^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)} e^{-\frac{x^2}{4}} {}_1F_1\left(-\frac{\nu}{2}; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{2}\right)\\ &\quad - \frac{\sqrt{\pi}\, 2^{\frac{\nu+1}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)} x e^{-\frac{x^2}{4}} {}_1F_1\left(\frac{1-\nu}{2}; \frac{3}{2}; \frac{x^2}{2}\right)\end{aligned}\right\}$$ fonction de Weber (ou du cylindre parabolique)

$$D_n(x) = e^{-\frac{x^2}{4}} He_n(x)$$

$$D_{-1}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{x^2}{4}} erfc \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$D_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{x}{2\pi}} K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x^2}{4}\right)$$

$$\mathrm{E}i(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^u}{u}\, du$$

logarithme intégral

$\mathrm{E}i^*(x) =$ valeur principale de l'intégrale définissant $\mathrm{E}i(-x)$

$$\mathrm{E}i(-x) = chi(x) - shi(x)$$
$$\mathrm{E}i^*(x) = chi(x) + shi(x)$$
$$\mathrm{E}i(ix) = ci(x) + isi(x)$$

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2}\, du$$

fonction d'erreur

$$erfc(x) = 1 - erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2}\, du = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{\pi x}} \mathrm{W}_{-\frac{1}{4},\frac{1}{4}}(x$$

fonction complémentaire

$$erg(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{u^2}\, du = -\, i\, erf(ix)$$

fonction d'erreur associée

$$f(x, j, n) = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{x^{ns-j}}{\Gamma(ns - j + 1)}$$

sinus d'ordre supérieur

$$f(x, 1, 2) = \sin x$$
$$f(x, 2, 2) = \cos x$$

$$\mathrm{F}(x, j, n) = -\mathcal{G} \int_x^{\infty} \frac{f(x, j, n)}{x}\, dx$$

sinus intégral d'ordre supérieur

$$\mathrm{F}(x, 1, 2) = six$$
$$\mathrm{F}(x, 2, 2) = cix$$

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_r; \beta_1, \ldots, \beta_s; x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1, m)\ldots(\alpha_r, m)}{(\beta_1, m)\ldots(\beta_s, m)} \frac{x^m}{m!}$$

fonction hypergéométrique générale

$${}_0\mathrm{F}_s(\beta_1, \ldots, \beta_s; x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{(\beta_1, m)\ldots(\beta_s, m)\, m!}$$

fonction confluente

$$\mathrm{G}_\nu(x) = \int_0^{\infty} \frac{u^{\nu-1}}{1 + u^2} e^{-ux}\, du$$

intégrale de Gilbert

$\mathcal{G} =$ symbole de l'intégrale généralisée de Hardy. *Voir* section A, 3

$$h(x, j, n) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{x^{ns-j}}{\Gamma(ns - j + 1)}$$

sinus hyperbolique d'ordre supérieur

$$h(x, 1, 2) = \mathrm{sh}\, x$$
$$h(x, 2, 2) = \mathrm{ch}\, x$$

$$\left.\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= J_\nu(x) + iY_\nu(x) = \frac{2}{\pi} i^{-\nu-1} K_\nu(-ix) \\ H_\nu^{(2)}(x) &= J_\nu(x) - iY_\nu(x) = \frac{2}{\pi} i^{\nu+1} K_\nu(ix) \end{aligned}\right\}$$ fonctions de Hankel

$$H_\nu^{(1)}(x) = -i^{-2\nu} H_\nu^{(2)}(-x)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = -i^{2\nu} H_\nu^{(1)}(-x)$$

$$\left.\begin{aligned} H_{m,n}(x) = {} & \cos(m+n)\pi J_{m,n}(x) \\ & + \cos(2m-n)\pi J_{n-m,-m}(x) \\ & + \cos(2n-m)\pi J_{m-n,-n}(x) \end{aligned}\right\}$$ fonction de Hankel du troisième ordre

$$\mathbf{H}_\nu(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2r+1}}{\Gamma\left(r+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\nu+r+\frac{3}{2}\right)}.$$ fonction de Struve

$$\left.\begin{aligned} He_n(x) &= (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{4}} \\ &= x^n - \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4} x^{n-4} + \dots \end{aligned}\right\}$$ polynôme d'Hermite

$$\left.\begin{aligned} I_\nu(x) &= i^{-\nu} J_\nu(ix) = i^\nu J_\nu(-ix) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2r}}{r!\,\Gamma(\nu+r+1)} \end{aligned}\right\}$$ fonction de Bessel d'argument imaginaire

$$J_\nu(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2r}}{r!\,\Gamma(\nu+r+1)}$$ fonction de Bessel

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2}\left[H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)\right]$$

$$J_\nu(\sqrt{i}x) = ber_\nu x + i\,bei_\nu x$$

$$J_n^k(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (2\cos\theta)^k \cos(n\theta - x\sin\theta)\,d\theta$$ fonction de Bourget

$$\left.\begin{aligned} J_{\mu,\nu}(x) = {} & \frac{x^{\mu+\nu}}{3^{\mu+\nu}\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)} \\ & \times {}_0F_2\left(\mu+1, \nu+1; -\frac{x^3}{27}\right) \end{aligned}\right\}$$ fonction de Bessel du troisième ordre

$$\left.\begin{aligned} K_\nu(x) &= \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}[I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)] \\ &= \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix) = \frac{\pi}{2} i^{-\nu-1} H_\nu^{(2)}(-ix) \end{aligned}\right\}$$ fonction K de Bessel

$$\left.\begin{matrix} kei_\nu x \\ ker_\nu x \end{matrix}\right\} i^{-\nu} K_\nu(x\sqrt{i}) = ker_\nu x + i\,kei_\nu x$$

$$L_m^\alpha(x) = x^\alpha \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha} e^{-x})$$ polynôme de Laguerre généralisé

$$L_m^0(x) = L_m(x)$$ polynôme de Laguerre

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{L}_\nu(x) &= i^{-\nu-1}\mathbf{H}_\nu(ix) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2r+1}}{\Gamma\left(r+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\nu+r+\frac{3}{2}\right)} \end{aligned}\right\}$$ fonction de Struve d'argument imaginaire

$$M_{\mu,\nu}(x) = x^{\nu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}+\nu-\mu;\ 2\nu+1;\ x\right)$$ fonction hypergéométrique confluente

$$M_{0,\nu}(x) = 2^{2\nu}\Gamma(\nu+1)\sqrt{x}\, I_\nu\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$P_n(x) = {}_2F_1\left(-n,\ n+1;\ 1;\ \frac{1-x}{2}\right) \qquad (-1 \leqq t \leqq 1)$$ Polynôme de Legendre

$$\left.\begin{aligned} P(x,\nu) &= \int_0^x e^{-u} u^{\nu-1}\,du \\ Q(x,\nu) &= \int_x^\infty e^{-u} u^{\nu-1}\,du \end{aligned}\right\}$$ fonctions de Prym (gamma incomplètes)

$$P(x,\nu) + Q(x,\nu) = \Gamma(\nu)$$

$$P\left(x,\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\, erf\sqrt{x}$$

$$Q\left(x,\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\, erfc\sqrt{x}$$

$$\left.\begin{aligned} Q_\nu(x) &= \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}(2x)^{-\nu-1} \\ &\times {}_2F_1\left(\frac{\nu}{2}+1,\ \frac{\nu+1}{2};\ \nu+\frac{3}{2};\ \frac{1}{x^2}\right) \qquad (|x|>1) \end{aligned}\right\}$$ fonction de Legendre de seconde espèce

$$\left.\begin{aligned} S(\nu,x) &= \int_0^\infty e^{-ux}\frac{du}{(1+u)^\nu} \\ &= x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{\frac{x}{2}} W_{-\frac{\nu}{2},\frac{1-\nu}{2}}(x) \end{aligned}\right\}$$ fonction de Schlömilch

$$S(1,-x) = -e^{-x}\,Ei(x)$$

$$S(x) = \int_0^x \sin\frac{\pi u^2}{2}\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du$$ intégrale de Fresnel

$$\mathrm{shi}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{sh}\,u}{u}\,du$$ sinus hyperbolique intégral

$$\mathrm{si}\,x = -\int_x^\infty \frac{\sin u}{u}\,du$$ sinus intégral

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{U}(x) = 0 & -\infty < x < 0 \\ \mathrm{U}(x) = 1 & 0 \leqq x < \infty \end{array}\right\}$$ fonction brusque unite

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{W}_{\mu,\nu}(x) = \dfrac{\Gamma(-2\nu)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-\mu-\nu\right)}\mathrm{M}_{\mu,\nu}(x) \\ \quad + \dfrac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-\mu+\nu\right)}\mathrm{M}_{\mu,-\nu}(x) \end{array}\right\}$$ fonction hypergéométrique confluente de Whittaker

$$\mathrm{W}_{0,\nu}(x) = \sqrt{\frac{x}{\pi}}\,\mathrm{K}_\nu\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\mathrm{W}_{\mu,\pm\frac{1}{4}}(x) = 2^{\frac{1}{4}-\mu}\,x^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{D}_{2\mu-\frac{1}{2}}(\sqrt{x})$$

$$\mathrm{W}_{\nu+\frac{1}{2},\nu}(x) = x^{\nu+\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{x}{2}}$$

$[x]$ = plus grand nombre entier contenu dans x

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Y}_\nu(x) = \dfrac{\cos\nu\pi\,\mathrm{J}_\nu(x) - \mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \\ \quad = \dfrac{i}{2}\left[\mathrm{H}_\nu^{(2)}(x) - \mathrm{H}_\nu^{(1)}(x)\right] \end{array}\right\}$$ fonction de Bessel de seconde espece

$$\mathrm{B}(\mu,\nu) = \int_0^1 u^{\mu-1}(1-u)^{\nu-1}\,du = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)}$$ fonction Bêta eulérienne

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-u}\,u^{x-1}\,du \qquad [\mathrm{R}(x) > 0]$$ fonction Gamma eulérienne

(si $x < 0$, non entier, on prendra la définition de Weierstrass)

$$\left.\begin{array}{l} \gamma = \lim\limits_{n\to\infty}\left[1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \log n\right] \\ \quad = -\Psi(1) = 0{,}5772156649\ldots \end{array}\right\}$$ constante d'Euler

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} f(x,\varepsilon) \qquad \text{où} \quad \int_0^x f(x,\varepsilon)\,dx = 1$$ fonction de Dirac

$$\zeta(x) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^x} \qquad [\mathrm{R}(x) > 1]$$ fonction Zêta de Riemann

$$\zeta(x, s) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(s+r)^x} \qquad [\mathrm{R}(x) > 1]$$

fonction Zêta généralisée

$$\theta_1(\omega, x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2 e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 x} \sin(2n+1)\pi\omega$$

$$\theta_2(\omega, x) = \sum_{0}^{\infty} 2 e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 x} \cos(2n+1)\pi\omega$$

$$\theta_3(\omega, x) = 1 + \sum_{1}^{\infty} 2 e^{-n^2 x} \cos 2n\pi\omega$$

$$\theta_4(\omega, x) = 1 + \sum_{1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 x} \cos 2n\pi\omega$$

fonctions Thêta de Jacobi $\left(\text{le rapport des périodes est } \frac{ix}{\pi}\right)$

$$\lambda(x, y) = \int_0^y \frac{\Gamma(u+1)}{x^u} du$$

(*Cf* bibliographie, référence 5)

$$\mu(x, m) = \int_0^{\infty} \frac{x^u u^m}{\Gamma(u+1)} du$$

$$\mu(x, m, n) = \int_0^{\infty} \frac{x^{u+n} u^m}{\Gamma(u+n+1)} du$$

$$\nu(x) = \int_0^{\infty} \frac{x^u}{\Gamma(u+1)} du$$

$$\nu(x, n) = \int_n^{\infty} \frac{x^u}{\Gamma(u+1)} du$$

fonction ν incomplète

$$\nu i(x, n) = \int_0^x \frac{\nu(u, n)}{u} du$$

fonction ν intégrale

$$\Sigma(\nu, x) = x^{\nu-1} e^{-x} \int_0^x \frac{e^u du}{u^\nu} \qquad (\nu < 1)$$

fonction de Schlömilch associée

$$\Psi(x) = \frac{d}{dx} \log \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

dérivée logarithmique de la fonction Gamma

$$\Psi(1+x) = \Psi(x) + \frac{1}{x}$$

$$\Psi\left(\frac{1}{2} + x\right) = 2\Psi(2x) - \Psi(x) - 2\log 2$$

$$\Psi^{(n)}(1+x) = (-1)^{n+1} n!\, \zeta(n+1, x) \qquad (n \geqq 1$$

CORRECTIONS AU FORMULAIRE

(Fascicule C du *Mémorial*).

Page 5, ligne 15; *remplacer* I_ν par J_ν.

» 7, » 1; *ajouter* : ν différent d'un entier négatif.

» » 2; » $m \geqq 1$.

» » 13; » $n \geqq 0$.

» avant-dernière ligne, *ajouter* $n \geqq 1$.

» 8, ligne 4; pour $\cos \nu t$, *lire* $\cos \nu \pi$.

» 10, dernière ligne; pour $\lambda \geqq 0$, *lire* $\lambda_1 \geqq 0$; *ajouter* $n \geqq 2$.

» 11, formule 6; *lire* $f(t - \log a) \supset a^{-p} \varphi(p)$.

» 12, » 4; » $R(\nu) > -1$.

» » 7; » $+ \varphi(\log p)$.

» ligne 5, au dénominateur, *remplacer* x par $\sqrt{x}$.

» 13, lignes 5 et 6; *lire* $g(x, t)$.

» *effacer* les lignes 13 et 14.

» dans la dernière ligne, *isoler* à droite le groupe $t > b$.

» 14, *remplacer* la formule 2 par la suite :

$$(t^2 - b^2)^\nu \supset \frac{(2b)^{\nu+\frac{1}{2}}\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\, p^{\nu-\frac{1}{2}}} K_{\nu+\frac{1}{2}}(bp).$$

» au second membre de la formule 9, *lire*

$$1 - (p + \nu - 1)\, S(\nu, p).$$

» dernière ligne; ne fermer le crochet qu'après -1.

» 15, la première figure est inexacte. *Voir* ce Supplément.

» 16, formule 7; *lire* $\log \dfrac{p-a}{p}$.

» 17, » 5; *ajouter* : $R(\nu) > -1$.

» » 10; pour $R(\nu) > 1$, *lire* $R(\nu) > 0$.

» *effacer* les formules 11 et 12. *Voir* ce supplément.

» avant-dernière formule; *remplacer* 1 par $\dfrac{b}{a}$.

» 20, *effacer* la formule 8, $\dfrac{\cos^2 t}{t}$ n'a pas d'image.

» avant-dernière formule, *lire* au second membre

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{p}{\sqrt{p^2+1}\sqrt{-p+\sqrt{p^2+1}}}.$$

» 22, formule 10; *remplacer* au premier membre $\operatorname{ch}^{2n} t$ par $\operatorname{sh}^{2n+1} t$.

» 23, *supprimer* la deuxième formule.

» 24, formule 4; *remplacer* ν par a.

» 26, » 5; *lire* $\sin t\, ci(t) - \cos t\, si(t)$.

» 29, » 4; *remplacer* n par ν, et $n > -1$ par $R(\nu) > -1$.

Page 29, formule 9; *multiplier* au second membre par n!

» 30, » 3 à partir du bas; *remplacer* s par m et *ajouter* $R(\nu) > -2$.

» 31, avant dernière intégrale; sa limite inférieure doit être b.

» 32, formule 8; la *remplacer* par

$$\left(\frac{t-b}{t+b}\right)^{\frac{\nu}{2}}\left[Y_\nu(ay)+J_{-\nu}(ay)\left\{\frac{1-\left(\frac{t+b}{t-b}\right)^{\nu}}{\sin\nu\pi}\right\}\right]$$
$$\supset \frac{p\,e^{-br}}{r\sin\nu\pi}\left[\left(\frac{P}{a}\right)^{-\nu}\cos\nu\pi-\left(\frac{P}{a}\right)^{\nu}\right] \qquad [t>b,\ -1<R(\nu)<1].$$

» formule 11, la *remplacer* par

$$Y_0(ay)+\frac{1}{\pi}\log\frac{t-b}{t+b}J_0(ay)\supset\frac{-2p\,e^{-br}}{\pi r}\log\frac{P}{a}.$$

» *supprimer* les formules 12 et 13.

» 34, aux deux dernières formules, *ajouter* $t > b$.

» 35, formule 3 en remontant; *ajouter* $R(\mu+\nu)>1$; au dénominateur, *lire* 2^{μ}.

» dernière formule; *lire* $I_{2\nu}(t)$.

