

L. BRILLOUIN

## **Influence de la température sur l'élasticité d'un solide**

*Mémorial des sciences mathématiques*, fascicule 99 (1940)

[http://www.numdam.org/item?id=MSM\\_1940\\_\\_99\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSM_1940__99__1_0)

© Gauthier-Villars, 1940, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémorial des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

BSM 3638

# MÉMORIAL

DES

# SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,  
DES ACADEMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,  
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),  
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

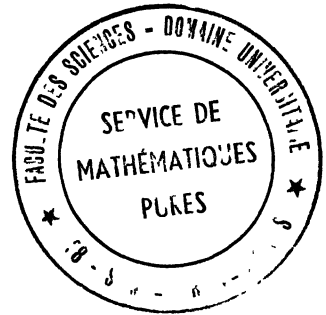
**Henri VILLAT**

Membre de l'Institut,  
Professeur à la Sorbonne,  
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE XCIX

Influence de la température sur l'élasticité d'un solide

Par M. L. BRILLOUIN



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR  
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
Quai des Grands-Augustins, 55

1940

**Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation  
réservés pour tous pays.**

---

## INTRODUCTION

---

Voilà longtemps déjà que je cherchais à traiter correctement le problème de l'influence de la température sur les propriétés élastiques des métaux. Un vieux travail de Sutherland, dont l'importance avait été soulignée par mon père, avait dégagé une loi empirique montrant la décroissance du coefficient de rigidité, et permettait d'envisager la fusion comme point limite où la rigidité s'annule. Aucune déduction théorique satisfaisante n'avait été proposée. Je me suis récemment rendu compte de l'erreur fondamentale faite par tous les auteurs, moi compris, et qui consistait en une analyse insuffisante du rôle de l'agitation thermique dans un solide déformé.

L'exposé que je présente ici comporte tout d'abord une analyse méthodique de la thermodynamique des solides isotropes, avec une conclusion essentielle, l'identité des coefficients de rigidité  $\mu$  isothermes et adiabatiques. Vient ensuite l'étude de l'agitation thermique, avec le rappel de la théorie des chaleurs spécifiques et de la dilatation thermique. J'expose alors les conditions d'agitation thermique dans un solide déformé, ce qui conduit à des calculs assez pénibles, mais indispensables pour une théorie correcte de l'influence de la température sur l'élasticité. La conclusion ressort alors nettement : la rigidité macroscopique décroît rapidement lorsque la température s'élève ; les approximations faites ne permettent pas de tracer de bout en bout la courbe de Sutherland, mais elles en font nettement pressentir l'allure. A température suffisamment élevée, la rigidité macroscopique doit tendre vers zéro, ce qui indique la fusion ; mais la rigidité microscopique reste alors finie ; les ondes transversales d'agitation thermique ne disparaissent pas à la fusion, et la chaleur spécifique doit rester celle d'un solide ( $3R$  à haute température), ce qui se vérifie effectivement. Rien dans ce schéma n'indique nettement l'origine de la chaleur latente de fusion, qui mériterait une étude spéciale.

---



---

# INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE

SUR

## L'ÉLASTICITÉ D'UN SOLIDE

Par L. BRILLOUIN

---

1. **La théorie quantique des solides, d'après Born et Debye.** — L'étude que je présente ici se rattache à la théorie quantique des solides, et plus particulièrement aux approximations qui permettent, d'après Debye, de raisonner sur un solide isotrope. Un solide véritable est un cristal, et l'isotropie grossière des solides usuels résulte ordinairement d'un enchevêtrement de microcristaux; néanmoins Voigt a montré qu'on pouvait définir un *solide isotrope idéal* en prenant, pour chaque propriété du cristal, la moyenne sur toutes les orientations possibles; un tel solide isotrope redonne à peu près les propriétés du corps isotrope usuel; il présente l'intérêt de se définir d'une manière rigoureuse, et de fournir en tout cas des renseignements moyens sur les propriétés du cristal. J'ai exposé et discuté très en détail, dans un livre récent <sup>(1)</sup>, la théorie de Debye, qui se justifie complètement par la remarque de Voigt. J'ai indiqué, dans ce *Traité* (p. 344), le principe des calculs que je vais exposer ici, et j'ai montré les insuffisances de plusieurs raisonnements publiés à ce sujet.

---

<sup>(1)</sup> L. BRILLOUIN, *Les tenseurs en mécanique et en élasticité*, Chap. XII. Masson, Paris, 1937. Ce livre sera cité toujours comme *Tenseurs*.

Voir aussi : L. BRILLOUIN, *La structure des corps solides*, (*A. S. I.*, n° 549, Hermann, Paris, 1937).

**2. Position du problème.** — Considérons un solide isotrope dont les atomes constituants seraient au repos ( $T = 0$  et agitation au zéro négligeable), sous pression extérieure nulle. Nous pourrions définir une densité d'énergie potentielle  $\mathcal{E}_0$ , qui s'exprimerait comme fonction des déformations éventuelles, et comprendrait les coefficients d'élasticité  $\lambda_0, \mu_0, A_0, B_0, C_0$  fondamentaux. A la température  $T$ , ce ne sont pas ces coefficients que l'on peut atteindre; le corps a subi une dilatation thermique  $\alpha$  uniforme, sous l'influence des pressions des ondes d'agitation thermique; chaque dimension du solide se trouve multipliée par un facteur  $(1 + \alpha)$ , et l'on peut, à partir de cette nouvelle configuration, prise comme état initial, calculer la densité d'énergie potentielle  $\mathcal{E}$  en fonction des déformations éventuelles surajoutées.

Cette densité d'énergie potentielle statique  $\mathcal{E}$  s'exprimera au moyen de coefficients d'élasticité  $\lambda, \mu, A, B, C$  qu'on pourra calculer à partir des coefficients  $\lambda_0, \mu_0, A_0, B_0, C_0$  et de la dilatation  $\alpha$ ; la pression  $p$  qui serait nécessaire statiquement pour provoquer la dilatation  $\alpha$  figurera aussi dans l'expression  $\mathcal{E}$  (1).

En plus de ces termes statiques, nous devons tenir compte de l'agitation thermique du solide, laquelle se compose d'ondes élastiques se propageant en tous sens, et présentant une limite vers les courtes longueurs d'onde. L'étude de ces ondes nous permettra de calculer la densité  $U(T)$  d'énergie d'agitation thermique et la densité  $S$  d'entropie.

Au total, nous aurons donc les expressions de

- (1)  $E = \mathcal{E} + U$                     densité totale d'énergie;  
 (2)  $F = \mathcal{E} + U - TS$             densité totale de potentiel thermodynamique.

Il semble alors que nous puissions calculer, à la température  $T$ , les coefficients d'élasticité  $\lambda(T)$  et  $\mu(T)$  du solide; mais c'est ici qu'intervient une *difficulté sérieuse*: nous connaissons bien  $\mathcal{E}$  (énergie potentielle statique) comme fonction de déformations éventuelles arbitraires; pour  $U$  et  $S$  il n'en est pas de même, ces grandeurs sont ordinairement calculées dans l'hypothèse d'un solide constamment isotrope; on étudie la propagation des ondes d'agitation thermique uniquement pour un corps isotrope, où ces ondes présentent les types usuels (longitudinal et transversal); les ondes

---

(1) Tout ceci est développé et détaillé au paragraphe 6, page 16.

ne sont pas, en général, discutées pour le cas d'un solide soumis préalablement à une déformation arbitraire; les expressions de  $U$  et  $S$  sont données, comme résultat du calcul, par des fonctions du volume spécifique  $\nu$  et de la température  $T$ ; elles permettent de calculer la dilatation thermique (isotrope) et aussi le coefficient de compressibilité (car celui-ci ne fait intervenir qu'une variation de volume réalisée isotropiquement). Les expressions de  $U$  et  $S$ , telles qu'on les écrit ordinairement, ne peuvent rien nous apprendre sur ce qui se passe lors d'autres déformations du solide (allongement dans une direction, ou glissement) parce que le calcul correspondant n'a pas été fait.

Telle est l'erreur commise par divers auteurs (en particulier par moi-même; *C. R. Acad. Sc.*, t. 192, 1931, p. 668) et que l'on retrouve, par exemple, dans l'exposé de Grüneisen (*Handbuch der Physik*, t. 10, p. 23).

Le calcul à faire se conçoit maintenant clairement : prendre le solide à température  $T$ , le soumettre à une petite déformation homogène arbitraire, calculer les ondes d'agitation thermique dans ce solide déformé et obtenir les expressions complètes de  $U$  et  $S$  qui seront alors des fonctions de la déformation supposée. On obtiendra ainsi les fonctions  $E$  ou  $F$  sous leur aspect complet, et l'on en tirera les valeurs  $\lambda(T)$  et  $\mu(T)$  des coefficients d'élasticité.

En fait, on peut simplifier un peu le problème; nous avons vu que la théorie usuelle donne déjà l'expression correcte du module de compressibilité

$$(3) \quad \kappa = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} = \frac{1}{\chi} \quad (\chi, \text{compressibilité}),$$

il nous suffira d'étudier ce qui se passe dans le cas d'une déformation non isotrope simple, pour obtenir une autre relation entre  $\lambda$  et  $\mu$  et trouver ainsi les valeurs des deux coefficients. Comme déformation simple, j'ai choisi un allongement dans une direction  $x$ , les dimensions suivant  $y$  et  $z$  restant invariables; cette dilatation unilatérale fait intervenir la combinaison

$$(4) \quad \lambda + 2\mu$$

et permet de calculer les deux coefficients séparément.

### 3. Coefficients d'élasticité isothermes, adiabatiques et instantanés.

— Il importe de distinguer nettement les coefficients d'élasticité



qui interviendront dans diverses circonstances; si nous partons de l'expression du potentiel thermodynamique  $F(2)$  nous obtenons les coefficients  $\lambda_T$  et  $\mu_T$  *isothermes*. Nous pouvons nous baser sur l'expression  $E$  de l'énergie totale et nous en tirons les coefficients  $\lambda_S \mu_S$  *adiabatiques*; ce sont ces coefficients qui régissent la propagation des *ondes acoustiques* et *ultra-sonores*. Le processus adiabatique ne peut pourtant pas s'établir si les fréquences sont trop élevées, car il suppose que l'énergie d'agitation thermique  $U(T)$  (1) prenne part aux phénomènes étudiés et se modifie avec la fréquence de l'onde imposée; or on sait que la transformation d'un système de radiations ne peut se produire adiabatiquement que si la vitesse de la modification du système est très lente; il suffit de se reporter, sur ce point, à tous les exposés relatifs à la *loi de Wien* pour le corps noir, ou aux *invariants adiabatiques d'Ehrenfest*. La transformation de l'énergie  $U(T)$  des radiations élastiques thermiques ne suit la loi adiabatique que si la fréquence  $\nu$  de cette transformation est très faible devant la fréquence  $\nu_D$  limite de Debye, ou fréquence d'accumulation des radiations thermiques; dans ce cas seulement, les équilibres entre les radiations thermiques ont le temps de s'établir. Nous pouvons exprimer ce fait sous une forme un peu différente: l'énergie thermique  $U(T)$  est composée d'ondes élastiques à fréquences très élevées, voisines de la limite  $\nu_D$  (ordre de grandeur  $10^{13}$ ); ces vibrations exercent des efforts moyens, du type des *pressions de radiations*, qui se manifestent seulement si l'on observe lentement, de façon à prendre les moyennes sur un grand nombre d'oscillations  $\nu_D$ . Ces forces moyennes interviennent, dans la propagation d'ondes sonores ou ultra-sonores ( $\nu < 10^{10}$ ), et sont contenues dans le calcul des coefficients d'élasticité  $\lambda_S$  et  $\mu_S$  adiabatiques, où l'on tient compte du rôle joué par l'énergie d'agitation thermique  $U(T)$ .

Au contraire, si l'on étudie des ondes de fréquences  $\nu$  plus élevées (les *hypersons* de Raman) comme les ondes élastiques d'agitation thermique elles-mêmes, toute influence des termes  $U(T)$  doit disparaître: la modification  $\nu$  est trop rapide pour être considérée comme adiabatique, vis-à-vis des autres ondes thermiques  $\nu_D$ ; les pressions de radiation de ces ondes  $\nu_D$  n'ont pas le temps d'intervenir; d'ailleurs, l'onde  $\nu$  étudiée et les ondes  $\nu_D$  ont même vitesse de propagation et des coefficients d'affaiblissement très voisins; ces ondes se superposent sans s'influencer mutuellement d'une manière notable;

elles obéissent aux coefficients d'élasticité  $\lambda$ ,  $\mu$  purement déduits de l'énergie potentielle  $\mathcal{E}$ .