» 37, formule 3 en remontant; *ajouter* $t > b$.

» 39, » 8; *lire* $+\frac{p}{s^2}\left[\frac{p}{a}-\frac{a}{s}\log\frac{R}{a}\right]$.

» » 9; *ajouter* $-\frac{1}{4}<R(\nu)<\frac{1}{4}$.

» 43, » 3; *remplacer* $J\,i_0(2\sqrt{t})$ par $\int_t^{\infty}\frac{J_0(2\sqrt{x})}{x}dx$.

» 45, » 3 en remontant; *remplacer* le second membre par $\frac{1}{q^3}$.

» 47, » 3 en remontant; *remplacer* le second membre par $-\frac{a^3}{s^3}$.

» 48, Dans les six premières formules, au second membre, *supprimer* le signe — dans la dernière parenthèse.

» » dernière formule, *lire* $e^{-\frac{2}{p^2}}I_n\left(\frac{p^2}{2}\right)$.

» 51, *remplacer* toutes les formules de cette page par celles du présent Supplément, article 18 de la section C.

» 52, *supprimer* les formules 1 et 3, inexactes.

» formule 4; la *remplacer* par

$$\frac{D_{2n}(2\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\supset\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{(2n)!}{2^n n!}\,\frac{p(1-p)^n}{(1+p)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

» 54, *supprimer* la formule 5.

» 55, formule 2; la *remplacer* par

$$H\,e_{2n+1}(\sqrt{t})\supset\frac{(2n+1)!}{2^{n+1}n!}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\left(\frac{1}{2p}-1\right)^n.$$

A. — THÉORÈMES GÉNÉRAUX.

Nous rappelons la définition de l'*image* et de l'*original*,

$$f(t) \supset \varphi(p),$$
$$\varphi(p) \subset f(t),$$

par l'*intégrale de Laplace-Carson*

$$\varphi(p) = p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt.$$

1. Théorème. — *Soit* $f(t) \supset \varphi(p)$ *et supposons que l'on ait*

$$\xi(x, t) \supset \varphi_1(p)\, h(p)\, e^{-xh(p)},$$

où $\varphi_1(p)$ *et* $h(p)$ *sont des fonctions continues de* p, *indépendantes de* x; *admettons* $\mathrm{R}[h(p)] \geqq p_0 > 0$, x *étant réel et positif*. (*Voir* bibliographie, référence 6). *On a alors*

$$\int_0^\infty \xi(x, t) f(x)\,dx \supset \varphi_1(p)\,\varphi[h(p)].$$

On tire de ce théorème un grand nombre de conséquences : par exemple, le théorème du *produit*, bien connu par ailleurs : il suffit de prendre $h(p) = p$ et d'écrire $\varphi_1(p) = \frac{\varphi_2(p)}{p}$, on a alors

$$\xi(x, t) \supset e^{-px}\varphi_2(p),$$

donc, si

$$\xi(t) \quad \supset \varphi_2(p),$$

on aura

$$\xi(x, t) \supset \xi(t - x),$$

d'où la formule

$$\int_0^t \xi(t - x) f(x)\,dx \supset \frac{\varphi_2(p)\,\varphi(p)}{p}.$$

2. Théorème. — *Si* $f_1(t) \supset \varphi_1[h(p)]$ *et* $f_2(t) \supset \varphi_2[h(p)]$, *on a*

$$\int_0^\infty \varphi_1[h(p)] f_2(p) \frac{dp}{p} = \int_0^\infty \varphi_2[h(p)] f_1(p) \frac{dp}{p},$$

$h(p)$ *étant une fonction continue de* p.

3. Extensions. — L'introduction, dans la définition fondamentale, d'intégrales généralisées permet des extensions souvent très intéressantes des règles ordinaires.

Par exemple, si l'on pose, avec Hardy (*Trans., Cambridge, Phil. Soc.*, t. XXI)

$$\mathcal{G}\int_a^\infty f(s)\,ds = \lim_{t \to 0} \int_a^\infty e^{-ts} f(s)\,ds,$$

on a, lorsque $\varphi(p) \subset f(t)$, les formules suivantes :

$$\mathcal{G}\int_0^\infty f(s)\,ds = \lim_{p \to 0} \left[\frac{\varphi(p)}{p}\right],$$

$$\mathcal{G}\int_0^\infty \frac{f(s)}{s}\,ds = \int_0^\infty \frac{\varphi(p)}{p}\,dp,$$

$$\mathcal{G}\int_t^\infty \frac{f(s)}{s}\,ds \supset \int_0^p \frac{\varphi(\varpi)}{\varpi}\,d\varpi.$$

Renvoyons également à un très remarquable article de M. Gilly (bibliographie, référence 1) sur l'utilisation, en calcul symbolique, des *parties finies* d'intégrales (au sens de J. Hadamard).

B. — FORMULES OPÉRATOIRES.

a. — Formules élémentaires.

$$f(t) \supset \varphi(p)$$

$$f(at) \supset \varphi\left(\frac{p}{a}\right)\cdot$$

$$f(t-a) \supset e^{-ap}\varphi(p) \qquad (t > a, \text{ et } a \text{ réel} > 0)$$

$$e^{at}f(bt) \supset \frac{p}{p-a}\varphi\left(\frac{p-a}{b}\right)$$

$$a^{t}f(bt) \supset \frac{p}{p-\log a}\varphi\left(\frac{p-\log a}{b}\right)$$

$$f(t-\log a) \supset a^{-p}\varphi(p) \qquad (a > 1)$$

$$f'(t) \supset p\varphi(p) \qquad \text{si} \quad f(0) = 0$$

$$f^{(n)}(t) \supset p^{n}\varphi(p) - \sum_{s=0}^{n-1} p^{n-s}f^{(s)}(0)$$

$$\supset p^{n}\varphi(p) \qquad \text{si} \quad f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$$

$$t^{n}f'(t) \supset (-1)^{n}p^{n}\varphi^{(n)}(p)$$

$$t^{n}f(t) \supset (-1)^{n}p\frac{d^{n}}{dp^{n}}\left[\frac{\varphi(p)}{p}\right]$$

$$\left(t\frac{d}{dt}\right)^{n}f(t) \supset (-1)^{n}\left(p\frac{d}{dp}\right)^{n}\varphi(p)$$

$$(-1)^{n}(t+1)^{n}f(t) \supset p\,e^{p}\frac{d^{n}}{dp^{n}}\left[\frac{e^{-p}\varphi(p)}{p}\right]$$

$$\frac{f(t)}{t^{n}} \supset p\int_{p}^{\infty}\cdots\int_{p}^{\infty}\frac{\varphi(p)}{p}(dp)^{n}$$

$$\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{n}f(t) \supset p\int_{p}^{\infty}p\int_{p}^{\infty}\cdots p\int_{p}^{\infty}\varphi(p)(dp)^{n}$$

$$\text{si} \quad \left[\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{s}f(t)\right]_{t=0} = 0$$

$$[s = 0, 1, \ldots, (n-1)]$$

$$\int_{0}^{t}\int_{0}^{t}\cdots\int_{0}^{t}f(t)(dt)^{n} \supset \frac{\varphi(p)}{p^{n}}$$

$$\int_{0}^{t}t\int_{0}^{t}\cdots t\int_{0}^{t}tf(t)(dt)^{n} \supset (-1)^{n}p\left(\frac{1}{p}\frac{d}{dp}\right)^{n}\frac{\varphi(p)}{p}$$

$$\int_0^t \frac{f(t)}{t}\,dt \supset \int_p^\infty \frac{\varphi(p)}{p}\,dp$$

$$\int_t^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt \supset \int_0^p \frac{\varphi(p)}{p}\,dp$$

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^\infty \frac{\varphi(p)}{p}\,dp$$

Si

$$f_1(t) \supset \varphi_1(p)$$
$$f_2(t) \supset \varphi_2(p),$$

on a

$$\int_0^t f_1(\lambda) f_2(t-\lambda)\,d\lambda = \int_0^t f_2(\lambda) f_1(t-\lambda)\,d\lambda$$

$$\supset \frac{\varphi_1(p)\,\varphi_2(p)}{p}$$

$$\int_0^t f_1(\lambda)\,\varphi_2(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda} \supset \int_0^\infty \varphi_1(\lambda) f_2(\lambda - p)\frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$\frac{1}{t} f_1(t)\,\varphi_2(t) \supset p\int_0^\infty \varphi_1(\lambda) f_2(\lambda - p)\frac{d\lambda}{\lambda}$$

b. — Transformations du premier groupe.

$$f(t^2) \supset \frac{p}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{p^2 x^2}{4}}\,\varphi\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$f(t^3) \supset -\frac{j^2 p^{\frac{3}{2}}}{3}\int_0^\infty \mathrm{H}^{(2)}_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2 i x p^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}}\right)\varphi\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$t^n f(t^\nu) \supset \frac{\nu p}{2^{n+1}\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{p^2 x^2}{4}}\ \mathrm{H}\,e_n\left(\frac{p x^{\frac{\nu}{2}}}{2}\right)\varphi(x^{-\nu})\, x^{\frac{\nu(n+1)}{2}-1}\, dx$$

(quel que soit $\nu \neq 0$)

$$\frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right) \supset 2p\int_0^\infty \mathrm{J}_0(x\sqrt{p})\,\varphi\left(\frac{x^2}{4}\right) dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}} f\left(\frac{1}{t}\right) \supset 2\sqrt{\frac{p}{\pi}}\int_0^\infty \sin(x\sqrt{p})\,\varphi\left(\frac{x^2}{4}\right) dx$$

$$t^\nu f\left(\frac{1}{t}\right) \supset p^{\frac{1-\nu}{2}}\int_0^\infty \mathrm{J}_{\nu+1}(2\sqrt{xp})\, x^{\frac{\nu-1}{2}}\,\varphi(x)\, dx$$

$$\frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t^n}\right) \supset np\int_0^\infty {}_0\mathrm{F}_n\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1 ; \frac{-px}{n^n}\right)\frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

$$f(e^t - 1) \supset \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^\infty e^{-x} x^{p-1}\,\varphi(x)\, dx$$

$$f(\operatorname{sh} t) \supset p \int_0^\infty J_p(x) \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

$$f(\operatorname{ch} t - 1) \supset p \int_0^\infty e^{-x} I_p(x) \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

$$2^k \operatorname{ch}^k t\, f(\operatorname{sh} t) \supset p \int_0^\infty J_p^k(x) \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

c. — Transformations du second groupe.

$$\varphi(p) \subset f(t)$$

$$\varphi(\sqrt{p}) \subset \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}} f(x)\, dx$$

$$p^n \varphi(\sqrt{p}) \subset \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}} f^{(2n)}(x)\, dx + \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} \sum_{s=0}^{n} (-1)^{n-s} \frac{(2n-2s)!}{(n-s)!} \frac{f^{(2s-1)}(0)}{t^{n-s}}$$

$$p^{n+\frac{1}{2}} \varphi(\sqrt{p}) \subset \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}} f^{(2n+1)}(x)\, dx + \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} \sum_{s=0}^{n} (-1)^{n-s} \frac{(2n-2s)!\, f^{(2s)}(0)}{(n-s)!\, t^{n-s}}$$

$$p^{\frac{n}{2}} \varphi(\sqrt{p}) \subset \frac{1}{\sqrt{\pi}\, 2^n\, t^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}} \mathrm{H}e_n\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) f(x)\, dx$$

$$\varphi(\sqrt[3]{p}) \subset \frac{-j^2}{2\sqrt{t}} \int_0^\infty \mathrm{H}_{\frac{1}{3}}^{(2)}\left(\frac{2ix^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3t}}\right) \sqrt{x} f(x)\, dx$$

$$\varphi(\sqrt[4]{p}) \subset -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2t}} \int_0^\infty \mathrm{H}_{-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}\left(\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4^{\frac{4}{3}} t^{\frac{1}{3}}}\right) f(x)\, dx$$

$$p^{1-\nu} \varphi\left(\frac{1}{p}\right) \subset t^{\frac{\nu}{2}} \int_0^\infty x^{-\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{xt}) f(x)\, dx, \qquad \mathrm{R}(\nu) > -1$$

$$\sqrt{\pi p}\, \varphi\left(\frac{1}{p}\right) \subset \int_0^\infty \sin(x\sqrt{t}) f\left(\frac{x^2}{4}\right) dx$$

$$\varphi\left(\frac{1}{p^2}\right) \subset \frac{t\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\infty J_{1, \frac{1}{2}}\left(3\sqrt[3]{\frac{t^2 x}{4}}\right) \frac{f(x)}{x}\, dx$$

$$\sqrt{\frac{p}{p+1}}\, \varphi(\sqrt{p+1}) \subset \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}} \left[f(x - \int_0^\infty y f(y) \frac{J_1(\sqrt{x^2-y^2})}{\sqrt{x^2-y^2}}\, dy \right] dx$$

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\,\varphi\left(\sqrt{p^2+1}\right) \subset f(t)-\int_0^t f\left(\sqrt{t^2-x^2}\right)\mathrm{J}_1(x)\,dx$$

$$\frac{p}{p^2+a^2}\,\varphi\left(\sqrt{p^2+a^2}\right) \subset \int_0^t \mathrm{J}_0\left(a\sqrt{t^2-x^2}\right)f(x)\,dx$$

$$\frac{\varphi\left(p+\frac{1}{p}\right)}{p+\frac{1}{p}} \subset \int_0^t \mathrm{J}_0\left[2\sqrt{x(t-x)}\right]f(x)\,dx$$

$$p^{\frac{1-\nu}{2}}\,\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) \subset \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}}x^{\frac{\nu}{2}}\,dx\int_0^\infty \mathrm{J}_\nu\left(2\sqrt{xy}\right)y^{-\frac{\nu}{2}}f(y)\,dy$$

$$p^{\frac{n-\nu-1}{2}}\,\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) \subset \frac{1}{\sqrt{\pi}\,2^n\,t^{\frac{n}{2}+1}}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}}\mathrm{H}e_n\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)dx$$

$$\times\int_0^\infty \mathrm{J}_\nu\left(2\sqrt{xy}\right)\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\nu}{2}}dy$$

$$\frac{\varphi(\log p)}{\log p} \subset \int_0^\infty \frac{t^x}{\Gamma(x+1)}f(x)\,dx$$

$$\frac{\varphi(\log p)}{\log^2 p} \subset \int_0^\infty \nu(t,x)f(x)\,dx$$

$$\frac{\varphi(\log p)}{\log^{m+1} p} \subset \frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^\infty \mu(t,m-1,x)f(x)\,dx \qquad (m>0)$$

$$\frac{\varphi(\log\log p)}{\log\log p} \subset \int_0^\infty \frac{\mu(t,x-1)}{\Gamma(x)}f(x)\,dx$$

$$\frac{\varphi(\log\log p)}{\log p\,\log\log p} \subset \int_0^\infty \frac{\mu(t,x)}{\Gamma(x+1)}f(x)\,dx$$

$$\frac{\varphi[\log(p^n\log^m p)]}{\log(p^n\log^m p)} \subset \int_0^\infty \frac{\mu(t,mx-1,nx)}{\Gamma(mx)}f(x)\,dx$$

$$\frac{\varphi^2(p)}{p} \subset \int_0^t f(\lambda)f(t-\lambda)\,d\lambda$$

d. — Transformations du troisième groupe.

$$\varphi(p) \subset f(t)$$

$$\varphi(t) \supset p\int_0^\infty \frac{f(x)\,dx}{(p+x)^2}$$

$$\frac{\cos t}{t}\,\varphi(t) \supset p\int_0^\infty \frac{p+x}{(p+x)^2+1}f(x)\,dx$$

$$\frac{\sin t}{t}\varphi(t) \supset p\int_0^\infty \frac{f(x)}{(p+x)^2+1}\,dx$$

$$\sqrt{t}\,\varphi\left(\frac{1}{t}\right) \supset \sqrt{\pi p}\int_0^\infty e^{-2\sqrt{px}} f(x)\,dx$$

$$\frac{\varphi(t^2)}{t^2} \supset \frac{p}{4}\sqrt{\pi}\int_0^\infty e^{\frac{p^2}{4x}}\operatorname{erfc}\frac{p}{2\sqrt{x}}\,\frac{f(x)}{x}\,dx$$

$$\frac{\varphi(-\log t)}{-\log t} \supset \int_0^\infty \frac{\Gamma(x+1)}{p^x} f(x)\,dx$$

$$\frac{\varphi[-\log(1-e^{-t})]}{-\log(1-e^{-t})} \supset p\int_0^\infty \mathrm{B}(p,\,x+1) f(x)\,dx.$$

e. — Séquences.

1. Si

$$f(t) \supset \varphi(p)$$

et

$$g(t) \supset f(p),$$

alors

$$\varphi(p) = p\int_0^\infty \frac{g(x)}{(p+x)^2}\,dx.$$

2. Si

$$f(t) \supset \varphi(p)$$

et

$$g(t) \supset \sqrt{p}\,f\left(\frac{1}{p}\right),$$

alors

$$\varphi(p^2) \subset \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,tg\left(\frac{t^2}{4}\right).$$

3. Si

$$f(t) \supset \varphi(p)$$

et

$$g(t) \supset \frac{1}{\sqrt{p}} f\left(\frac{1}{p}\right),$$

alors

$$\varphi(p) = p\sqrt{\pi}\int_0^\infty e^{-2\sqrt{px}}\,\frac{g(x)}{\sqrt{x}}\,dx.$$

4. Si

$$f(t) \supset \varphi(p)$$

et

$$g(t) \supset p^{-m} f(p) \qquad (m \text{ entier} > 0),$$

alors

$$\varphi(p) = (m+1)!\, p \int_0^\infty \frac{g(x)}{(p+x)^{m+2}}\, dx.$$

5. Si

$$f(t) \supset \varphi(p)$$

et

$$g(t) \supset p f(e^p - 1),$$

alors

$$\varphi(p) = -e^p \int_0^\infty \mathrm{P}(p, 1-x) p^x g(x)\, dx.$$

6. Si

$$f(t) \supset \varphi(p)$$

et

$$\frac{f(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \supset h(p),$$

alors

$$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\, h\left(\frac{1}{4t}\right) \supset \varphi(\sqrt{p})$$

7. Si

$$f(t) \supset \varphi(p)$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\, \varphi\left(\frac{1}{t}\right) \supset h(p),$$

alors

$$f(t^2) \supset \frac{2}{p\sqrt{\pi}}\, h\left(\frac{p^2}{4}\right)$$

8. Si

$$f(t) \supset \varphi(p)$$
$$g(t) \supset \psi(p) f[u(p)]$$

et

$$e^{-ku(t)} \frac{t\, u'(t)}{\psi(t)} \supset h(p, k)$$

(u, fonction quelconque telle que $u(0) = 0$ et $u(\infty) = \infty$, ψ fonction quelconque, K constante), alors

$$\varphi(p) = p \int_0^\infty h(x, p) \frac{g(x)}{x}\, dx.$$

9. Si

$$f(t) \supset \varphi(p)$$

et

$$g(x, t) \supset p^{\nu} e^{-xp^{\mu}},$$

alors

$$p^{\nu-\mu} \varphi(p^{\mu}) \subset \int_0^{\infty} g(x, t) f(x)\, dx.$$

10. Si

$$f(t) \supset \varphi(p)$$

et

$$g(x, t) \supset \psi(p)\, h(p)\, e^{-xh(p)},$$

où $\psi(p)$, $h(p)$ sont des fonctions continues de p, indépendantes de x, avec $R[h(p)] > 0$ et x réel $\geqq 0$, alors

$$\psi(p)\, \varphi[h(p)] \subset \int_0^{\infty} g(x, t) f(x)\, dx.$$

11. Si

$$f(a\sqrt{t^2 - b^2}) + c \supset \varphi(p),$$

alors

$$f(a\sqrt{t^2 - b^2}) \supset \varphi(p) - c\, e^{-bp} \qquad (t > b).$$

12. Si

$$\begin{aligned} \varphi(p) &\subset f(t) && \text{pour } t < 1, \\ &\subset 0 && \text{pour } t > 1, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} -e^{-p} \varphi(-p) &\subset f(1 - t) && \text{pour } t < 1, \\ &\subset 0 && \text{pour } t > 1. \end{aligned}$$

13. Si

$$\varphi(p) \subset f(t) \qquad (0 < t < \infty)$$

et

$$g(p) \subset f(t + 1),$$

alors

$$\begin{aligned} g(-p) - e^{-p} \varphi(-p) &\subset f(1 - t) && \text{pour } t < 1, \\ &\subset 0 && \text{pour } t > 1. \end{aligned}$$

Il est presque inutile de faire remarquer que toutes les intégrales ci-dessus et ci-après, introduisant des limites infinies, ne peuvent être utilisées que si elles sont convergentes.

f. — Formules pour l'intégration des équations linéaires.

$$
\begin{array}{ll}
y(t) & \supset \varphi(p) \\
y' & \supset p\,\varphi(p) - p\,y(0) \\
y'' & \supset p^2\varphi(p) - p^2 y(0) - p\,y'(0) \\
y''' & \supset p^3\varphi(p) - p^3 y(0) - p^2 y'(0) - p\,y''(0) \\
ty & \supset -\varphi'(p) + \dfrac{\varphi(p)}{p} \\
ty' & \supset -p\,\varphi'(p) \\
ty'' & \supset -\ p^2\varphi'(p) - p\ \ \varphi(p) + p\,y(0) \\
ty''' & \supset -2p^2\varphi(p) - p^3\varphi'(p) + 2p^2 y(0) + p\,y'(0) \\
t^2 y & \supset \varphi''(p) - \dfrac{2\varphi'(p)}{p} + \dfrac{2\varphi(p)}{p^2} \\
t^2 y' & \supset \ p\,\varphi''(p) \\
t^2 y'' & \supset 2p\,\varphi'(p) + p^2\varphi''(p) \\
t^2 y''' & \supset 2p\,\varphi(p) + 4p^2\varphi'(p) + p^3\varphi''(p) - 2p\,y(0) \\
t^3 y & \supset -\varphi'''(p) + \dfrac{3\varphi''(p)}{p} - \dfrac{6\varphi'(p)}{p^2} + \dfrac{6\varphi(p)}{p^3}.
\end{array}
$$

g. — Original d'un déterminant.

Si l'on a

$$a_{ij}(p) \subset A_{ij}(t),$$

alors

$$
\frac{1}{p^{n-1}}
\begin{vmatrix}
a_{11}(p) & a_{12}(p) & \ldots & a_{1n}(p) \\
a_{21}(p) & \ldots\ldots & \ldots & a_{2n}(p) \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
a_{n1}(p) & \ldots\ldots & \ldots & a_{nn}(p)
\end{vmatrix}
$$

$$
\subset \int_0^t d\lambda_{n-1} \int_0^{\lambda_{n-1}} d\lambda_{n-2} \ldots \int_0^{\lambda_2} d\lambda_1
$$

$$
\times
\begin{vmatrix}
A_{11}\ (\lambda_1) & \ldots & A_{1n}\ (\lambda_1) \\
A_{21}\ (\lambda_2 - \lambda_1) & \ldots & A_{2n}\ (\lambda_2 - \lambda_1) \\
A_{31}\ (\lambda_3 - \lambda_2) & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\
A_{n-1,1}(\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}) & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\
A_{n1}(t - \lambda_{n-1}) & \ldots & A_{nn}(t - \lambda_{n-1})
\end{vmatrix}.
$$

C. — DICTIONNAIRE D'IMAGES.

1. — Fonctions algébriques.

$$\frac{1}{(1+t)^2} \supset p + p^2 e^p \operatorname{E}i(-p)$$

$$\frac{-2\,!}{(1+t)^3} \supset -p + p^2 + p^3 e^p \operatorname{E}i(-p)$$

$$\frac{(-1)^n \Gamma(n)}{(1+t)^n} \supset p^{n-1} - 1\,!\,p^{n-2} + 2\,!\,p^{n-3} - \ldots \pm (n-2)\,!\,p + p^n e^p \operatorname{E}i(-p)$$

$$\frac{t^n}{(1+t)^m} \supset p[\mathrm{S}(m-n, p) - \mathrm{C}_n^1 \mathrm{S}(m-n+1, p) + \mathrm{C}_n^2 \mathrm{S}(m-n+2, p) - \ldots] \quad (n \text{ entier} \geqq 0)$$

$$\frac{t^\nu}{1+t} \supset \Gamma(\nu+1) p^{1-\nu} \mathrm{S}(\nu+1, p) \qquad (\nu > -1)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{1}{(1-t)^\nu} & (t < 1) \\ 0 & (t > 1) \end{array}\right\} \supset p\,\Sigma(\nu, p) \qquad (\nu < 1)$$

$$\left.\begin{array}{ll} t^{\nu-1} & (t < 1) \\ 0 & (t > 1) \end{array}\right\} \supset \frac{\mathrm{P}(p, \nu)}{p^{\nu-1}}$$

$$\frac{1}{t^\nu (1+t)} \supset \Gamma(1-\nu)\, p\, e^p \mathrm{Q}(p, \nu) \qquad (\nu < 1)$$

$$(1+t)^\nu \supset \frac{e^p}{p} \mathrm{Q}(p, \nu+1)$$

$$\frac{t^j}{t^n + 1} \supset -p \mathrm{A}(p, j, n)$$

$$\frac{1}{a+t} \supset -p\, e^{ap} \operatorname{E}i(-ap) \qquad (a > 0)$$

$$\frac{1}{(1+t)\sqrt{t}} \supset \pi p\, e^p \operatorname{erfc} \sqrt{p}$$

$$\frac{\sqrt{t}}{1+t} \supset \sqrt{\pi p} - \pi p\, e^p \operatorname{erfc} \sqrt{p}$$

$$\sqrt{1+t} \supset 1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}} e^p \operatorname{erfc} \sqrt{p}$$

$$\left.\begin{matrix}\sqrt{1-t} & (t<1)\\ 0 & (t>1)\end{matrix}\right\} \supset 1-\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}\,e^{-p}\,erg\,\sqrt{p}$$

$$\frac{1}{\sqrt{t+1}} \supset \sqrt{\pi p}\,e^{p}\,erf\,\sqrt{p}$$

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{1}{\sqrt{1-t}} & (t<1)\\ 0 & (t>1)\end{matrix}\right\} \supset \sqrt{\pi p}\,e^{-p}\,erg\,\sqrt{p}$$

$$\frac{1}{t\sqrt{t-1}} \supset \pi p\,erfc\,\sqrt{p} \qquad (t>1)$$

$$\frac{\sqrt{t-1}}{t} \supset \sqrt{\pi p}\,e^{-p}-\pi\sqrt{p}\,erfc\,\sqrt{p}$$

$$\frac{1}{(1+t)\sqrt{1+t}} \supset 2p-2\sqrt{\pi p}\,e^{p}\,p\,erfc\,\sqrt{p}$$

$$(t^2-a^2)^{-\frac{1}{4}} \supset \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\pi}}(2a)^{\frac{1}{4}}p^{\frac{3}{4}}K_{\frac{1}{4}}(ap) \qquad (t>a)$$

$$(t^2-a^2)^{-\frac{3}{4}} \supset \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\pi}}(2a)^{-\frac{1}{4}}p^{\frac{5}{4}}K_{\frac{1}{4}}(ap) \qquad (t>a)$$

$$(1+t^2)^{\nu} \supset \frac{2^{\nu-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+\frac{1}{2}}}\left[\mathbf{H}_{\nu+\frac{1}{2}}(p)-Y_{\nu+\frac{1}{2}}(p)\right]$$

$$\frac{1}{t+\sqrt{t^2+a^2}} \supset \frac{\pi}{2a}[\mathbf{H}_1(ap)-Y_1(ap)]-\frac{1}{a^2p} \qquad (a>0)$$

$$\frac{t^{\nu-1}}{1+t^2} \supset p\,G_{\nu}(p)$$

$$\frac{(t+\sqrt{t^2-1})^{\nu}+(t+\sqrt{t^2-1})^{-\nu}}{\sqrt{t^2-1}} \supset 2pK_{\nu}(p) \qquad (t>1)$$

$$\frac{t^{\frac{\nu-1}{2}}}{(1+t)^{\frac{\nu}{2}+1}} \supset 2^{\frac{\nu+1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)p\,e^{\frac{p}{2}}D_{-(\nu+1)}(\sqrt{2p})$$

$$\frac{t^{\frac{\nu}{2}}}{(1+t)^{\frac{\nu+1}{2}}} \supset 2^{\frac{\nu+1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)\sqrt{p}\,e^{\frac{p}{2}}D_{-(\nu+1)}(\sqrt{2p})$$

$$e^{-\sqrt{t}}\,t^{\frac{\nu}{2}} \supset \frac{\Gamma(\nu+2)}{(2p)^{\frac{\nu}{2}}}\,e^{\frac{p}{8}}D_{-(\nu+2)}\left(\frac{1}{\sqrt{2p}}\right)$$

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{(\sqrt{t}-1)^{\nu}}{\Gamma(1+\nu)} & (t>1)\\ 0 & (t<1)\end{array}\right\} \supset (2p)^{-\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{p}{2}} D_{-\nu}(\sqrt{2p}) \qquad (\nu>-1).$$

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{(\sqrt{t}-1)^{\nu}}{\Gamma(1+\nu)\sqrt{t}} & (t>1)\\ 0 & (t<1)\end{array}\right\} \supset (2p)^{\frac{1-\nu}{2}} e^{-\frac{p}{2}} D_{-(\nu+1)}(\sqrt{2p})$$

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{1}{t^{\nu}} & (t>1)\\ 0 & (t<1)\end{array}\right\} \supset p\, e^{-p} S(\nu, p)$$

$$t^{\nu-\mu-\frac{1}{2}}(1+t)^{\nu+\mu-\frac{1}{2}} \supset \Gamma\left(\nu-\mu+\frac{1}{2}\right) p^{\frac{1}{2}-\nu} W_{\mu,\nu}(p)\, e^{\frac{p}{2}}$$

$$\left(\mu<\nu+\frac{1}{2}\right)$$

$$(1+t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \supset 2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) p^{1-\nu}[\mathbf{H}_{\nu}(p)-\mathbf{Y}_{\nu}(p)]$$

2. — Exponentielles et logarithmes.

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{a-b}\left(\frac{e^{at}}{a}-\frac{e^{bt}}{b}\right) \supset \frac{1}{(p-a)(p-b)}$$

$$\frac{(1-e^{-at})^2}{t^2} \supset p^2\log\left[1-\frac{a^2}{(p+a)^2}\right] + 2ap\log\left[1+\frac{a}{p+a}\right]$$

$$\frac{1-e^{-at}}{t(1+e^{-t})} \supset p\log\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+a+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+a}{2}\right)}$$

$$t\,e^{-t^2} \supset \frac{1}{2}\left(p-\frac{\sqrt{\pi}}{2}p^2\,e^{\frac{p^2}{4}}\,erfc\,\frac{p}{2}\right)$$

$$\frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}} \supset \frac{1}{2}p^{\frac{3}{2}}\,e^{\frac{p^2}{8}}\,\mathrm{K}_{\frac{1}{4}}\left(\frac{p^2}{8}\right)$$

$$\frac{\sqrt{t}}{e^{-\frac{1}{t}}-1} \supset \sqrt{\pi p}\,(e^{-2\sqrt{p}}-1)$$

$$e^{-\frac{a^2}{4t}}t^{-\frac{3}{2}} \supset \frac{2}{a}\sqrt{\pi}\,p\,e^{-a\sqrt{p}}$$

$$e^{-\sqrt{t}} \supset 1-\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\frac{e^{\frac{1}{4p}}}{2}\,erfc\,\frac{1}{2\sqrt{p}}$$

$$\frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} \supset \sqrt{\pi p}\,e^{\frac{1}{4p}}\,erfc\,\frac{1}{2\sqrt{p}}$$

$$\frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} \supset \sqrt{\pi p}\,e^{\frac{1}{4p}}\left[1+erf\,\frac{1}{2\sqrt{p}}\right]$$

$$\frac{e^{\frac{1}{t^2}}}{\sqrt{t}} \supset \sqrt{\pi p}\;{}_0\mathrm{F}_2\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4};\frac{p^2}{4}\right)$$

$$\frac{e^{t^{-m}}}{\sqrt{t}} \supset \sqrt{\pi p}\;{}_0\mathrm{F}_m\left(\frac{1}{2m},\frac{3}{2m},\ldots,\frac{2m-1}{2m};\;(-1)^m\frac{p^m}{m^m}\right)$$

$$e^{-a e^{-t}} \supset p\,a^{-p}\,\mathrm{P}(a,p)$$

$$e^{-e^{-t}}-e^{-a} \supset \mathrm{P}(a,p+1) \qquad (a<1)$$

$$\left.\begin{array}{ll}\log t & (t>1)\\ 0 & (t<1)\end{array}\right\} \supset -\mathrm{E}i(-p)$$

$$\log(1+t) \supset -e^{p}\,\mathrm{E}i(-p)$$

$$\log\frac{a}{a-t} \supset e^{-ap}\,\mathrm{E}i(ap) \qquad (a \text{ non réel positif})$$