Les ondes thermiques (fréquences  $\nu_D \sim 10^{13}$ ) ont des longueurs d'onde  $\Lambda$  de l'ordre de  $2d$  ( $d$ , distance entre atomes) et peuvent parcourir des distances  $l$  de quelques intervalles  $d$ , comme l'a montré R. Lucas (1). Comparons les longueurs d'onde  $\Lambda$  des ondes élastiques au libre parcours  $l$  des ondes thermiques, nous aurons les relations suivantes :

$$\begin{array}{ll} \Lambda < l & \text{hypersons, ondes d'agitation thermique } \nu > 10^{10}, \\ \Lambda \geq l & \text{ultra-sons et ondes sonores } \nu < 10^{10}. \end{array}$$

Les ondes sonores et ultra-sonores sont régies par les coefficients d'élasticité  $\lambda_S$  et  $\mu_S$  adiabatiques; *les ondes thermiques sont gouvernées par les coefficients  $\lambda$ ,  $\mu$  instantanés* qui figurent dans l'énergie purement potentielle  $\mathcal{E}$ .

Ce que je veux étudier dans cet article, c'est particulièrement la loi de variation des coefficients macroscopiques ( $\lambda_T$ ,  $\mu_T$  isothermes, ou  $\lambda_S \mu_S$  adiabatiques) en fonction de la température, et je compte insister sur la différence entre ces coefficients macroscopiques, observés pour toute variation lente, et les coefficients instantanés  $\lambda$ ,  $\mu$ ; ces coefficients instantanés ne dépendent de la température que par l'intermédiaire de la dilatation thermique. Leur variation est lente et régulière; les coefficients macroscopiques seront caractérisés par une loi particulière de décroissance : *lorsqu'on élève la température, le coefficient de rigidité  $\mu_T$  diminue plus vite que  $\lambda_T$ .*

On peut alors se demander ce qui se passera, à une température assez haute pour que la rigidité macroscopique s'annule ( $\mu_T = 0$ ). Le corps considéré dans son ensemble sera fluide; il deviendra incapable de propager des ondes transversales lentes (sonores ou ultra-sonores), mais il possédera toujours ses deux coefficients instantanés  $\lambda$ ,  $\mu$ , de sorte que la propagation des ondes thermiques pourra se faire sous forme longitudinale ou transversale; la chaleur spécifique sera donc celle d'un solide. Ce point de vue se raccorde fort étroitement à celui que j'ai développé voici deux ans (2), sur la

(1) *Journ. de Phys.*, t. 8, 1937, p. 410; voir particulièrement p. 424 et 425.

(2) L. BRILLOUIN, *Journ. de Phys.*, t. 7, 1936, p. 153; *Trans. Faraday Soc.*, t. 33, 1937, p. 54.

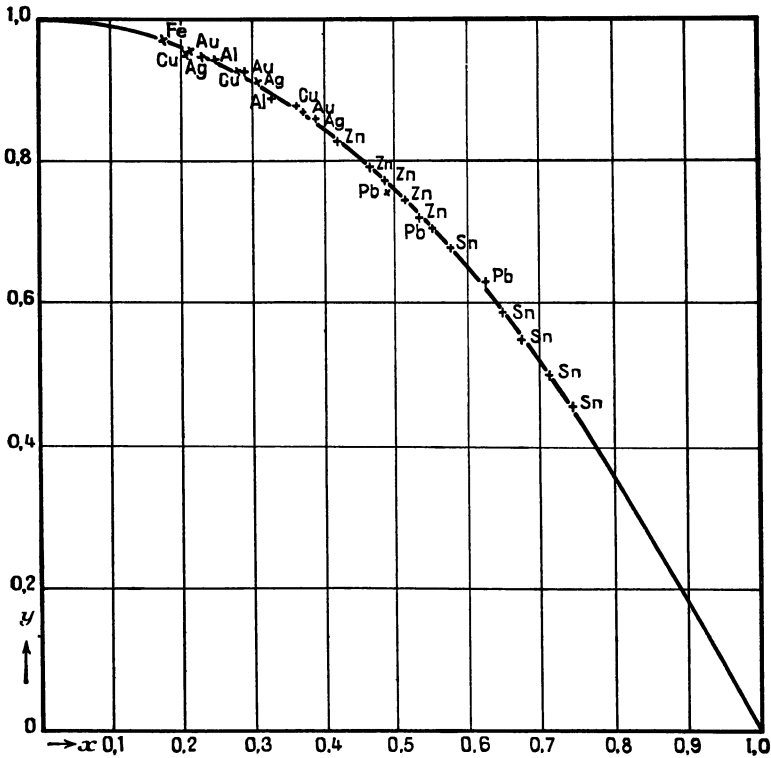
structure des liquides, et précise les remarques faites dans mon livre récent (*Tenseurs*, p. 345 et p. 349).

Mon père avait insisté, en 1898, sur l'importance d'une loi empirique de Sutherland (<sup>1</sup>), valable pour les corps simples,

$$(5) \quad \mu_T = \mu_0 \left( 1 - \frac{T^2}{T_0^2} \right),$$

où  $T_0$  est la température absolue de fusion et  $\mu_0$  la rigidité au zéro absolu; d'après les mesures anciennes, cette loi semblait s'appli-

Fig. 1.



Courbe montrant la parabole  $y = 1 - x^2$  de  $x = 0$  à  $x = 1$  et aussi les points

$$y = \frac{n}{N}, \quad x = \frac{\theta}{T}$$

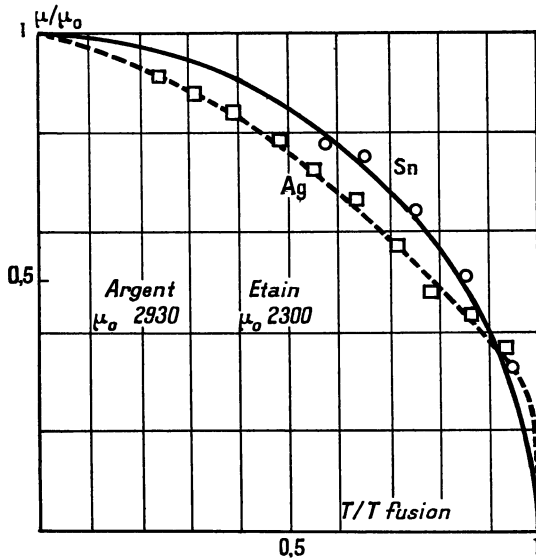
pour les métaux.