$$\begin{aligned}\log(t^2-1) \supset & -[e^{p}\,\mathrm{E}i(-p)+e^{-p}\,\mathrm{E}_i^{*}(p)]\\ & = -2[\mathrm{ch}\,p\,\mathrm{chi}(p)+\mathrm{sh}\,p\,\mathrm{shi}(p)]\\ & \qquad (t>1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log(t^4-1) \supset & -[e^{p}\,\mathrm{E}i(-p)+e^{-p}\,\mathrm{E}i(p)]\\ & +2[\cos p\; ci\,p+\sin p\; si\,p]\\ & \qquad (t>1)\end{aligned}$$

$$\log^3 t \supset -(\log p+\gamma)^3-\frac{\pi^2}{2}(\log p+\gamma)+\Psi'''(1)$$

$$\log\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) \supset \frac{1}{2}\pi[\mathbf{H}_0(p)-\mathrm{Y}_0(p)]$$

$$\log\left(\sqrt{t}+\sqrt{t+1}\right) \supset \frac{1}{2}e^{\frac{p}{2}}\,\mathrm{K}_0\left(\frac{p}{2}\right)$$

$$\log\frac{1+2\sqrt{t}+t}{1-2\sqrt{t}+t} \supset 2\pi\,e^{-p}\,erg\sqrt{p}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{2}{\sqrt{\pi t}}\log\left(\sqrt{t}+\sqrt{t-1}\right) & (t>1)\\ 0 & (t<1)\end{array}\right\} \supset -\sqrt{p}\,\mathrm{E}i(-p)$$

$$\left.\begin{array}{ll}\log\left(t+\sqrt{t^2-1}\right) & (t>1)\\ 0 & (t<1)\end{array}\right\} \supset \mathrm{K}_0(p)$$

$$\frac{1}{\pi^2+\log^2 t} \supset p[\nu'(p)-e^{p}]$$

$$\log^2(e^{t}-1) \supset [\Psi'(p)+\gamma]^2+\Psi''(p)+\frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{1}{n}\log(1+t^{n}) \supset -\mathrm{A}(p,\,n-1,\,n)$$

$$\left.\begin{array}{ll}t^{\nu-1}\log^{m} t & (t>1)\\ 0 & (t<1)\end{array}\right\} \supset \frac{\partial^{m}[p^{1-\nu}\mathrm{Q}(p,\nu)]}{\partial\nu^{m}} \qquad (m,\,\nu>0)$$

$$t^{\nu}\log^2 t \supset \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu}}\left\{[\Psi(\nu+1)-\log p]^2+\zeta(2,\nu)\right\},\qquad \mathrm{R}(\nu)>-1$$

$$\begin{aligned}t^{\nu}\log^3 t \supset & \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu}}\Big\{[\Psi(\nu+1)-\log p]^3\\ & +[2\Psi(\nu+1)-3\log p]\zeta(2,\nu)-2\zeta(3,\nu)\Big\},\qquad \mathrm{R}(\nu)>-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{t^{n}}{\Gamma(n+1)}&\left\{\left[\log t-\frac{1}{2}\Psi(n+1)\right]^2-\frac{1}{2}\Psi'(n+1)\right\}\\ &\supset \frac{1}{p^{n}}\left\{\left[\log p-\frac{1}{2}\Psi(n+1)\right]^2+\frac{1}{2}\Psi'(n+1)\right\}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{t(\pi^2+\log^2 t)} \supset p[e^p - \nu(p)]$$

$$\frac{t^a - t^b}{\log t} \supset \lambda(p, a) - \lambda(p, b)$$

$$\frac{t^a - 1}{\log t} \supset \lambda(p, a)$$

$$\frac{t+1}{\pi^2+\log^2 t} \supset p[\nu'(p) - \nu''(p)]$$

$$(e^t - 1)^\nu \log(e^t - 1) \supset \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(p)}[\Psi(\nu+1)\Gamma(p-\nu) - \Gamma'(p-\nu)]$$

$$\frac{1}{2}\log\frac{t+1}{t-1} \supset \operatorname{ch} p \operatorname{shi}(p) - \operatorname{sh} p \operatorname{chi}(p)$$

3. — **Fonctions circulaires.**

$$\sin at - at\cos at \supset \frac{a^3 p}{(p^2+a^2)^2}$$

$$\sin^3 t \supset \frac{6p}{(p^2+1)(p^2+9)}$$

$$\cos^3 t \supset \frac{p^2(p^2+7)}{(p^2+1)(p^2+9)}$$

$$\frac{\cos bt - \cos at}{t} \supset \frac{p}{2}\log\frac{p^2+a^2}{p^2+b^2}$$

$$\frac{\sin bt - \sin at}{t} \supset p\,\mathrm{arctg}\frac{(b-a)p}{p^2+2ab}$$

$$\frac{\sin at\cos bt}{t} \supset \frac{p}{2}\mathrm{arctg}\frac{2ap}{p^2-a^2+b^2}$$

$$\frac{\sin at\sin bt}{t} \supset \frac{p}{4}\log\frac{p^2+(a+b)^2}{p^2+(a-b)^2}$$

$$\frac{\sin^2 t}{t^2} \supset p\,\mathrm{arctg}\frac{2}{p} - \frac{p^2}{4}\log\left(1+\frac{4}{p^2}\right)$$

$$\frac{\sin^3 t}{t} \supset \frac{p}{4}\left[2\,\mathrm{arctg}\frac{1}{p} - \mathrm{arctg}\frac{2p}{p^2+3}\right]$$

$$\frac{\sin^4 t}{t} \supset \frac{p}{16}\big[\,4\log(p^2+4) - \log(p^2+16) - 6\log p\,\big]$$

$$\sin t^2 \supset -\frac{p}{2\sqrt{\pi}}\,\mathrm{A}\left(\frac{p^2}{4},\ \frac{1}{2},\ 2\right)$$

$$\cos t^2 \supset -\frac{p}{2\sqrt{\pi}}\,\mathrm{A}\left(\frac{p^2}{4},\ -\frac{1}{2},\ 2\right)$$

$$\cos\sqrt{t} \supset 1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,e^{-\frac{1}{4p}}\,erg\,\frac{1}{2\sqrt{p}}$$

$$\frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}} \supset \sqrt{\pi p}\,e^{-\frac{1}{4p}}\,erg\,\frac{1}{2\sqrt{p}}$$

$$\sin\frac{1}{t} \supset 2p\frac{d}{dp}\,kei(2\sqrt{p})$$

$$\cos\frac{1}{t} \supset -2p\frac{d}{dp}\,ker(2\sqrt{p})$$

$$\frac{1}{t}\sin\frac{1}{t} \supset -2p\,kei(2\sqrt{p})$$

$$\frac{1}{t}\cos\frac{1}{t} \supset 2p\,ker(2\sqrt{p})$$

$$t^{-\nu-1}\cos\left(\frac{\nu\pi}{2}-\frac{1}{t}\right) \supset 2p^{\frac{\nu+1}{2}}\, ker_\nu(2\sqrt{p})$$

$$t^{-\nu-1}\sin\left(\frac{\nu\pi}{2}-\frac{1}{t}\right) \supset 2p^{\frac{\nu+1}{2}}\, kei_\nu(2\sqrt{p})$$

$$e^{-at}+e^{\frac{at}{2}}\left(\sqrt{3}\,\frac{\sin a\sqrt{3}t}{2}-\cos\frac{a\sqrt{3}t}{2}\right) \supset \frac{3a^2p}{p^3+a^3}$$

$$-e^{-at}+e^{\frac{at}{2}}\left(\sqrt{3}\,\frac{\sin a\sqrt{3}t}{2}+\cos\frac{a\sqrt{3}t}{2}\right) \supset \frac{3ap^2}{p^3+a^3}$$

$$e^{-at}+2e^{\frac{at}{2}}\cos\frac{a\sqrt{3}t}{2} \supset \frac{3p^3}{p^3+a^3}$$

$$\sin t \log t \supset \frac{p^2\operatorname{arctg}\frac{1}{p}-\gamma p}{p^2+1} - \frac{p}{2(p^2+1)}\log(p^2+1)$$

$$\cos t \log t \supset \frac{-p\operatorname{arctg}\frac{1}{p}-\gamma p^2}{p^2+1} - \frac{p^2}{2(p^2+1)}\log(p^2+1)$$

$$\sin y \supset \frac{bp}{q}\,K_1(bq) \qquad (t>b)$$

$$\operatorname{arc\,cos} t \supset \frac{\pi}{2}[1-I_0(p)+\mathbf{L}_0(p)] \qquad (t\neq 1)$$

$$t\operatorname{arctg} t \supset \frac{1}{p}\,[\sin p\, cip-\cos p\, sip] - [\cos p\, cip+\sin p\, sip]$$

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{t} \supset \frac{\pi}{2}-\sin p\, cip+\cos p\, sip$$

$$\operatorname{arc\,cos}\frac{a}{t} \supset \frac{\pi}{2}(1-e^{-ap})+a\int_0^\infty K_0(ap)\,dp$$

$$\operatorname{arctg}\sqrt{t}=\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{\sqrt{t+1}} \supset \frac{\pi}{2}\,e^p\, erfc\sqrt{p}$$

$$\left.\begin{matrix}\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{\sqrt{t}} & (t>1)\\ 1 & (t<1)\end{matrix}\right\} \supset erf\sqrt{p}$$

$$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2t}}{1-t} \supset \frac{1}{\sqrt{2}}\left[G_{\frac{1}{2}}(p)+G_{\frac{3}{2}}(p)\right]$$

$$\operatorname{arctg} t^m \supset -m\,A(p,\, m-1,\, 2m)$$

$$\frac{\log(1+t^2)+t\,\mathrm{arctg}\,t}{t^2+4} \supset p(\cos p\,\mathrm{ci}\,p+\sin p\,\mathrm{si}\,p) \times(\cos p\,\mathrm{si}\,p-\sin p\,\mathrm{ci}\,p)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\cos\sqrt{1-(t-1)^2}}{\sqrt{1-(t-1)^2}} & (0<t<2) \\ 0 & (2<t<\infty) \end{array}\right\} \supset \pi p\, e^{-p} J_0\left(\sqrt{1-p^2}\right)$$

$$|\cos t| \supset \frac{p}{p^2+1}\left(1+\frac{2e^{-\frac{\pi p}{2}}}{1-e^{\pi p}}\right) \qquad (t>0)$$

Si l'on a

$$h(t) \supset p\,\varphi(p),$$

alors

$$h(t)\cos\nu t \supset \quad p\,\mathcal{R}\,\varphi(p+\nu i),$$
$$h(t)\sin\nu t \supset -p\,\mathcal{J}\,\varphi(p+\nu i),$$

$\mathcal{R}$ et $\mathcal{J}$ signifiant les parties réelle et imaginaire de $\varphi(p+\nu i)$.

4. — Fonctions hyperboliques.

$$\mathrm{sh}^{\nu} t \supset \frac{p}{2^{\nu+1}} \mathrm{B}\left(\frac{p-\nu}{2}, \nu+1\right)$$

$$\mathrm{ch}\, at \sin at - \mathrm{sh}\, at \cos at \supset \frac{4a^3 p}{p^4+4a^4}$$

$$\mathrm{ch}\, at \sin at - \mathrm{sh}\, at \cos at \supset \frac{2ap^3}{p^4+4a^4}$$

$$\mathrm{sh}\, at \sin at \supset \frac{2a^2 p^2}{p^4+4a^4}$$

$$\mathrm{ch}\, at \cos at \supset \frac{p^4}{p^4+4a^4}$$

$$\mathrm{sh}\, at - \sin at \supset \frac{2a^3 p}{p^4-a^4}$$

$$\mathrm{ch}\, at - \cos at \supset \frac{2a^2 p^2}{p^4-a^4}$$

$$\mathrm{sh}\, at - \sin at \supset \frac{2ap^3}{p^4-a^4}$$

$$\mathrm{ch}\, at + \cos at \supset \frac{2p^4}{p^4-a^4}$$

$$\mathrm{ch}\, at - 1 \supset \frac{a^2}{p^2-a^2}$$

$$\mathrm{ch}\sqrt{t} \supset \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{\frac{1}{4p}}\, erf\, \frac{1}{2\sqrt{p}} + 1$$

$$\frac{\mathrm{sh}\sqrt{t}}{\sqrt{t}} \supset \sqrt{\pi p}\, e^{\frac{1}{4p}}\, erf\, \frac{1}{2\sqrt{p}}$$

$$\sqrt{t}\, \mathrm{ch}\, 2\sqrt{t} \supset \sqrt{\frac{\pi}{p^3}}\, e^{\frac{1}{p}} \left(\frac{p}{2}+1\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\, \mathrm{ch}\, \frac{2}{\sqrt{t}} \supset \pi\sqrt{\pi}\, p^{\frac{5}{6}}\, \mathrm{J}_{-\frac{1}{3},\, -\frac{1}{2}}\left(3\sqrt[3]{p}\right)$$

$$\frac{\mathrm{sh}^2\sqrt{t}}{\sqrt{t}} \supset \frac{\sqrt{\pi p}}{2}\left(e^{\frac{1}{p}} - 1\right)$$

$$\frac{\mathrm{ch}^2\sqrt{t}}{\sqrt{t}} \supset \frac{\sqrt{\pi p}}{2}\left(e^{\frac{1}{p}} + 1\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\, t - 1}} \supset p\sqrt{2}\, \mathrm{Q}_{p-\frac{1}{2}}(1)$$

$$\frac{\operatorname{sh}\sqrt{2t}\,\sin\sqrt{2t}}{\sqrt{t}} \supset \sqrt{\pi p}\,\sin\frac{1}{p}$$

$$\frac{\operatorname{ch}\sqrt{2t}\,\cos\sqrt{2t}}{\sqrt{t}} \supset \sqrt{\pi p}\,\cos\frac{1}{p}$$

$$\operatorname{ch}\sqrt{2t}\,\sin\sqrt{2t} \supset \sqrt{\frac{\pi}{2p}}\left[\cos\frac{1}{p}+\sin\frac{1}{p}\right]$$

$$\operatorname{sh}\sqrt{2t}\,\cos\sqrt{2t} \supset \sqrt{\frac{\pi}{2p}}\left[\cos\frac{1}{p}-\sin\frac{1}{p}\right]$$

$$\frac{\operatorname{ch}2\sqrt{t}\,\sin 2\sqrt{t}}{t^{\frac{3}{4}}} \supset 2^{\frac{1}{4}}\pi\sqrt{p}\,J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{p}\right)\cos\left(\frac{1}{p}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{\operatorname{sh}2\sqrt{t}\,\cos 2\sqrt{t}}{t^{\frac{3}{4}}} \supset -2^{\frac{1}{4}}\pi\sqrt{p}\,J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{p}\right)\sin\left(\frac{1}{p}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{\operatorname{sh}2\sqrt{t}\,\sin 2\sqrt{t}}{t^{\frac{3}{4}}} \supset 2^{\frac{1}{4}}\pi\sqrt{p}\,J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{p}\right)\cos\left(\frac{1}{p}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{\operatorname{ch}2\sqrt{t}\,\cos 2\sqrt{t}}{t^{\frac{3}{4}}} \supset 2^{\frac{1}{4}}\pi\sqrt{p}\,J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{p}\right)\sin\left(\frac{1}{p}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{t}\,\operatorname{ch}\sqrt{2t}\,\cos\sqrt{2t} \supset \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\left(\cos\frac{1}{p}-\frac{2}{p}\sin\frac{1}{p}\right)$$

$$\sqrt{t}\,\operatorname{sh}\sqrt{2t}\,\sin\sqrt{2t} \supset \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\left(\sin\frac{1}{p}+\frac{2}{p}\cos\frac{1}{p}\right)$$

$$\operatorname{ch}\sqrt{2t}\,\sin\sqrt{2t} \pm \operatorname{sh}\sqrt{2t}\,\cos\sqrt{2t} \supset \sqrt{\frac{2\pi}{p}}\,\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\frac{1}{p}$$

$$\frac{\operatorname{ch}2\sqrt{t}\,\sin 2\sqrt{t} \pm \operatorname{sh}2\sqrt{t}\,\cos 2\sqrt{t}}{t^{\frac{3}{4}}} \supset 2^{\frac{3}{4}}\pi\sqrt{p}\,J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{p}\right)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\frac{1}{p}$$

$$\frac{\operatorname{ch}2\sqrt{t}\,\cos 2\sqrt{t} \pm \operatorname{sh}2\sqrt{t}\,\sin 2\sqrt{t}}{t^{\frac{3}{4}}} \supset 2^{\frac{3}{4}}\pi\sqrt{p}\,J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{p}\right)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\frac{1}{p}$$

$$e^{-\frac{\nu t}{2}}\operatorname{sh}^{\nu}\frac{t}{2} \supset \frac{\nu}{2^{\nu}}B(p+1,\nu)$$

$$2\operatorname{sh}\frac{mt}{2}\operatorname{sh}^{m}\frac{t}{2} \supset \frac{\Gamma(m+1)}{2^{m}}\,\frac{\left\{\begin{matrix}(p+1)(p+2)\dots(p+m)\\ -(p-1)(p-2)\dots(p-m)\end{matrix}\right\}}{(p^2-1^2)(p^2-2^2)\dots(p^2-m^2)}$$

$$\frac{t^{\nu}}{\operatorname{sh}t} \supset \frac{\Gamma(\nu+1)}{2^{\nu}}\,p\,\zeta\left[\nu+1,\frac{p+1}{2}\right], \qquad R(\nu)>0$$

$$\frac{t^{\nu}}{\operatorname{th}t} \supset \Gamma(\nu+1)\left[\frac{p}{2^{\nu}}\zeta\left(\nu+1,\frac{p}{2}\right)-\frac{1}{p^{\nu}}\right] \qquad R(\nu)>0$$

$$\frac{1}{t}-\operatorname{cth}t \supset p\left[\Psi\left(\frac{p}{2}\right)-\log\frac{p}{2}+1\right]$$

$$\log \frac{\operatorname{sh} t}{t} \supset \log \frac{p}{2} - \Psi\left(\frac{p}{2}\right) - \frac{1}{2p}$$

$$\log \operatorname{ch} t \supset \Psi\left(\frac{p}{2}\right) - \Psi\left(\frac{p}{4}\right) - \log 2 - \frac{1}{p}$$

$$\log^2 \operatorname{sh} t \supset \left[\Psi\left(\frac{p}{2}\right) + \frac{1}{p} + \gamma + \log 2\right]^2 + \frac{1}{p^2} + \frac{\pi^2}{6}$$

$$\operatorname{sh} y \supset \frac{b}{u} K_1(bu) \qquad (t > b)$$

Si l'on a

$$h(t) \supset p\varphi(p),$$

alors

$$h(t) \operatorname{ch} \nu t \supset \frac{p}{2}[\varphi(p+\nu) + \varphi(p-\nu)]$$

$$h(t) \operatorname{sh} \nu t \supset \frac{p}{2}[\varphi(p-\nu) - \varphi(p+\nu)].$$

5. — Logarithme intégral et fonctions associées.

$$\mathrm{E}i(-\alpha t) \supset -\log\frac{p+\alpha}{\alpha}$$

(si α n'est pas un nombre négatif réel)

$$\mathrm{E}i^*(\beta t) \supset -\log\frac{p-\beta}{\beta} \qquad (\beta \text{ réel positif})$$

$$t\mathrm{E}i(-t) \supset \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p}\log(p+1)$$

$$\frac{\mathrm{E}i(-t)}{\sqrt{t}} \supset -2\sqrt{\pi p}\log(\sqrt{p}+\sqrt{p+1})$$

$$\mathrm{E}i\left(-\frac{1}{4t}\right) \supset -2\mathrm{K}_0(\sqrt{p})$$

$$\mathrm{E}i^*\left(\frac{a^2}{4t}\right) \supset 2\mathrm{K}_0(a\sqrt{p})$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\mathrm{E}i\left(-\frac{1}{4t}\right) \supset \sqrt{p}\,\mathrm{E}i(-\sqrt{p})$$

$$\frac{e^{\frac{1}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}\mathrm{E}i\left(-\frac{1}{4t}\right) \supset \sqrt{p}\left[\cos\sqrt{p}\,ci\sqrt{p} - \sin\sqrt{p}\,si\sqrt{p}\right]$$

$$\frac{e^{\frac{1}{4t}}}{4t\sqrt{\pi t}}\mathrm{E}i\left(-\frac{1}{4t}\right) \supset p\left[\cos\sqrt{p}\,si\sqrt{p} - \sin\sqrt{p}\,ci\sqrt{p}\right]$$

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{E}i(-a) - \mathrm{E}i(-e^{-t}) & (t > -\log a) \\ 0 & (t < -\log a) \end{matrix}\right\} \supset \mathrm{P}(a, p) \qquad (a < 1)$$

$$si\sqrt{t} \supset \frac{\pi}{2}\,erfc\,\frac{1}{2\sqrt{p}}$$

$$\frac{ci\sqrt{t}}{\sqrt{t}} \supset \frac{\sqrt{\pi p}}{2}\mathrm{E}i\left(-\frac{1}{4p}\right)$$

$$si\frac{1}{t} \supset 2kei(2\sqrt{p})$$

$$ci\frac{1}{t} \supset -2ker(2\sqrt{p})$$

$$\mathrm{shi}(t) \supset \frac{1}{2}\log\frac{p+1}{p-1} = \arg\coth p$$

$$\mathrm{chi}(t) \supset -\frac{1}{2}\log(p^2-1)$$

$$\mathrm{chi}(t) + cit \supset -\log\sqrt{p^4-1}$$

$$\operatorname{chi}(t) - ci\,t \supset \frac{1}{2}\log\frac{p^2+1}{p^2-1}$$

$$2[t\operatorname{chi}(t) - \operatorname{sh} t] \supset -\frac{1}{p}\log(p^2-1)$$

$$\frac{\operatorname{chi}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}.} \supset \frac{\sqrt{\pi p}}{2}\operatorname{E}i^{*}\left(\frac{1}{4p}\right)$$

$$\operatorname{ch} t \operatorname{shi}(t) - \operatorname{sh} t \operatorname{chi}(t) \supset \frac{p}{p^2-1}\log p$$

$$\operatorname{ch} t \operatorname{chi}(t) + \operatorname{sh} t \operatorname{shi}(t) \supset -\frac{p^2}{p^2-1}\log p$$

$$\operatorname{ch}\sqrt{t}\operatorname{chi}(\sqrt{t}) + \operatorname{sh}\sqrt{t}\operatorname{shi}(\sqrt{t}) \supset \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,e^{\frac{1}{4p}}\operatorname{E}i\left(-\frac{1}{4p}\right)$$

$$\frac{\operatorname{ch}\sqrt{t}\operatorname{shi}(\sqrt{t}) - \operatorname{sh}\sqrt{t}\operatorname{chi}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \supset \frac{\sqrt{\pi p}}{2}\,e^{\frac{1}{4p}}\operatorname{E}i\left(-\frac{1}{4p}\right)$$

$$\operatorname{C}(t)\sin t - \operatorname{S}(t)\cos t \supset \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{2}(p^2+1)}$$

$$\operatorname{C}(t)\cos t + \operatorname{S}(t)\sin t \supset \frac{p\sqrt{p}}{\sqrt{2}(p^2+1)}$$

$$\operatorname{C}(t^2)\cos t^2 + \operatorname{S}(t^2)\sin t^2 \supset -\frac{p}{2\sqrt{2\pi}}\left(si\frac{p^2}{4}\cos\frac{p^2}{4} - ci\frac{p^2}{4}\sin\frac{p^2}{4}\right)$$

$$\operatorname{C}(t^2)\sin t^2 - \operatorname{S}(t^2)\cos t^2 \supset -\frac{p}{2\sqrt{2\pi}}\left(si\frac{p^2}{4}\sin\frac{p^2}{4} + ci\frac{p^2}{4}\cos\frac{p^2}{4}\right)$$

6. — Sinus et sinus intégraux du n^ième^ ordre.

$$f(t, j, n) \supset \frac{p^j}{p^n + 1}$$

$$f(\sqrt{t}, j, n) \supset \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, f\left(\frac{1}{4p}, \frac{j+1}{2}, \frac{n}{2}\right)$$

$$\frac{f(\sqrt{t}, j, n)}{\sqrt{t}} \supset \sqrt{\pi p}\, f\left(\frac{1}{4p}, \frac{j}{2}, \frac{n}{2}\right)$$

$$f(t^2, j, n) \supset -\frac{p}{\sqrt{\pi}} A\left(p^2, n - j - \frac{1}{2}, n\right)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} t f\left(t^2, n - j + \frac{1}{2}, n\right) \supset -p^2 A(p^2, j, n)$$

$$h(t, j, n) \supset \frac{p^j}{p^n - 1}$$

$$h(\sqrt{t}, j, n) \supset \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, h\left(\frac{1}{4p}, \frac{j+1}{2}, \frac{n}{2}\right)$$

$$\frac{h(\sqrt{t}, j, n)}{\sqrt{t}} \supset \sqrt{\pi p}\, h\left(\frac{1}{4p}, \frac{j}{2}, \frac{n}{2}\right)$$

$$F(t, j, n) \supset -\int_0^p \frac{s^{j-1}\, ds}{s^n + 1}$$

$$A(t, j, n) \supset -p \int_0^\infty \frac{s^j\, ds}{(p+s)(s^n + 1)}$$

$$\frac{1}{4t\sqrt{\pi t}} A\left(\frac{1}{4t}, \frac{j}{2}, \frac{n}{2}\right) \supset p\, A(\sqrt{p}, j, n)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} A\left(\frac{1}{4t}, \frac{j-1}{2}, \frac{n}{2}\right) \supset \sqrt{p}\, A(\sqrt{p}, j, n)$$

$$\frac{f(\sqrt{t}, 1, 4)}{\sqrt{t}} \supset \sqrt{2\pi p}\left[C\left(\frac{1}{4p}\right)\sin\frac{1}{4p} - S\left(\frac{1}{4p}\right)\cos\frac{1}{4p}\right]$$

$$\frac{f(\sqrt{t}, 3, 4)}{\sqrt{t}} \supset \sqrt{2\pi p}\left[C\left(\frac{1}{4p}\right)\cos\frac{1}{4p} + S\left(\frac{1}{4p}\right)\sin\frac{1}{4p}\right]$$

$$f(\sqrt{t}, 2, 4) \supset \sqrt{\frac{\pi}{2p}}\left[C\left(\frac{1}{4p}\right)\cos\frac{1}{4p} + S\left(\frac{1}{4p}\right)\sin\frac{1}{4p}\right]$$

$$1 - f(\sqrt{t}, 4, 4) \supset \sqrt{\frac{\pi}{2p}}\left[C\left(\frac{1}{4p}\right)\sin\frac{1}{4p} - S\left(\frac{1}{4p}\right)\cos\frac{1}{4p}\right]$$

$$\frac{F(\sqrt{t}, j, n)}{\sqrt{t}} \supset \frac{\sqrt{\pi p}}{2} F\left(\frac{1}{4p}, \frac{j}{2}, \frac{n}{2}\right)$$

7. — Fonctions d'erreur.

$$\frac{e^t}{t}\, erf\, \sqrt{t} \supset p \log \frac{\sqrt{p}+1}{\sqrt{p}-1} = 2p \operatorname{arg\,coth} \sqrt{p}$$

$$\sqrt{a}\, e^{at} erf \sqrt{at} + \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \supset \frac{p^{\frac{3}{2}}}{p-a}$$

$$e^{at} erf \sqrt{at} - 2\sqrt{\frac{at}{\pi}} \supset \frac{a^2}{(p-a)\sqrt{p}}$$

$$erg\, \sqrt{t} \supset \frac{1}{\sqrt{p-1}}$$

$$e^{-t} erg\, \sqrt{t} \supset \frac{\sqrt{p}}{p+1}$$

$$\frac{e^t}{\sqrt{\pi t}} - erg\, \sqrt{t} \supset \sqrt{p-1}$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-t^2} ergt \supset -\frac{p}{4} e^{\frac{p^2}{4}} \operatorname{E}i\left(-\frac{p^2}{4}\right)$$

$$\sqrt{\pi}\, t\, e^{-t^2} ergt \supset 1 + \frac{p^2}{4} \operatorname{E}i\left(-\frac{p^2}{4}\right)$$

$$erfct \supset 1 - e^{\frac{p^2}{4}} erfc\, \frac{p}{2}$$

$$\sqrt{\pi t}\, erfc\, \sqrt{t} \supset \frac{1}{\sqrt{p}} \operatorname{arctg} \sqrt{p} - \frac{1}{p+1}$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} erfc\, \sqrt{t} \supset \sqrt{p} \operatorname{arctg} \sqrt{p}$$

$$\frac{1}{2t} erfc\, \frac{1}{\sqrt{t}} \supset -p \operatorname{E}i(-2\sqrt{p})$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\, e^{\frac{1}{t}} erfc\, \frac{1}{\sqrt{t}} \supset \sqrt{p}\,(\sin 2\sqrt{p}\; ci\, 2\sqrt{p} - \cos 2\sqrt{p}\; si\, 2\sqrt{p})$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2t\sqrt{t}} e^{\frac{1}{t}} erfc\, \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t} \supset p\,(\cos 2\sqrt{p}\; ci\, 2\sqrt{p} + \sin 2\sqrt{p}\; si\, 2\sqrt{p})$$

$$e^{\frac{1}{t}} erfc\, \frac{1}{\sqrt{t}} \supset \pi \sqrt{p}\,[\mathbf{H}_1(2\sqrt{p}) - \mathrm{Y}_1(2\sqrt{p})] - 1$$

$$\frac{1}{t} e^{\frac{1}{t}} erfc\, \frac{1}{\sqrt{t}} \supset \pi\; p\,[\mathbf{H}_0(2\sqrt{p}) - \mathrm{Y}_0(2\sqrt{p})]$$

$$2\sqrt{\frac{at}{\pi}} + e^{at}\, erfc\, \sqrt{at} \supset 1 + \frac{a}{p + \sqrt{ap}}$$

$$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\, e^{-\frac{a}{4t}} - \sqrt{a}\, erfc\, \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{t}} \supset \frac{e^{-\sqrt{ap}}}{\sqrt{p}}$$

$$e^{at+\sqrt{ab}}\, erfc\, \frac{\sqrt{b} + 2t\sqrt{a}}{2\sqrt{t}} \supset \frac{\sqrt{p}\, e^{-\sqrt{bp}}}{\sqrt{p} + \sqrt{a}}$$

$$erfc\, \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{t}} - e^{bt+\sqrt{ab}}\, erfc\, \frac{\sqrt{a} + 2t\sqrt{b}}{2\sqrt{t}} \supset \frac{\sqrt{b}\, e^{-\sqrt{ap}}}{\sqrt{p} + \sqrt{b}}$$

$$\left(t + \frac{a}{2}\right) erfc\, \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{t}} - \sqrt{\frac{at}{\pi}}\, e^{-\frac{a}{4t}} \supset \frac{e^{-\sqrt{ap}}}{p}$$

$$e^{-\sqrt{ab}}\, erfc\, \frac{\sqrt{b} - 2t\sqrt{a}}{2\sqrt{t}}$$
$$+ e^{\sqrt{ab}}\, erfc\, \frac{\sqrt{b} + 2t\sqrt{a}}{2\sqrt{t}} \supset 2\, e^{-\sqrt{b(p+a)}}$$

$$e^{at}\Bigg[e^{-\sqrt{ab}}\, erfc\, \frac{\sqrt{b} - 2t\sqrt{a}}{2\sqrt{t}}$$
$$+ e^{\sqrt{ab}}\, erfc\, \frac{\sqrt{b} + 2t\sqrt{a}}{2\sqrt{t}}\Bigg] \supset \frac{2p}{p-a}\, e^{-\sqrt{bp}}$$

$$erfc\, \frac{b - \frac{2t}{a}}{2\sqrt{\frac{t}{a}}} - e^{-2b}\left[1 + 2\left(b + \frac{2t}{a}\right) erfc\, \frac{b + 2\frac{t}{a}}{2\sqrt{\frac{t}{a}}}\right]$$
$$+ 4\sqrt{\frac{t}{a\pi}}\, e^{-\frac{\left(b - 2\frac{t}{a}\right)^2}{4\frac{t}{a}}}$$
$$\supset 2\, \frac{e^{b(1-\sqrt{1+ap})}}{1 + \sqrt{1+ap}}$$

8. — Fonctions eulériennes.