(<sup>1</sup>) M. BRILLOUIN, *Ann. de Phys. et Chim.*, t. 13, 1898, p. 265. — SUTHERLAND, *Phil. Mag.*, t. 32, 1891, p. 31, 215, 524 (figure, p. 42). — M. BRILLOUIN, *Ann. de Phys.*, t. 1, 1914, p. 433.

quer très convenablement pour l'étain, le plomb, le zinc, l'argent, le platine ou l'or (*fig. 1*). Sutherland avait développé, déjà à cette époque, une théorie cinétique des solides où les vibrations des atomes jouaient le rôle essentiel, la fusion se présentant lorsque les vibrations trop intenses cessaient d'être centrées sur un point. Cette conception a été précisée depuis par la formule de Lindemann.

Les mesures récentes ne permettent plus de croire à l'existence d'une

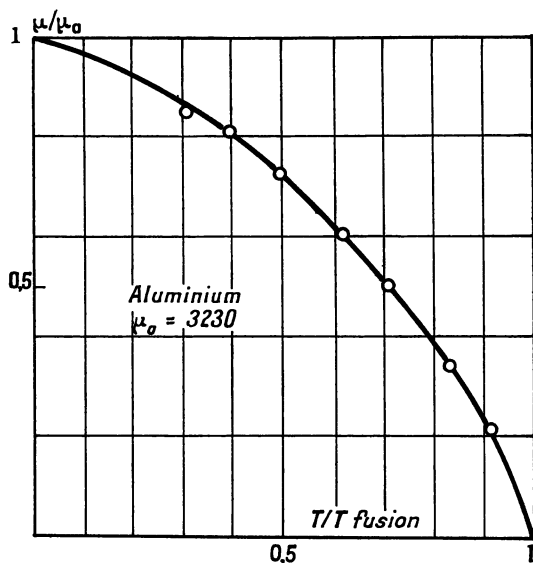
Fig. 2.



courbe unique, pour tous les solides, comme celle de Sutherland. Je tiens à l'obligeance de A. Jaquerod, de Neuchatel, les courbes des figures 2, 3 et 4, tracées d'après les mesures de Koch et Dannecker (*Ann. der Physik*, t. 47, 1915, p. 197). Tous ces diagrammes se rapportent à des métaux ne présentant pas de transformation allotropique; les courbes sont toutes différentes, chaque solide manifestant nettement son caractère propre; mais, dans tous les cas, on retrouve toujours la même règle générale : la rigidité tend vers zéro à la température de fusion; les mesures n'ont pas été poursuivies assez près du point de fusion pour qu'on puisse savoir si la rigidité  $\mu_T$  tend vers zéro d'une façon continue ou s'il se produit une discontinuité

à la fusion. Il semble raisonnable, en première approximation, d'admettre que *la condition*  $\mu_T = 0$  *caractérise la fusion*, sans toutefois oublier la possibilité d'une petite discontinuité, et surtout sans omettre le fait que ce critérium n'explique pas la chaleur latente de fusion.

Fig. 3.



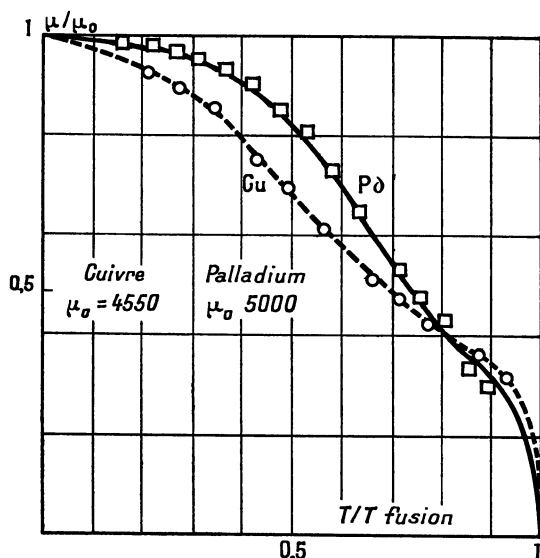
Bien d'autres études expérimentales seraient à discuter d'après ce point de vue; les citations ci-jointes <sup>(1)</sup> ne sont données qu'à titre d'indication; et l'on ne saurait trop souligner l'intérêt qu'il y aurait à reprendre méthodiquement les mesures des coefficients d'élasticité de part et d'autre de la température de fusion, comme aussi autour des points de transformation allotropique. Deux Notes publiées en 1938 <sup>(2)</sup>, et résumant ces conceptions, n'avaient d'autre but que d'attirer sur ce point l'attention des expérimentateurs. L'étude théorique publiée ici a été construite sur les bases de la conception

<sup>(1)</sup> A. JAQUEROD et MÜGELI, *Helvetica physica acta*, t. I, 1928, p. 139; t. II, 1929, p. 419; t. IV, 1931, p. 3. LAWSON, SCHEIB, *Phys. Rev.*, t. 55, 1939, p. 1268. QUIMBY, SIEGEL, *Phys. Rev.*, t. 54, 1938, p. 293. O. BENDER, *Ann. der Physik*, t. 34, 1939, p. 359. ERFLING, *Ann. der Physik*, t. 34, 1939, p. 136.

<sup>(2)</sup> L. BRILLOUIN, *Phys. Rev.*, t. 54, 1938, p. 916; t. 55, 1939, p. 1139; *Proceedings Indian Acad. Sc.*, t. 8, 1938, p. 251.

de Debye pour solide isotrope. Les mêmes idées ont été reprises récemment par M. Born <sup>(1)</sup>, qui part de la structure réticulaire des cristaux, et des lois d'interaction entre les atomes constituants. Cette méthode permet d'aller beaucoup plus loin que l'étude du solide

Fig. 4.



isotrope et Born arrive à retrouver des courbes très analogues à celles des figures 1 à 4.

**4. Rappel de formules thermodynamiques; corps fluide.** — La première précaution à prendre, c'est de bien préciser le cadre thermodynamique de la théorie, de manière à en tirer tous les renseignements généraux possibles, et à ne recourir à des calculs détaillés que pour préciser et compléter les informations fournies par la thermodynamique.

La thermodynamique des corps fluides a été développée très méthodiquement; celle des solides n'est en général exposée que d'une manière trop sommaire, nous en reprendrons donc l'exposé détaillé au prochain paragraphe. Pour le moment, nous rappellerons les princi-

<sup>(1)</sup> M. BORN, *C. R. Institut. Sc. Roumanie*, t. 3, 1939, p. 405.

pales *formules relatives aux fluides*. Ces formules seront directement applicables aux corps solides, si l'on spécifie qu'on se limite à des dilatations ou compressions isotropes, sans glissements. Nous aurons donc à bien séparer, parmi les déformations imposées au corps solide, les variations de volume conservant le caractère isotrope et les glissements; pour les premières le cadre thermodynamique des fluides s'appliquera sans changement; pour les secondes, on se rapportera au prochain paragraphe.