$$\Gamma(t+1) \supset p\lambda(e^p, x) \qquad (t < x)$$
$$\supset 0 \qquad (t > x)$$

$$\frac{1}{\Gamma(t+1)} \supset p\nu(e^{-p})$$

$$\frac{1}{\Gamma(t+n+1)} \supset p\, e^{np}\nu(e^{-p}, n)$$

$$\frac{t^m}{\Gamma(t+1)} \supset p\mu(e^{-p}, m)$$

$$\frac{t^m}{\Gamma(t+n+1)} \supset p\, e^{np}\mu(e^{-p}, m, n)$$

$$\int_0^\infty \frac{t^x}{[\Gamma(x+1)]^2}\, dx \supset \nu\left(\frac{1}{p}\right)$$

$$\int_0^\infty \frac{t^x x^m}{[\Gamma(x+1)]^2}\, dx \supset \mu\left(\frac{1}{p}, m\right)$$

$$\frac{P(t, a)}{\Gamma(a)} \supset \frac{1}{(p+1)^a} \qquad (a > 0)$$

$$\frac{Q(t, a)}{\Gamma(a)} \supset 1 - \frac{1}{(p+1)^a} \qquad (a > 0)$$

$$\frac{P(\sqrt{t}, \nu-1)}{\Gamma(\nu-1)} \supset \frac{1}{(2p)^{\frac{\nu+1}{2}}} D_{-\nu}\left(\frac{1}{\sqrt{2p}}\right) e^{\frac{1}{8p}}$$

$$\frac{e^t P(t, a+1)}{\Gamma(a+1)} \supset \frac{1}{p^a(p-1)} \qquad (a \leqq -1)$$

$$(4t)^{\nu-\frac{1}{2}} P\left(\frac{1}{4t}, \nu\right) \supset \sqrt{\pi}\, \frac{P(\sqrt{p}, 2\nu)}{p^{\nu-\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{(4t)^\nu}{\sqrt{\pi t}} P\left(\frac{1}{4t}, \nu+1\right) \supset \frac{P(\sqrt{p}, 2\nu+1)}{p^{\nu-\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{(4t)^{\nu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} Q\left(\frac{1}{4t}, \nu\right) \supset \frac{Q(\sqrt{p}, 2\nu)}{p^{\nu-\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{(4t)^\nu}{\sqrt{\pi t}} Q\left(\frac{1}{4t}, \nu+1\right) \supset \frac{Q(\sqrt{p}, 2\nu+1)}{p^{\nu-\frac{1}{2}}}$$

9. — Fonctions $\nu(t)$, $\mu(t, m)$ et analogues.

$$\nu(t) \supset \frac{1}{\log p}$$

$$\frac{\nu(2\sqrt{t})}{2\sqrt{\pi t}} \supset \sqrt{p}\,\nu\left(\frac{1}{p}\right)$$

$$\nu(e^{-a}t) \supset \frac{1}{\log p + a}$$

$$\nu(e^{-t}) \supset p\int_0^\infty \frac{dx}{(p+x)\Gamma(x+1)}$$

$$\nu(1-e^{-t}) \supset \Gamma(p+1)\int_0^\infty \frac{dx}{\Gamma(p+x+1)}$$

$$\frac{\nu(t)}{1-e^{-t}} \supset p\int_0^\infty \zeta(x+1, p)\,dx$$

$$\nu(t)\log t + 1 \supset \int_0^\infty \frac{\Psi(x+1)}{p^x}\,dx$$

$$\int_0^\infty \frac{t^x \nu'(x)}{\Gamma(x+1)}\,dx \supset \frac{1}{\log\log p}$$

$$\nu(t, n) \supset \frac{1}{p^n \log p}$$

$$\frac{\nu(2\sqrt{t}, 2n)}{2\sqrt{\pi t}} \supset \sqrt{p}\,\nu\left(\frac{1}{p}, n\right)$$

$$2\nu(2\sqrt{t}, n) \supset \sqrt{\frac{\pi}{p}}\,\nu\left(\frac{1}{p}, \frac{n-1}{2}\right)$$

$$\nu i(t, n) \supset -\mathrm{Ei}(-n\log p)$$

$$\mu(t, m) \supset \frac{\Gamma(m+1)}{\log^{m+1} p}$$

$$\mu(e^{-a}t, m) \supset \frac{\Gamma(m+1)}{(a+\log p)^{m+1}}$$

$$\frac{\mu(2\sqrt{t}, m)}{2^{m+1}\sqrt{\pi t}} \supset \sqrt{p}\,\mu\left(\frac{1}{p}, m\right)$$

$$\Psi(m+1)\mu(t, m) - \frac{\partial}{\partial m}\mu(t, m) \supset \frac{\Gamma(m+1)\log\log p}{\log^{m+1} p}$$

$$\mu(t, m, n) \supset \frac{\Gamma(m+1)}{p^n \log^{m+1} p}$$

$$\frac{\mu(2\sqrt{t},\ m,\ 2n)}{2^{m+1}\sqrt{\pi t}} \supset \sqrt{p}\,\mu\left(\frac{1}{p},\ m,\ n\right)$$

$$\mu(1-e^{-t},\ m,\ n) \supset \Gamma(p+1)\int_0^{\infty}\frac{x^m\,dx}{\Gamma(p+n+x+1)}$$

$$\Psi(m+1)\mu(t,\ m,\ n)-\frac{\partial}{\partial m}\mu(t,\ m,\ n) \supset \frac{\Gamma(m+1)\log\log p}{p^n\log^{m+1}p}$$

$$\lambda\left(\frac{1}{t},\ x\right) \supset \int_0^{x}\frac{\Gamma'(u+1)}{p^u}\,du$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\lambda\left(\frac{1}{4t},\ x\right) \supset \frac{\sqrt{\pi p}}{2}\lambda(\sqrt{p},\ 2x)$$

$$4\sqrt{\frac{t}{\pi}}\lambda\left(\frac{1}{4t},\ x\right) \supset \lambda(\sqrt{p},\ 2x+1)-\lambda(\sqrt{p},1)$$

10. — Fonctions de Bessel.

$$t^n J_n(at) \supset 1 \cdot 3 \ldots (2n-1) \frac{a^n p}{r^{2n+1}}$$

$$t^2 J_\nu(at) \supset \frac{p}{r^3}\left[\frac{3p^2}{r^2} + \frac{3\nu p}{r} + \nu^2 - 1\right]\frac{a^\nu}{R^\nu}, \qquad R(\nu) > -3$$

$$t^{\frac{\nu}{2}-1} J_\nu(2\sqrt{at}) \supset a^{-\frac{\nu}{2}} p \, P\left(\frac{a}{p}, \nu\right), \qquad R(\nu) > 0$$

$$(t^2 + 2bt)^{\frac{\nu}{2}} J_\nu\left(a\sqrt{t^2 + 2bt}\right) \supset \sqrt{\frac{2}{\pi}} p a^\nu b^{\nu+\frac{1}{2}} \frac{e^{bp}}{r^{\nu+\frac{1}{2}}} K_{\nu+\frac{1}{2}}(br), \qquad R(\nu) > -1)$$

$$t^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{4}}(t^2) \supset \frac{\sqrt{\pi p^3}}{4}\left[\mathbf{H}_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{p^2}{4}\right) - Y_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{p^2}{4}\right)\right]$$

$$t^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{4}}(t^2) \supset \frac{\sqrt{\pi p^3}}{4}\left[\mathbf{H}_{\frac{1}{4}}\left(\frac{p^2}{4}\right) - Y_{\frac{1}{4}}\left(\frac{p^2}{4}\right)\right]$$

$$\frac{1}{t} J_\nu\left(\frac{2}{t}\right) \supset p J_\nu(\sqrt{p}) K_\nu(\sqrt{p})$$

$$\log\sqrt{t}\, J_0(2\sqrt{t}) \supset e^{-\frac{1}{p}}\left[Ei^*\left(-\frac{1}{p}\right) - \log p\right]$$

$$J_\nu(2a \operatorname{sh} t) \supset p\, I_{\frac{1}{2}(\nu+p)}(a) K_{\frac{1}{2}(\nu-p)}(a), \qquad R(\nu) > -1, \quad a > 0$$

$$\frac{J_1(2\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \supset p\left(1 - e^{-\frac{1}{p}}\right)$$

$$J_\nu(t) J_{2\nu}(2a\sqrt{t}) \supset \frac{p}{q} e^{-\frac{pa^2}{q^2}} J_\nu\left(\frac{a^2}{q^2}\right), \qquad R(\nu) > -1$$

$$t^{\mu-\frac{1}{2}} J_{2\nu}(2a\sqrt{t}) \supset \frac{\Gamma\left(\mu + \nu + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{a}\,\Gamma(2\nu+1)} e^{-\frac{a^2}{2p}} p^{1-\mu} M_{\mu,\nu}\left(\frac{a^2}{p}\right),$$

$$R\left(\mu + \nu + \frac{1}{2}\right) > 0$$

$$\frac{e^{(b-a)t}}{t} J_\nu\left(\frac{2\sqrt{ab}}{t}\right) \supset 2p J_\nu(2\sqrt{bp}) K_\nu(2\sqrt{ap})$$

$$J_0(t^2)\cos t^2 \supset \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{p}{4}\left[J_0\left(\frac{p^2}{16}\right)\cos\left(\frac{p^2}{16} - \frac{\pi}{4}\right) - Y_0\left(\frac{p^2}{16}\right)\cos\left(\frac{p^2}{16} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$J_0(t^2)\sin t^2 \supset \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{p}{4}\left[J_0\left(\frac{p^2}{16}\right)\sin\left(\frac{p^2}{16} - \frac{\pi}{4}\right) - Y_0\left(\frac{p^2}{16}\right)\sin\left(\frac{p^2}{16} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\int_t^\infty J_\nu(x)\,dx \supset 1 - \frac{1}{qQ}$$

$$\int_0^t J_1(\sqrt{x})\,dx \supset \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{p^3}}\,e^{-\frac{1}{8p}}\left[I_0\left(\frac{1}{8p}\right) - I_1\left(\frac{1}{8p}\right)\right]$$

$$\int_0^t [J_1(\sqrt{x}) + I_1(\sqrt{x})]\,dx \supset \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p^3}}\left[I_0\left(\frac{1}{8p}\right) - I_1\left(\frac{1}{8p}\right)\right]\operatorname{ch}\frac{1}{8p}$$

$$\int_0^t [J_1(\sqrt{x}) - I_1(\sqrt{x})]\,dx \supset \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p^3}}\left[I_0\left(\frac{1}{8p}\right) - I_1\left(\frac{1}{8p}\right)\right]\operatorname{sh}\frac{1}{8p}$$

$$\int_0^t J_{2\nu}(4\sqrt{x})\frac{dx}{\sqrt{x}} \supset \sqrt{\frac{\pi}{p}}\,e^{-\frac{2}{p}}\,I_\nu\left(\frac{2}{p}\right), \qquad R(\nu) > -\frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{2\nu}\left[4a\sqrt{t}\,{\sin \atop \cos}\,\theta\right]d\theta \supset \frac{\pi}{2}\,e^{-\frac{2a^2}{p}}\,I_\nu\left(\frac{2a^2}{p}\right), \qquad R(\nu) > -\frac{1}{2}$$

$$\frac{J_{2\nu}(ay)}{y} \supset p\,I_\nu\left[\frac{1}{2}b(r-p)\right]K_\nu\left[\frac{1}{2}b(r+p)\right],$$
$$R(\nu) > -1,\ t > b$$

$$y^\nu J_\nu(ay) \supset \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,a^\nu p\left(\frac{b}{r}\right)^{\nu+\frac{1}{2}}K_{\nu+\frac{1}{2}}(br), \quad R(\nu) > -1,\ t > b$$

$$y^\mu J_\nu(ay) \supset \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(ab)^{2m+\nu}(2b)^{\mu+1}\\ \displaystyle\times\,\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+m+1\right)K_{\frac{1}{2}(\mu+\nu+1)+m}(bp)\end{array}\right\}}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)\,(2p)^{\frac{1}{2}(\mu+\nu-1)+m}},$$
$$R(\mu+\nu) > -2,\ t > b$$

$$\int_b^t J_0(ay)\,dx \supset \frac{e^{-br}}{r}$$

$$\int_t^\infty J_0(ay)\,dx \supset \frac{e^{-b(p+a)}}{a} - \frac{e^{-br}}{r} \qquad t > b$$

11. — Fonctions de Bessel de seconde et de troisième espèce.

$$Y_1(a\sqrt{t}) \supset \frac{-a}{4\sqrt{\pi p}}e^{-\frac{a^2}{4p}}\left[K_0\left(\frac{a^2}{8p}\right)+K_1\left(\frac{a^2}{8p}\right)\right]$$

$$Y_0(2\sqrt{t}) \supset -\frac{1}{\pi}e^{\frac{1}{p}}\mathrm{E}i^*\left(-\frac{1}{p}\right)$$

$$Y_0(2\sqrt{t})+\frac{1}{\pi}\log t\, J_0(2\sqrt{t}) \supset -\frac{2}{\pi}e^{-\frac{1}{p}}\log p$$

$$\frac{Y_{2\nu}(a\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \supset -\sqrt{\pi p}\,\frac{e^{-\frac{a^2}{8p}}}{\cos\nu\pi}\left[\sin\nu\pi\, I_\nu\left(\frac{a^2}{8p}\right)+\frac{1}{\pi}K_\nu\left(\frac{a^2}{8p}\right)\right],$$
$$-\frac{1}{2}<R(\nu)<\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{t}Y_\nu\left(\frac{2}{t}\right) \supset p\,Y_\nu(\sqrt{p})\,K_\nu(\sqrt{p})$$

$$\int_0^t Y_1(a\sqrt{x})\,dx = \pi\sqrt{t}\left[Y_1(\sqrt{t})\mathbf{H}_0(\sqrt{t})-\mathbf{H}_1(\sqrt{t})Y_0(\sqrt{t})\right]$$
$$\supset \frac{-a}{4\sqrt{\pi p}}e^{-\frac{a^2}{4p}}\left[K_0\left(\frac{a^2}{8p}\right)+K_1\left(\frac{a^2}{8p}\right)\right]$$

$$H_0^{(1)}(2\sqrt{t}) \supset e^{-\frac{1}{p}}\left[1-\frac{i}{\pi}\mathrm{E}i^*\left(-\frac{1}{p}\right)\right]$$

$$H_0^{(2)}(2\sqrt{t}) \supset e^{-\frac{1}{p}}\left[1+\frac{i}{\pi}\mathrm{E}i^*\left(-\frac{1}{p}\right)\right].$$

$$\frac{H_0^{(1)}(2\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \supset \frac{\sqrt{\pi p}}{\cos\nu\pi}e^{-\frac{1}{2p}}\left[e^{-i\nu\pi}I_\nu\left(\frac{1}{2p}\right)-\frac{i}{\pi}K_\nu\left(\frac{1}{2p}\right)\right],$$
$$-\frac{1}{2}<R(\nu)<\frac{1}{2}$$

$$\frac{H_0^{(2)}(2\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \supset \frac{\sqrt{\pi p}}{\cos\nu\pi}e^{-\frac{1}{2p}}\left[e^{i\nu\pi}I_\nu\left(\frac{1}{2p}\right)+\frac{i}{\pi}K_\nu\left(\frac{1}{2p}\right)\right]$$

$$\frac{1}{t}H_\nu^{(1)}\left(\frac{2}{t}\right) \supset p\,H_\nu^{(1)}(\sqrt{p})K_\nu(\sqrt{p})$$

$$\frac{1}{t}H_\nu^{(2)}\left(\frac{2}{t}\right) \supset p\,H_\nu^{(2)}(\sqrt{p})K_\nu(\sqrt{p})$$

12. — Fonctions de Bessel d'argument imaginaire.