Pour ne pas répéter des démonstrations classiques, je renvoie à la Thermodynamique (1) de Bruhat, pour toutes ces formules classiques relatives aux fluides; nous emploierons les mêmes notations que cet auteur:  $dv_T$  indique une variation de volume à température constante et  $\frac{dv_T}{dp}$  la dérivée prise à T constant. Rappelons alors les définitions usuelles; lorsqu'on déforme un corps en l'échauffant, la chaleur  $dQ$  fournie à ce corps peut être écrite

$$(6) \quad T dS = dQ = C_p dT_p + h dp_T \quad \text{variables } T, p, \\ = c_v dT_v + l dv_T \quad \text{variables } T, v,$$

cette formule définit les chaleurs spécifiques  $C_p$  et  $c_v$  à pression ou volume constant et les chaleurs latentes  $h$  (de compression) ou  $l$  (de dilatation). On trouve alors la relation (Bruhat, p. 88)

$$(7) \quad l = (C_p - c_v) \frac{dT}{dv_p}$$

et les *formules de Clapeyron* (Bruhat, p. 167)

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} l = T \frac{dp_v}{dT}, \quad h = -T \frac{dv_p}{dT}, \\ C_p - c_v = T \frac{dp_v}{dT} \frac{dv_p}{dT} = -T \left( \frac{dv_p}{dT} \right)^2 \frac{dp_T}{dv}. \end{array} \right.$$

Définissons alors les compressibilités  $\chi$  ou les modules de compressibilité  $\kappa$  isothermes et adiabatiques :

$$(9) \quad \frac{1}{\kappa_T} = \chi_T = -\frac{1}{v} \frac{dv_T}{dp}, \quad \frac{1}{\kappa_S} = \chi_S = -\frac{1}{v} \frac{dv_S}{dp}$$

et nous trouvons la *relation de Reech* (Bruhat, p. 89)

$$(10) \quad \gamma = \frac{C_p}{c_v} = \frac{\kappa_S}{\kappa_T} = \frac{\chi_T}{\chi_S}$$

---

(1) G. BRUHAT, *Cours de Thermodynamique*, 2<sup>e</sup> éd., Masson, Paris, 1933.

Lorsque nous élevons la température d'un fluide, nous pouvons opérer à volume ou à pression constante et mesurer

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{\nu} \frac{d\nu_p}{dT} \quad \text{coefficient de dilatation à } p \text{ constant,} \\ \beta = \frac{1}{p} \frac{dp_\nu}{dT} \quad \text{coefficient d'augmentation de pression à } \nu \text{ constant,} \end{array} \right.$$

ces deux grandeurs ne sont naturellement pas indépendantes, et se rattachent à celles que nous avons définies plus haut (Bruhat, p. 256)

$$(12) \quad \beta p = \frac{dp_\nu}{dT} = - \frac{dp_T}{d\nu} \frac{d\nu_p}{dT} = \alpha \kappa_T,$$

de sorte que les formules (8) de Clapeyron se transcrivent

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_p - c_\nu = \alpha^2 T \nu \kappa_T = \alpha \nu l, \\ l = \beta T p = \alpha \kappa_T T, \\ h = - \alpha T \nu. \end{array} \right.$$

Diverses fonctions sont importantes à définir pour caractériser l'état d'un corps : ce sont l'énergie totale E, l'entropie S et le potentiel thermodynamique F ou énergie libre. Appelons dQ (ou T dS) la *chaleur fournie au système* pendant une transformation et d $\mathcal{E}_e$  le travail des forces extérieures appliquées au système, ou *travail fourni au système*; dans le cas des fluides on aura

$$d\mathcal{E}_e = - p d\nu,$$

mais pour les solides, les variables de configuration seront multiples, et ne se réduiront pas au seul volume, de sorte que l'expression du travail d $\mathcal{E}_e$  sera plus complexe.

On connaît alors les expressions classiques

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} dE = dQ + d\mathcal{E}_e = T dS + d\mathcal{E}_e \quad \text{variables } S, \nu, \\ F = E - TS, \\ dF = - S dT + d\mathcal{E}_e \quad \text{variables } T, \nu. \end{array} \right.$$

Si E est exprimé en fonction de S et  $\nu$ , pour un fluide, et si F porte sur les variables T,  $\nu$ , on tire des formules (14) les relations

$$(14 \text{ bis}) \quad p = - \frac{\partial E_S}{\partial \nu} = - \frac{\partial F_T}{\partial \nu}, \quad T = \frac{\partial E_\nu}{\partial S}, \quad S = - \frac{\partial F_\nu}{\partial T}.$$



Reportons-nous aux définitions (6); nous en tirons

$$dE = c_v dT + (l - p) dv$$

qui correspond à la différentielle de E, comme fonction de T, v; nous voyons donc que  $l - p$  représente  $\frac{\partial E_T}{\partial v}$ ; portons cette valeur de  $l$  dans (13) et nous obtenons

$$(15) \quad c_p - c_v = \left( p + \frac{\partial E_T}{\partial v} \right) \alpha v, \quad \alpha v = \frac{dv_p}{dT},$$

expression signalée par Bruhat (p. 257); le premier terme est prépondérant pour les gaz, mais dans le cas des liquides, le second est le plus important.

Toutes ces formules sont applicables telles quelles aux *solides* aussi longtemps qu'on ne leur fait subir que des *dilatations ou compressions isotropes*, sans glissements. Si l'on se permet de déformer le solide à volonté, il faut compléter l'expression du travail  $d\mathcal{E}_e$  et mettre en évidence, en plus du volume, des variables capables de caractériser la déformation.