$$e^{-\frac{t}{2}} I_0\left(\frac{t}{2}\right) \supset \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p+1}}$$

$$e^{\frac{t}{2}} I_0\left(\frac{t}{2}\right) \supset \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p-1}}$$

$$\frac{I_1(2\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \supset p\left(e^{\frac{1}{p}} - 1\right)$$

$$\log\sqrt{t}\, I_0(2\sqrt{t}) \supset e^{\frac{1}{p}}\left[\frac{1}{2}\operatorname{E}i^*\left(\frac{1}{p}\right) + \log\frac{1}{p}\right]$$

$$I_0(2\sqrt{2t}) + J_0(2\sqrt{2t}) \supset 2\operatorname{ch}\frac{2}{p}$$

$$I_0(2\sqrt{2t}) - J_0(2\sqrt{2t}) \supset 2\operatorname{sh}\frac{2}{p}$$

$$\frac{I_\nu(2\sqrt{at})}{t^{\frac{\nu}{2}}} \supset \frac{p^\nu e^{\frac{a}{p}}}{a^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(\nu)} P\left(\frac{a}{p}, \nu\right)$$

$$t^n I_n(at) \supset 1.3\ldots(2n-1)a^n \frac{p}{s^{2n+1}}$$

$$t^{\frac{\mu-1}{2}} I_\nu(2\sqrt{at}) \supset \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)} \frac{p^{1-\frac{\mu}{2}}}{\sqrt{a}} e^{\frac{a}{2p}} M_{-\frac{\mu}{2}, \frac{\nu}{2}}\left(\frac{a}{p}\right),$$
$$R(\mu+\nu) > -1$$

$$t^{2\nu} e^{-\frac{t^2}{8}} I_\nu\left(\frac{t^2}{8}\right) \supset \frac{\Gamma(4\nu+1)}{2^{4\nu}\Gamma(\nu+1)} \frac{e^{\frac{p^2}{2}}}{p^\nu} W_{-\frac{3\nu}{2}, \frac{\nu}{2}}(p^2), \qquad R(\nu) > -\frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{t}{t+2b}\right)^{\frac{\nu}{2}} I_\nu(a\sqrt{t^2+2bt}) \supset \frac{p}{s}\left(\frac{a}{R}\right)^\nu e^{b(p-s)}, \qquad R(\nu) > -1$$

$$(t^2+2bt)^{\frac{\nu}{2}} I_\nu(a\sqrt{t^2+2bt}) \supset \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, a^\nu p\left(\frac{b}{s}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} e^{bp} K_{\nu+\frac{1}{2}}(bs), \quad R(\nu) > -1$$

$$y^\nu I_\nu(ay) \supset \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, a^\nu p\left(\frac{b}{s}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} K_{\nu+\frac{1}{2}}(bs),$$
$$R(\nu) > -1,\ t > b$$

$$\int_0^t I_1(\sqrt{x})\,dx \supset \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{p^3}}\, e^{\frac{1}{8p}}\left[I_0\left(\frac{1}{8p}\right) - I_1\left(\frac{1}{8p}\right)\right]$$

$$\int_0^t e^{-bx}\,\mathrm{I}_0\left(a\sqrt{t^2 - x^2}\right)dx \supset \frac{p}{s(s+b)}$$

$$e^{\lambda b}\int_b^t e^{-\lambda x}\,\mathrm{I}_0\left(a\sqrt{t^2 - x^2}\right)dx \supset \frac{p\,e^{-b}}{s(s+\lambda)}$$

$$\mathrm{I}_t(x) \supset p\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{mp}}{p\,!}\,\frac{x^m}{2^m}\,\nu\left(\frac{x}{2}e^{-p},\ m\right)$$

13. — Fonctions K de Bessel.

$$\frac{e^{-\frac{1}{2t}}}{t} K_\nu(t) \supset 2p K_\nu(\sqrt{R}) K_\nu\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)$$

$$K_0(2a\sqrt{t}) \supset \frac{e^{\frac{a^2}{p}}}{2} Ei^*\left(\frac{a^2}{p}\right)$$

$$K_0(2\sqrt{t}) - \log\sqrt{t}\, I_0(2\sqrt{t}) \supset e^{\frac{1}{p}} \log p$$

$$t^{-\mu-\frac{1}{2}} K_{2\nu}(2\sqrt{at}) \supset \frac{\Gamma\left(-\mu+\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\mu+\nu+\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{a}}$$

$$\times e^{\frac{a}{2p}} p^{\mu+1} W_{\mu,\nu}\left(\frac{a}{p}\right), \qquad R(\nu-\mu) > -\frac{1}{2}$$

$$t^\nu K_{2\nu}(2a\sqrt{t}) \supset \frac{a^{2\nu}\Gamma(2\nu+1)}{2p^{2\nu}} e^{\frac{a^2}{p}} Q\left(\frac{a^2}{p}, -2\nu\right), \quad R(\nu) > -\frac{1}{2}$$

$$t^\nu K_\nu(\sqrt{t}) I_\nu(\sqrt{t}) \supset \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) e^{\frac{1}{2p}}}{2p^{\frac{2\nu-1}{2}}} W_{-\frac{\nu}{2},\frac{\nu}{2}}\left(\frac{1}{p}\right), \qquad R(\nu) > -\frac{1}{2}$$

$$K_1(a\sqrt{t}) - \frac{\pi}{2} Y_1(a\sqrt{t}) \supset \frac{a}{4}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\left[K_1\left(\frac{a^2}{p}\right)\operatorname{ch}\frac{a^2}{8p} - K_0\left(\frac{a^2}{p}\right)\operatorname{sh}\frac{a^2}{8p}\right]$$

$$K_1(a\sqrt{t}) + \frac{\pi}{2} Y_1(a\sqrt{t}) \supset \frac{a}{4}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\left[K_1\left(\frac{a^2}{p}\right)\operatorname{sh}\frac{a^2}{8p} - K_0\left(\frac{a^2}{p}\right)\operatorname{ch}\frac{a^2}{8p}\right]$$

$$\begin{aligned} &2K_0(2\sqrt{t}) - \pi Y_0(2\sqrt{t}) \\ &- \log t[J_0(2\sqrt{t}) + I_0(2\sqrt{t})] \supset 4\log p \operatorname{ch}\frac{1}{p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2K_0(2\sqrt{t}) + \pi Y_0(2\sqrt{t}) \\ &+ \log t[J_0(2\sqrt{t}) - I_0(2\sqrt{t})] \supset 4\log p \operatorname{sh}\frac{1}{p} \end{aligned}$$

$$\int_t^\infty K_0(ax)\,dx \supset \frac{\pi}{2a} - \frac{1}{s}\log\frac{R}{a}$$

$$\int_t^\infty x K_0(ax)\,dx \supset \frac{1}{a^2} - \frac{1}{s^2}\left(\frac{p}{s}\log\frac{R}{a} - 1\right)$$

$$\int_t^\infty x K_1(ax)\,dx \supset \frac{\pi}{2a} + \frac{1}{s^2}\left(\frac{p}{a} + \frac{a}{s}\log\frac{R}{a}\right)$$

$$\int_t^\infty K_\nu(ax)\,dx \supset \frac{\pi}{2a\cos\frac{\nu\pi}{2}} - \frac{\pi}{2s\sin\nu\pi}\left[\left(\frac{R}{a}\right)^\nu - \left(\frac{a}{R}\right)^\nu\right],$$

$$-1 < R(\nu) < 1$$

$$2t^{\frac{m}{2}} K_m(2\sqrt{t}) \supset \Gamma(m+1)\, S\left(m+1, \frac{1}{p}\right)$$

$$2t^{\mu+\frac{\nu}{2}} K_\nu(t) \supset \Gamma(\mu+\nu+1)\,\Gamma(\mu+1)\,\frac{e^{\frac{1}{2p}}}{p^{\mu+\frac{\nu-1}{2}}}$$

$$\times\, W_{-\mu-\frac{\nu+1}{2},\, \frac{\nu}{2}}\left(\frac{1}{p}\right)$$

$$(\mu+\nu > -1,\ \mu > -1)$$

14. — Fonctions de Kelvin (*ber* et *bei*).

$$\frac{d}{dt} ber(2\sqrt{t}) \supset p\left(\cos\frac{1}{p} - 1\right)$$

$$\frac{d}{dt} bei(2\sqrt{t}) \supset p \sin\frac{1}{p}$$

$$ber_\nu(2\sqrt{t}) \supset \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\left[\ J_{\frac{\nu-1}{2}}\left(\frac{1}{2p}\right)\cos\left(\frac{1}{2p}+\frac{3\nu\pi}{4}\right) - J_{\frac{\nu+1}{2}}\left(\frac{1}{2p}\right)\cos\left(\frac{1}{2p}+\frac{3\nu+6}{4}\pi\right)\right]$$

$$bei_\nu(2\sqrt{t}) \supset \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\left[\ J_{\frac{\nu-1}{2}}\left(\frac{1}{2p}\right)\sin\left(\frac{1}{2p}+\frac{3\nu}{4}\pi\right) - J_{\frac{\nu+1}{2}}\left(\frac{1}{2p}\right)\sin\left(\frac{1}{2p}+\frac{3\nu+6}{4}\pi\right)\right]$$

$$ber_\nu^2(2\sqrt{t}) - bei_\nu^2(2\sqrt{t}) \supset J_\nu\left(\frac{2}{p}\right)\cos\left(\frac{2}{p}+\frac{3\nu\pi}{2}\right), \qquad R(\nu) > -1$$

$$ber_\nu(2\sqrt{t})\, bei_\nu(2\sqrt{t}) \supset \frac{1}{2} J_\nu\left(\frac{2}{p}\right)\sin\left(\frac{2}{p}+\frac{3\nu\pi}{2}\right), \qquad R(\nu) > -1$$

$$\frac{ber_{2\nu}(2\sqrt{2t})}{\sqrt{t}} \supset \sqrt{\pi p}\, J_\nu\left(\frac{1}{p}\right)\cos\left(\frac{1}{p}-\frac{3\pi}{4}+\frac{3\nu\pi}{2}\right), \qquad R(\nu) > -\frac{1}{2}$$

$$\frac{bei_{2\nu}(2\sqrt{2t})}{\sqrt{t}} \supset \sqrt{\pi p}\, J_\nu\left(\frac{1}{p}\right)\sin\left(\frac{1}{p}-\frac{3\pi}{4}+\frac{3\nu\pi}{2}\right), \qquad R(\nu) > -\frac{1}{2}.$$

$$\left(\frac{t}{t+2b}\right)^{\frac{\nu}{2}}\left[\ ber_\nu(a\sqrt{t^2+2bt}) + i\, bei_\nu(a\sqrt{t^2+2bt})\right] \supset \frac{a^\nu p\, e^{b(p-v)+\frac{3\nu\pi i}{4}}}{vT}, \qquad R(\nu) > -1$$

$$\frac{t^{\frac{\nu}{2}}}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}} ber_\nu(\sqrt{x})\, dx \supset \frac{2^\nu}{p^{\frac{\nu}{2}}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{p}}+\frac{3\nu\pi}{4}\right), \qquad R(\nu) > -1$$

$$\frac{t^{\frac{\nu}{2}}}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}} bei_\nu(\sqrt{x})\, dx \supset \frac{2^\nu}{p^{\frac{\nu}{2}}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{p}}+\frac{3\nu\pi}{4}\right), \qquad R(\nu) > -1$$

15. — Fonctions *ker* et *kei*.

$$ker(2\sqrt{t}) \supset -\frac{1}{2}\left[\cos\frac{1}{p}\, ci\,\frac{1}{p} + \sin\frac{1}{p}\, si\,\frac{1}{p}\right]$$

$$kei\,(2\sqrt{t}) \supset -\frac{1}{2}\left[\sin\frac{1}{p}\, ci\,\frac{1}{p} - \cos\frac{1}{p}\, si\,\frac{1}{p}\right]$$

$$ker(2\sqrt{t}) - \frac{1}{2}\log t\; ber(2\sqrt{t}) \supset \log p\cos\frac{1}{p} + \frac{\pi}{4}\sin\frac{1}{p}$$

$$kei\,(2\sqrt{t}) - \frac{1}{2}\log t\; bei\,(2\sqrt{t}) \supset \log p\sin\frac{1}{p} - \frac{\pi}{4}\cos\frac{1}{p}$$

$$ker_1(\sqrt{t}) \supset \frac{-\pi\sqrt{\pi}}{16\sqrt{p}}\left\{\cos\left(\frac{1}{8p}+\frac{\pi}{4}\right)\left[J_1\left(\frac{1}{8p}\right)+Y_0\left(\frac{1}{8p}\right)\right] + \sin\left(\frac{1}{8p}+\frac{\pi}{4}\right)\left[Y_1\left(\frac{1}{8p}\right)+J_0\left(\frac{1}{8p}\right)\right]\right\}$$

$$kei_1(\sqrt{t}) \supset \frac{-\pi\sqrt{\pi}}{16\sqrt{p}}\left\{\sin\left(\frac{1}{8p}+\frac{\pi}{4}\right)\left[J_1\left(\frac{1}{8p}\right)+Y_0\left(\frac{1}{8p}\right)\right] - \cos\left(\frac{1}{8p}+\frac{\pi}{4}\right)\left[Y_1\left(\frac{1}{8p}\right)+J_0\left(\frac{1}{8p}\right)\right]\right\}$$

16. — Fonctions de Struve.

$$\frac{\pi}{2}[\mathbf{H}_0(t) - \mathrm{Y}_0(t)] = \int_0^{\infty} e^{-t\,\mathrm{sh}\,\theta}\, d\theta \supset \frac{p}{q} \log \mathrm{QU}$$

$$\frac{\pi t}{2}[\mathrm{Y}_1(at)\,\mathbf{H}_0(at) - \mathrm{Y}_0(at)\,\mathbf{H}_1(at)] \supset \frac{-2}{\pi r}\left[\log\frac{\mathrm{P}}{a} - \frac{p^2}{r^2}\log\frac{\mathrm{P}}{a} + \frac{p}{r}\right]$$

$$\pi\sqrt{t}\left[\mathrm{K}_0(\sqrt{t})\,\mathbf{L}_1(\sqrt{t}) + \mathbf{L}_0(\sqrt{t})\,\mathrm{K}_1(\sqrt{t})\right] = \int_0^t \mathrm{K}_1(\sqrt{x})\,dx$$

$$\supset \frac{1}{8}\sqrt{\frac{\pi}{p^3}}\, e^{\frac{1}{8p}}\left[\mathrm{K}_1\left(\frac{1}{8p}\right) - \mathrm{K}_0\left(\frac{1}{8p}\right)\right]$$

$$\frac{\pi t}{2}[\mathrm{K}_0(at)\,\mathbf{L}_1(at) + \mathbf{L}_0(at)\,\mathrm{K}_1(at)] \supset \frac{1}{s}\left[\log\frac{\mathrm{R}}{a} - \frac{p^2}{s^2}\log\frac{\mathrm{R}}{a} + \frac{p}{s}\right]$$

$$t^{\nu}\mathbf{L}_{2\nu}\,(2\sqrt{t}) \supset \frac{1}{p^{2\nu}}\, e^{\frac{1}{p}}\, erf\,\frac{1}{\sqrt{p}}$$

$$t^{\nu}\mathbf{L}_{-2\nu}(\sqrt{t}) \supset \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - 2\nu\right) p^{2\nu}}\, e^{\frac{1}{p}}\,\mathrm{P}\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{2} - 2\nu\right)$$

17. — Fonctions et polynômes de type hypergéométrique.

$$2\sqrt{t}\,{}_0F_m\left(\frac{3}{2m}, \frac{5}{2m}, \dots, \frac{2m+1}{2m}; \frac{t^m}{m^m}\right) \supset \frac{1}{\sqrt{p}}\, e^{p-m}$$

$$e^{\frac{t^2}{8}} D_n\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = He_n\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \supset \frac{n\,!}{2^{\frac{n}{2}} p^n}\left(1 - \frac{p^2}{1\,!} + \frac{p^4}{2\,!} - \dots\right)$$

(la suite s'arrêtant lorsqu'on obtient une puissance positive de p).

$$\frac{D_{2n}(2\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \supset 2^n\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \frac{p(1-p)^n}{(1+p)^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$D_{2\nu}(-2\sqrt{t}) - D_{2\nu}(2\sqrt{t}) \supset \frac{2^{\nu+\frac{3}{2}}\pi p}{\Gamma(-\nu)}\, \frac{(p-1)^{\nu-\frac{1}{2}}}{(p+1)^{\nu+1}}$$

$$\frac{He_{2n}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \supset 2^n\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{p}\left(\frac{1}{2p}-1\right)^n$$

$$(t-1)^n P_n\left(\frac{t+1}{t-1}\right) \supset \frac{n\,!}{p^n} L_n(-p)$$

$$(-1)^{m+n}\frac{m\,!\,2^{2m+n+1}}{(m+n)\,!}\, e^{-\frac{a^2}{4t}} L^n_{m+n}\left(\frac{a^2}{4t}\right) \supset (a\sqrt{p})^{2m+n+2} K_n(a\sqrt{p})$$

$$t^{\mu}(1+t)^{\nu}\,{}_2F_1(-n,\ n+\mu+\nu+1;\ \mu+1;\ 1-t)$$
$$\supset \Gamma(\mu+1)\,p^{-\frac{\mu+\nu}{2}}$$
$$\times\, e^{\frac{p}{2}}\, W_{\frac{\nu-\mu}{2},\ \frac{\nu+\mu+1}{2}+n}(p)$$

18. — Fonction hypergéométrique confluente de Whittaker.

$$t^{\alpha} W_{\mu,\nu}(t) \supset \frac{\Gamma\left(\alpha+\nu+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\alpha-\nu+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(\alpha-\mu+2)} p$$
$$\times {}_2F_1\left(\alpha+\nu+\frac{3}{2},\ \alpha-\nu+\frac{3}{2};\ \alpha-\mu+2;\ \frac{1}{2}-p\right)$$

$$t^{\nu-\frac{1}{2}} e^{\frac{t}{2}} W_{m+\nu+\frac{1}{2},\ \nu}(t) \supset \Gamma(2\nu+m+1)(1-p)^m p^{-2\nu-m}, \qquad R(\nu) > -\frac{1}{2}$$

$$t^{-\nu-\frac{1}{2}} e^{\frac{t}{2}} W_{\mu,\nu}(t) \supset \Gamma\left(\mu-\nu+\frac{1}{2}\right) p^{\nu-\mu+\frac{1}{2}} (1-p)^{\mu+\nu-\frac{1}{2}}$$