**5. Déformation d'un solide; solide isotrope initialement; invariants de la déformation.** — Soient  $x_1, x_2, x_3$  les trois coordonnées cartésiennes d'un point du solide, dans sa configuration initiale, et  $u_1, u_2, u_3$  les composantes du déplacement de ce point, pendant la déformation. Nous définirons un tenseur dont les composantes  $e_{ik}$  représentent la déformation subie par le corps solide [*Tenseurs*, p. 220 (X. 26)]

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Dilatations} \dots \dots \quad e_{11} = 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2, \\ \text{Glissements} \dots \quad e_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}. \end{array} \right.$$

Au moyen de ces six composantes  $e_{ik}$  on peut former diverses expressions, qui restent invariantes lors d'un changement d'axes de coordonnées (rotation des axes) (*Tenseurs*, p. 227)

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{ll} I_1 = e_{11} + e_{22} + e_{33} & \text{invariant du 1}^{\text{er}} \text{ degré,} \\ I_2 = e_{11}^2 + e_{22}^2 + 2e_{33}^2 + 2e_{12}^2 + 2e_{23}^2 + 2e_{31}^2 & \text{» » 2}^{\text{e}} \text{ » ,} \\ I_3 = e_{11}^3 + \dots + 3e_{11}(e_{12}^2 + e_{13}^2) + \dots + 6e_{12}e_{23}e_{31} & \text{» » 3}^{\text{e}} \text{ » .} \end{array} \right.$$

Au lieu de ces combinaisons certains auteurs emploient les suivantes :

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} K_1 &= I_1 = e_{11} + e_{22} + e_{33}, \\ K_2 &= \frac{1}{2}(I_1^2 - I_2) = (e_{11}e_{22} - e_{12}^2) + (\dots) + (\dots), \\ K_3 &= \frac{1}{6}I_1^3 - \frac{1}{2}I_1I_2 + \frac{1}{3}I_3 \\ &= e_{11}e_{22}e_{33} + 2e_{12}e_{23}e_{31} - e_{11}e_{23}^2 - e_{22}e_{31}^2 - e_{33}e_{12}^2. \end{aligned} \right.$$

Ces trois invariants, les I ou les K, suffisent à caractériser complètement la déformation, pour un corps isotrope, car on doit considérer comme équivalentes deux déformations qui se ramènent l'une à l'autre par une simple rotation.

Nous pouvons toujours ramener la déformation à ses axes principaux, c'est-à-dire choisir trois directions orthogonales  $y_1, y_2, y_3$  de telle façon que les déplacements  $(v_1, v_2, v_3)$  rapportés à ces axes donnent seulement trois dilatations mais pas de glissements; cette condition s'exprime par le fait que  $\frac{\partial v_1}{\partial y_1}, \frac{\partial v_2}{\partial y_2}$  et  $\frac{\partial v_3}{\partial y_3}$  sont différents de zéro, tandis que les  $\frac{\partial v_i}{\partial y_k} (i \neq k)$  sont tous nuls. Appelons  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$  et  $\varepsilon_{33}$  les trois dilatations principales, les formules (16) se réduisent alors à

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= 2 \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial y_1}\right)^2 = \left(1 + \frac{\partial v_1}{\partial y_1}\right)^2 - 1, \\ \varepsilon_{ik} &= 0 \quad (i \neq k). \end{aligned} \right.$$

Les invariants s'expriment très simplement en fonction des trois dilatations principales

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} I_1 &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = K_1, \\ I_2 &= \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2, & K_2 &= \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}\varepsilon_{11}, \\ I_3 &= \varepsilon_{11}^3 + \varepsilon_{22}^3 + \varepsilon_{33}^3, & K_3 &= \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}, \end{aligned} \right.$$

ce qui signifie que les  $\varepsilon$  sont les trois racines de l'équation

$$(21) \quad \varepsilon^3 - K_1\varepsilon^2 + K_2\varepsilon - K_3 = 0.$$

La *variation relative de volume* du solide ne correspond à aucun de ces invariants; son expression rigoureuse est particulièrement simple, dans le système d'axes principaux  $y_1, y_2, y_3$ , car les formules

[*Tenseurs*, p. 227 (X. 55) et p. 228 (X. 57)] se réduisent à

$$(22) \quad \begin{cases} \Delta = 1 + \frac{\delta V}{V} = \left(1 + \frac{\partial v_1}{\partial y_1}\right) \left(1 + \frac{\partial v_2}{\partial y_2}\right) \left(1 + \frac{\partial v_3}{\partial y_3}\right), \\ \Delta^2 = (1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22})(1 + \varepsilon_{33}) = 1 + K_1 + K_2 + K_3, \end{cases}$$

d'où l'on tire, en extrayant la racine carrée et regroupant les termes,

$$(23) \quad \begin{aligned} \frac{\delta V}{V} = \Delta - 1 &= \frac{1}{2} K_1 + \frac{1}{2} K_2 - \frac{1}{8} K_1^2 + \frac{1}{2} K_3 - \frac{1}{4} K_1 K_2 + \frac{1}{16} K_1^3 + \dots \\ &= \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{8} I_1^2 - \frac{1}{4} I_2 + \frac{1}{48} I_1^3 - \frac{1}{8} I_1 I_2 + \frac{1}{6} I_3 + \dots \end{aligned}$$

en accord avec la formule (X. 59) (*Tenseurs*, p. 228).

C'est au moyen des invariants I que j'avais écrit les développements de l'énergie en fonction des déformations, pour un solide isotrope. Les remarques du paragraphe précédent montrent l'intérêt que présente l'isolement des termes de variation de volume et leur séparation des glissements purs. Cette opération peut se faire aisément, par un procédé indiqué par Fokker (1) et que nous allons examiner maintenant.

Une dilatation isotrope se traduit par le fait que les trois dilatations principales  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$  et  $\varepsilon_{33}$  sont égales; nous isolerons un terme de glissement pur en formant une expression qui s'annule dans ce cas et seulement alors; la plus simple formule de ce genre est

$$(24) \quad H_2 = (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 = 3I_2 - I_1^2 = 2K_1^2 - 6K_2,$$

c'est un invariant du second degré, qui reste toujours positif ou nul, et la condition  $H_2 = 0$  nous garantit l'égalité des trois  $\varepsilon$ , donc une dilatation isotrope.

Si nous voulons être complets, il faut ajouter à  $\frac{\delta V}{V}$  et  $H_2$  un invariant du 3<sup>e</sup> degré, tel que

$$(25) \quad H_3 = \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} - \frac{1}{9} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) (\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} + \varepsilon_{33} \varepsilon_{11}) = K_3 - \frac{1}{9} K_1 K_2$$

ou toute autre combinaison analogue, qui fasse intervenir le troisième

(1) *Physica*, t. 5, 1938, p. 31.

invariant  $I_3$  (ou  $K_3$ ) de notre analyse précédente, et qui présente comme  $H_2$  le caractère de s'annuler pour une dilatation isotrope.

Tant que nous nous en tiendrons aux petites déformations, l'invariant  $H_3$ , du 3<sup>e</sup> degré, pourra être négligé et nous n'aurons à faire intervenir explicitement que

$$\frac{\delta V}{V} \text{ et } H_2.$$

Nous partirons de formules écrites en fonction de  $I_1, I_2, I_3$ ; pour les transformer et faire apparaître  $\frac{\delta V}{V}, H_2, H_3$ , il nous faut exprimer les  $I$  en fonction de nos nouveaux invariants, ce qui se résout ainsi, à l'approximation des termes du second degré, par rapport aux déformations :

$$(26) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} I_1 = \frac{\delta V}{V} - \frac{1}{6} \left(\frac{\delta V}{V}\right)^2 + \frac{1}{12} H_2 + \dots, & I_1^2 = 4 \left(\frac{\delta V}{V}\right)^2 + \dots, \\ I_2 = \frac{4}{3} \left(\frac{\delta V}{V}\right)^2 + \frac{1}{3} H_2 + \dots \end{cases}$$

On pourrait pousser les développements jusqu'aux termes du 3<sup>e</sup> degré, mais nous n'en aurons guère besoin pour la discussion ultérieure.

**6. Énergie potentielle, énergie, énergie libre, entropie dans un solide isotrope.** — Partons d'un solide isotrope, en équilibre, sous pression nulle, et dont les atomes ne seraient soumis à aucune agitation, restant au repos dans leurs positions d'équilibre; c'est ce qui se réalise approximativement au zéro absolu, où ne subsiste qu'une très faible agitation résiduelle d'origine quantique. Si nous déformons ce corps élastique statique, nous faisons apparaître une énergie potentielle élastique dont voici l'expression, rapportée à l'unité de volume du corps dans l'état initial,

$$(27) \quad \mathcal{E}_0 = e_0 + \frac{\lambda_0}{8} I_1^2 + \frac{\mu_0}{4} I_2 + A_0 I_1 I_2 + B_0 I_1^3 + C_0 I_3 + \dots,$$

c'est la *densité d'énergie potentielle élastique*.

Les  $I_1, I_2, I_3$  sont les invariants de la déformation;  $e_0$  représente la densité d'énergie du solide non déformé;  $\lambda_0$  et  $\mu_0$  sont les coefficients d'élasticité de Lamé et  $A_0, B_0, C_0$  les coefficients des termes du

3° degré, responsables des écarts réversibles aux lois de Hooke (*Tenseurs*, p. 231, 234, 242).

Nous pouvons prendre les coefficients  $\lambda_0, \mu_0, A_0, B_0, C_0$  de cette formule comme des données empiriques, que nous aurons à calculer d'après les mesures d'élasticité à basse température. Une autre conception sera de rechercher des évaluations théoriques de ces coefficients : considérons un cristal, de structure donnée, supposons connue la loi des forces agissant entre les atomes du réseau cristallin ; nous pourrions calculer [au moins en théorie (1)] les coefficients statiques d'élasticité du cristal, comme l'a fait M. Born ; prenons alors la moyenne pour toutes les orientations du cristal et nous obtiendrons les coefficients d'élasticité du corps isotrope idéal, équivalent au cristal moyen ; ces coefficients nous permettront donc de former l'expression (27). De toutes façons, soit qu'on parte de l'expérience, soit qu'on se place au point de vue théorique, les coefficients usuels  $\lambda_0, \mu_0$  seront assez bien connus, tandis que les coefficients  $A_0, B_0, C_0$  des termes du 3° degré sont mal étudiés ; c'est pourtant sur eux que repose toute la théorie de la dilatation thermique ; ils gouvernent aussi les effets que je veux étudier dans cet exposé, à savoir les variations de  $\lambda$  et  $\mu$  en fonction de la température. Je discuterai plus loin ce qu'on peut dire sur les ordres de grandeur des  $A_0, B_0, C_0$  en m'appuyant sur les évaluations indiquées dans mon livre récent (*Tenseurs*, p. 305 et 339).

Nous nous sommes donc donné un corps isotrope au zéro absolu, sous pression extérieure nulle ; son volume spécifique est  $V_0$  ; effectuons maintenant une dilatation uniforme  $\alpha$  ; toutes les dimensions du solide sont multipliées par  $(1 + \alpha)$  et le volume spécifique passe de  $V_0$  à  $V$

$$V = V_0(1 + \alpha)^3.$$

A partir de ce nouvel état, homogène isotrope, pris comme état initial du corps solide, effectuons une nouvelle déformation quelconque ; nous formerons les invariants  $I_1, I_2, I_3$  de cette déformation et nous écrirons l'énergie potentielle élastique, rapportée à un volume unité

1) Des calculs de ce genre ont été poussés assez loin, pour les métaux alcalins par Wigner et Seitz, Slater, Fröhlich ; voir par exemple H. FRÖHLICH, *Proc. Roy. Soc. London*, A, t. 158, 1937, p. 110.

du nouvel état initial V,

$$(28) \quad \mathcal{E} = e - \frac{\varpi}{2} I_1 + \frac{\lambda}{8} I_1^2 + \frac{\mu}{4} I_2 + AI_1 I_2 + BI_1^3 + CI_3 + \dots,$$

les coefficients  $\lambda$ ,  $\mu$ , A, B, C ont le même sens que précédemment, et se rapportent à notre nouvel état initial dilaté;  $\varpi$  est la pression nécessaire pour produire la dilatation  $\alpha$ . J'ai calculé (*Tenseurs*, p. 243) les valeurs des coefficients

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = (1 + \alpha) [\lambda_0 + 8(2\alpha + \alpha^2)(2A_0 + 9B_0)], \\ \mu = (1 + \alpha) [\mu_0 + 12(2\alpha + \alpha^2)(A_0 + C_0)], \\ (1 + \alpha)\varpi = -\frac{3\lambda_0 + 2\mu_0}{2}(2\alpha + \alpha^2) - 2(9A_0 + 27B_0 + 3C_0)(2\alpha + \alpha^2)^2, \\ A = A_0(1 + \alpha)^3, \quad B = B_0(1 + \alpha)^3, \quad C = C_0(1 + \alpha)^3; \end{array} \right.$$

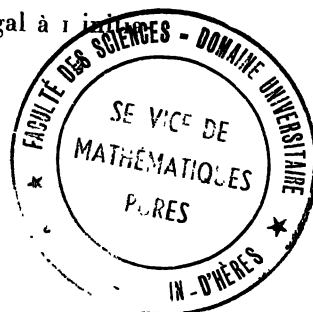
la pression  $\varpi$  est naturellement négative si la dilatation  $\alpha$  est positive.