$\left[\mu+\nu-\frac{1}{2}\right.$ (entier positif), $\mu-\nu+\frac{1}{2}$ (non entier négatif)$\left.\right]$, $\qquad R(\nu) > -\frac{1}{2}$

$$t^{-\nu-\frac{1}{2}} e^{-\frac{t}{2}} W_{\mu,\nu}(t) \supset (-1)^{\mu+\nu-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\mu-\nu+\frac{1}{2}\right)$$
$$\times (p+1)^{\nu-\mu-\frac{1}{2}} p^{\mu+\nu+\frac{1}{2}}$$

(mêmes conditions que ci-dessus)

$$t^{-\frac{\nu+1}{2}} e^{\frac{t}{2}} W_{\frac{\nu}{2}+\mu+\frac{1}{2},\ \frac{\nu}{2}}(t) \supset \Gamma(\mu+1)(-1)^{\mu+\nu} p^{\nu} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{\mu+\nu}$$

($\mu+\nu$ entier > 0)

$$\frac{a^{2\mu}}{t^{\mu}} e^{-\frac{a^2}{8t}} W_{\mu,\nu}\left(\frac{a^2}{4t}\right) \supset \frac{a^{2\mu+1}}{p^{\frac{2\mu-1}{2}}} K_{2\nu}(a\sqrt{p})$$

$$\frac{W_{0,\ \nu+\frac{1}{2}}(2t)}{t} \supset -\frac{\pi}{\sin \nu\pi} p P_{\nu}(p)$$

$$\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}} W_{-\frac{1}{2},\ 0}(t) \supset \log(p+1)$$

$$\frac{W_{0,0}(2t)}{\sqrt{2t}} = \frac{K_0(t)}{\sqrt{\pi}} \supset \frac{p}{\pi\sqrt{p^2-1}} \log\left(p+\sqrt{p^2-1}\right)$$

$$t^{\alpha} W_{\nu+\frac{1}{2},\ \nu}(t) \supset \Gamma\left(\alpha+\nu+\frac{3}{2}\right) p \left(p+\frac{1}{2}\right)^{-\alpha-\nu-\frac{3}{2}}$$

$$\left(\alpha+\nu+\frac{3}{2} > 0\right)$$

$$t^{-\frac{\mu}{2}} e^{t} W_{n-\frac{\mu}{2},\ \frac{1-\mu}{2}}(2t) \supset 2^{1-\frac{\mu}{2}} \Gamma(1+n-\mu)(2-p)^{n-1} p^{\mu-n}, \qquad (n \geqq 1)$$

19. — Fonctions de Mathieu.

1° *Définitions et notations.* — Les fonctions de Mathieu, $ce_m(x, q)$ et $se_m(x, q)$ sont les solutions périodiques, paires et impaires, de l'équation de Mathieu

$$y'' + (a - 2q\cos 2x)y = 0$$

dans laquelle on pose aussi $q = k^2$.

Les fonctions dites *modifiées*, Ce_m et Se_m, sont les solutions périodiques (de période πi) de

$$y'' - (a - 2q\,\mathrm{ch}\,2x)y = 0.$$

Elles sont développables en séries de fonctions de Bessel, par les formules suivantes, où les coefficients A et B sont connus :

$$Ce_{2n}(x, q) = \frac{ce_{2n}(0, q)}{A_0^{(2n)}} \sum_s A_{2s}^{(2n)} J_{2s}(2k\,\mathrm{sh}\,x),$$

$$Ce_{2n+1}(x, q) = \frac{ce_{2n+1}(0, q)}{kA_1^{(2n+1)}} \coth x \sum_s (2s+1) A_{2s+1}^{(2n+1)} J_{2s+1}(2k\,\mathrm{ch}\,x),$$

$$Se_{2n+1}(x, q) = \frac{se_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{kB_1^{(2n+1)}} \mathrm{th}\,x \sum_s (-1)^s (2s+1) B_{2s+1}^{(2n+1)} J_{2s+1}(2k\,\mathrm{ch}\,x),$$

$$Se_{2n+2}(x, q) = -\frac{se'_{2n+2}(0, q)}{k^2 B_2^{(2n+2)}} \coth x \sum_s (2s+2) B_{2s+2}^{(2n+2)} J_{2s+2}(2k\,\mathrm{sh}\,x).$$

Des solutions de seconde espèce, correspondant respectivement à chacune des quatre fonctions périodiques ci-dessus, sont représentées par les séries suivantes, introduisant les fonctions K de Bessel :

$$Fek_{2n}(x, q) = \frac{ce_{2n}(0, q)}{\pi A_0^{(2n)}} \sum_s (-1)^s A_{2s}^{(2n)} K_{2s}(-2ik\,\mathrm{sh}\,x),$$

$$Fek_{2n+1}(x, q) = \frac{ce_{2n+1}(0, q)}{\pi k A_1^{(2n+1)}} \coth x \sum (-1)^s (2s+1) A_{2s+1}^{(2n+1)} K_{2s+1}(-2ik\,\mathrm{sh}\,x),$$

$$Gek_{2n+1}(x, q) = \frac{se_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{\pi k B_1^{(2n+1)}} \mathrm{th}\,x \sum (2s+1) B_{2s+1}^{(2n+1)} K_{2s+1}(-2ik\,\mathrm{ch}\,x),$$

$$Gek_{2n+2}(x, q) = -\frac{se'_{2n+2}(0, q)}{\pi k^2 B_2^{(2n+2)}} \coth x \sum (-1)^s (2s+2) B_{2s+2}^{(2n+2)} K_{2s+2}(-2ik\,\mathrm{sh}\,x).$$

Il est également utile de considérer des fonctions correspondant au paramètre $-q$; elles se relient aux précédentes par les formules

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}e_{2n}\;(x, -q) &= (-1)^n\; \mathrm{C}e_{2n}\left(x + \frac{\pi i}{2}, q\right),\\
\mathrm{F}ek_{2n}\;(x, -q) &= (-1)^n\; \mathrm{F}ek_{2n}\left(x + \frac{\pi i}{2}, q\right),\\
\mathrm{S}e_{2n+1}\;(x, -q) &= (-1)^{n+1} i\, \mathrm{C}e_{2n+1}\left(x + \frac{\pi i}{2}, q\right),\\
\mathrm{G}ek_{2n+1}(x, -q) &= (-1)^n\; \mathrm{F}ek_{2n+1}\left(x + \frac{\pi i}{2}, q\right).
\end{aligned}$$

2° *Images symboliques.*

$$\mathrm{S}e_{2n+1}[\arg\mathrm{ch}(1+t), q] \supset \frac{\pi k \mathrm{B}_1^{(2n+1)}}{se_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)} \frac{p\, e^p}{\sqrt{p^2+4k^2}} \mathrm{G}ek_{2n+1}\left(\arg\mathrm{ch}\frac{ip}{2k}, q\right),$$

$$\mathrm{S}e_{2n+2}[\arg\mathrm{ch}(1+t), q] \supset \frac{\pi k^2 \mathrm{B}_2^{(2n+2)}}{se'_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)} \frac{p\, e^p}{\sqrt{p^2+4k^2}} \mathrm{G}ek_{2n+2}\left(\arg\mathrm{ch}\frac{ip}{2k}, q\right),$$

$$\frac{\mathrm{C}e_{2n}[\arg\mathrm{ch}(1+t), q]}{\sqrt{t^2+2t}} \supset \frac{\pi \mathrm{A}_0^{(2n)}}{ce_{2n}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)} p\, e^p\, \mathrm{F}ek_{2n}\left(\arg\mathrm{ch}\frac{ip}{2k}, q\right),$$

$$\frac{\mathrm{C}e_{2n+1}[\arg\mathrm{ch}(1+t), q]}{\sqrt{t^2+2t}} \supset -\frac{\pi k \mathrm{A}_1^{(2n+1)}}{ce'_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)} p\, e^p\, \mathrm{F}ek_{2n+1}\left(\arg\mathrm{ch}\frac{ip}{2k}, q\right),$$

$$\frac{\mathrm{C}e_{2n}[\arg\mathrm{ch}(1+t), q]}{\sqrt{t^2+2t}} \supset \frac{(-1)^n \pi \mathrm{A}_0^{(2n)}}{ce_{2n}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)} p\, e^p\, \mathrm{F}ek_{2n}\left(\arg\mathrm{sh}\frac{p}{2k}, -q\right),$$

$$\frac{\mathrm{C}e_{2n+1}[\arg\mathrm{ch}(1+t), q]}{\sqrt{t^2+2t}} \supset \frac{(-1)^{n+1} \pi k \mathrm{A}_1^{(2n+1)}}{ce'_{(2n+1)}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)} p\, e^p\, \mathrm{G}ek_{2n+1}\left(\arg\mathrm{sh}\frac{p}{2k}, -q\right),$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}e_{2n+1}[\arg\mathrm{ch}(1+t), q] \supset\; & \frac{(-1)^n \pi k \mathrm{B}_1^{(2n+1)}}{se_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}\\
& \times \frac{p\, e^p}{\sqrt{p^2+4k^2}} \mathrm{F}ek_{2n+1}\left(\arg\mathrm{sh}\frac{p}{2k}, -q\right),
\end{aligned}$$

$$\mathrm{S}e_{2n+1}[\arg\mathrm{ch}(1+t), -q] \supset \frac{\pi k \mathrm{A}_1^{(2n+1)}}{ce_{2n+1}(0, q)} \frac{p\, e^p}{\sqrt{p^2-4k^2}} \mathrm{G}ek_{2n+1}\left(\arg\mathrm{ch}\frac{p}{2k}, -q\right).$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}e_{2n+1}(t, q) \supset\; & \frac{(-1)^n \pi k \mathrm{B}_1^{(2n+1)}}{se_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}\\
& \times p \int_0^\infty \mathrm{I}_p(2k\,\mathrm{sh}\,u)\, \mathrm{F}ek_{2n+1}(u, -q)\, du.
\end{aligned}$$

20. — Fonctions diverses.

a. — Fonctions de Schlömilch.

$$t^{1-\nu} S(\nu, t) \supset \frac{p - p^{\nu}}{p - 1} \Gamma(1 - \nu)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{1}{t}} S\left(\nu, \frac{1}{t}\right) \supset 2\sqrt{p}\, e^{-2\sqrt{p}} S(2\nu - 1, 2\sqrt{p})$$

$$\frac{1}{t\sqrt{t}} e^{-\frac{1}{t}} S\left(\nu, \frac{1}{t}\right) \supset 2pe^{-2\sqrt{p}} S(2\nu, 2\sqrt{p})$$

b. — Fonctions théta.

$$\theta_2(0, \pi^2 t) \supset \sqrt{p}\, \mathrm{th}(4\sqrt{p})$$

$$\theta_4(\omega, \pi^2 t) \supset \sqrt{p}\, \frac{\mathrm{ch}\, 2\omega\sqrt{p}}{\mathrm{sh}\sqrt{p}}$$

c. — Fonction de Dirac.

$$\delta(t) \supset p$$

$$\delta'(t) \supset p^2$$

....

$$\delta^{(n)}(t) \supset p^{n+1}$$

21. — Fonctions discontinues.

$$[t] \supset \frac{1}{e^p - 1}, \qquad R(p) > 0$$

$$t - [t] \supset \frac{1}{p} - \frac{1}{e^p - 1}$$

$$t - [t] - \frac{1}{2} \supset \frac{d}{dp} \log \frac{p}{2\,\mathrm{sh}\,\frac{p}{2}}$$

$$\left[\frac{t+1}{2}\right] \supset \frac{1}{\mathrm{sh}\,p}$$

$$\left[\frac{t}{2} + 1\right] - \left[\frac{t+1}{2}\right] = \frac{1 + (-1)^{[t]}}{2} \supset \frac{1}{1 - e^{-p}}$$

$$a^{[t]} \supset \frac{e^p - 1}{e^p - a}$$

$$\frac{1 - a^{[t]}}{1 - a} \supset \frac{1}{e^p - a}$$

$$[e^t] \supset \zeta(p) \qquad R(p) > 1$$

$$e^t - [e^t] \supset \frac{p}{p-1} - \zeta(p), \qquad R(p) > 1$$

$$C^n_{[t]} \supset \frac{1}{(e^p - 1)^n}$$

$$C^n_{[t]}\, a^{[t-n]} \supset \frac{e^p - 1}{(e^p - a)^{n+1}}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{[t]} \supset \log \frac{1}{1 - e^{-p}}$$

$$\frac{B_{[t]}}{[t]!} \supset \frac{e^{-p}(1 - e^{-p})}{e^{e^{-p}} - 1}$$

Série de Fibonacci ($u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $\ldots$, $u_{n+1} = u_n - u_{n-1}$) :

$$u_{[t]} \supset \frac{e^p - 1}{e^{2p} - e^p - 1}$$

Fonction brusque unité :

$$U(t - a) \supset e^{-ap}$$

Fonction gradins :

$$U(t) + U(t - a) + U(t - 2a) + \ldots \supset \frac{1}{1 - e^{-ap}}$$

Fonction créneaux :

$$U(t) - U(t-a) + U(t-2a) + \dots \supset \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{ap}{2}$$

Si l'on pose, pour abréger, $\left[\frac{1+t}{2}\right] = \alpha$:

$$(-1)^{\alpha} \frac{\sin 2\pi\alpha\omega}{\cos \pi\omega} \supset \theta_1(\omega, 4p)$$

$$\frac{\sin 2\pi\alpha\omega}{\sin \pi\omega} \supset \theta_2(\omega, 4p)$$

Si l'on pose $[\sqrt{t}] = \beta$:

$$\frac{\sin(2\beta+1)\pi\omega}{\sin \pi\omega} \supset \theta_3(\omega, p)$$

$$(-1)^{\beta} \frac{\cos(2\beta+1)\pi\omega}{\cos \pi\omega} \supset \theta_4(\omega, p)$$

D. — RÉFÉRENCES.

Nous ne citons ici que quelques références à des publications récentes, renvoyant le lecteur aux listes données, soit dans le Formulaire, fascicule C du *Mémorial*, soit dans le fascicule CV, *Le calcul symbolique et ses applications à la physique mathématique*, par P. HUMBERT et S. COLOMBO.

1. GILLY (J.). — Les parties finies d'intégrales et la transformation de Laplace-Carson (*Revue Scientifique*, 83^e année. fasc. 5, 1945, p. 259-270).
2. HUMBERT (P.). — Quelques séquences symboliques (*Ann. Fac. Sci. Lyon*, 1942, p. 85-92).
3. HUMBERT (P.). — Sur les fonctions K de Bessel (*Mathematica*, t. XVII, 1941, p. 59-64).
4. HUMBERT (P.). — Nouvelles correspondances symboliques (*Bull. Sc. Math.*, 2^e série, t. 69, juillet-août 1945).
5. HUMBERT (P.) et POLI (L.). — Sur certaines transcendantes liées au calcul symbolique (*Bull. Sc. Math.*, 2^e série, t. 68, novembre-décembre 1944).
6. MC LACHLAN (N. W.). — A general theorem in Laplace transformations (*Math. Gazette*, t. 30, 1946, p. 85).
7. MC LACHLAN (N. W.). — Theory and application of Mathieu functions (*Oxford, Clarendon press*, 1947).
8. POLI (L.). — Sur deux règles du calcul symbolique (*Ann. Fac. Sc. Lyon*, 1945).
9. POLI (L.). — Sinus du N^{me} ordre et calcul symbolique (*Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, t. LX, sér. I, 1946, p. 15).
10. POLI (L.). — Nouveau théorème du produit (*Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, t. LXII, sér. I, 1949, p. 155).

Signalons d'un mot les importantes recherches de M. PARODI sur l'application du calcul symbolique à la résolution d'équations intégrales (*voir*, par exemple, *Bull. Sc. Math.*, 2^e série, t. 69, septembre 1945 et t. 70, juillet-août 1946, ou *Revue Scientifique*, fasc. 4, 1947, p. 233) ainsi que son ouvrage sur les *Applications physiques de la transformation de Laplace*, C. N. R. S., 1948.

Enfin, comme témoignage de l'intérêt suscité dans ces dernières années par le calcul symbolique et quoique leurs auteurs n'emploient pas les mêmes notations que nous, rappelons deux exposés récemment parus sur la question :

POTIER (R.) et LAPLUME (J.). — Le calcul symbolique et quelques applications à la Physique et à l'Électricité (*Actualités scientifiques*, Hermann, fasc. 947, 1943).

HERRENG (P.). — Les applications du calcul opérationnel (*Publication des laboratoires de l'École Normale Supérieure*, Masson, 1944).

TABLE DES MATIÈRES.