Lorsque nous nous intéresserons à un solide à la température T, nous prendrons pour  $\alpha$  la dilatation thermique naturelle du corps, et la pression  $\varpi$  de la formule (28) sera compensée par une pression interne due à l'agitation thermique; cette pression interne peut être considérée, je l'ai montré, comme la pression de radiation exercée par les ondes d'agitation thermique de Debye-Born.

Supposons l'étude du solide, et de son agitation thermique, complètement effectuée; nous saurons calculer les ondes de Debye-Born pour le solide présentant n'importe quelle déformation homogène, et nous pourrions évaluer ainsi l'énergie d'agitation thermique U(T) et l'entropie S(T) en fonction des déformations; ce sera le but de ce travail, que d'arriver à former ces expressions. Nous pouvons d'avance prévoir leur aspect; nous compterons les déformations à partir de l'état initial dilaté (dilatation thermique) et nous obtiendrons pour U et S des expressions de même forme que (28); récrivons tout d'abord la formule (28) jusqu'aux termes du second degré seulement, en y remplaçant  $I_1 I_2$  par  $\frac{\delta V}{V}$  et  $H_2$  tirés des formules (26); nous rapportons tout à un volume unité dans le nouvel état initial (28) à température T, et nous poserons pour plus de clarté

$$(30) \quad \frac{\delta V}{V} = \omega - 1,$$

$\omega$  volume occupé après déformation par un volume égal à 1 initial.



lement. La formule (28) se transforme ainsi

$$(31) \quad \mathcal{E} = e - \varpi(\varpi - 1) + \frac{1}{2} \kappa(\varpi - 1)^2 + \frac{\mu_a}{12} \mathbf{H}_2 + \dots$$

avec

$$\begin{aligned} \kappa &= \lambda + \frac{2}{3} \mu + \frac{\varpi}{3}, \\ \mu_a &= \mu - \varpi, \end{aligned}$$

ces coefficients  $\kappa$  et  $\mu_a$  représentent le module de compressibilité et la rigidité (apparente) d'origine purement potentielle statique. L'intervention des termes correctifs en  $\varpi$  a été déjà signalée par une méthode un peu différente et discutée longuement (*Tenseurs*, p. 231, 244).

Nous allons donc écrire pour l'énergie d'agitation thermique U et pour l'entropie S des expressions du type (31), ces deux grandeurs étant toujours rapportées à l'unité de volume du corps dans le nouvel état initial V à température T.

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{U} &= \text{U}_0 - \varpi_u(\varpi - 1) + \frac{1}{2} \kappa_u(\varpi - 1)^2 + \frac{\mu_u}{12} \mathbf{H}_2 + \dots, \\ \text{S} &= \text{S}_0 - q(\varpi - 1) + \frac{1}{2} \text{K}(\varpi - 1)^2 + \frac{m}{12} \mathbf{H}_2 + \dots, \\ \text{F} &= \mathcal{E} + \text{U} - \text{TS} = \text{F}_0 - p_0(\varpi - 1) + \frac{1}{2} \kappa_T(\varpi - 1)^2 + \frac{\mu_T}{12} \mathbf{H}_2 + \dots \end{aligned} \right.$$

Le potentiel thermodynamique F (énergie libre) apparaît avec les coefficients

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} p_0 &= \varpi + \varpi_u - \text{T}q = 0, \\ \kappa_T &= \kappa + \kappa_u - \text{TK}, \\ \mu_T &= \mu_a + \mu_u - \text{T}m, \end{aligned} \right.$$

$p_0$  est la pression dans l'état initial, que nous avons supposé être l'état naturel à température T, le corps s'étant dilaté librement sous pression extérieure nulle; c'est la condition  $p_0 = 0$  qui fixe ainsi la dilatation thermique; nous avons donc des termes linéaires en  $(\varpi - 1)$  dans les expressions séparées de  $\mathcal{E}$ , U, S, mais ces termes se compensent dans l'énergie libre F; la pression statique  $\varpi$  est équilibrée par la pression  $\varpi_u - \text{T}q$  de l'agitation thermique. Les coefficients  $\kappa_T$  et  $\mu_T$  représentent le *module de compressibilité* et la *rigidité isothermes*.

## 7. Thermodynamique du corps solide isotrope; compressibilité et

**rigidité adiabatiques** (1). — Aux formules (32) nous ajouterons celle qui représente l'énergie totale, E par unité de volume du corps isotrope pris dans l'état initial à température T, dilaté thermiquement,

$$(34) \quad E = \mathcal{E} + U = E_0 - (\varpi + \varpi_u)(w - 1) + \frac{1}{2}(\kappa + \kappa_u)(w - 1)^2 + \frac{1}{12}(\mu_a + \mu_u)H_2 + \dots,$$

avec  $E_0 = e + U_0$ .

Nous allons voir comment appliquer les lois de la Thermodynamique et calculer les propriétés élastiques adiabatiques du solide.

Partons d'un état déjà déformé ( $w, H_2$ ) et effectuons une petite déformation supplémentaire ( $dw, dH_2$ ) accompagnée d'une variation de température  $dT$ ; nous formons les différentielles totales

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} dE &= \left[ \frac{\partial U_0}{\partial T} - \frac{\partial \varpi_u}{\partial T}(w - 1) + \frac{1}{2} \frac{\partial \kappa_u}{\partial T}(w - 1)^2 + \frac{1}{12} \frac{\partial \mu_u}{\partial T} H_2 \right] dT \\ &\quad + [-\varpi - \varpi_u + (\kappa + \kappa_u)(w - 1)] dw + \frac{1}{12}(\mu_a + \mu_u) dH_2, \\ dS &= \left[ \frac{\partial S_0}{\partial T} - \frac{\partial q}{\partial T}(w - 1) + \frac{1}{2} \frac{\partial K}{\partial T}(w - 1)^2 + \frac{1}{12} \frac{\partial m}{\partial T} H_2 \right] dT \\ &\quad + [-q + K(w - 1)] dw + \frac{m}{12} dH_2, \end{aligned} \right.$$

les termes élastiques potentiels  $e, \varpi, \kappa, \mu_a$  ne dépendent pas directement de la température; le facteur de  $dT$  dans  $dE$  représente la chaleur spécifique  $c(w, H_2)$  pour le corps déformé ( $w, H_2$ ), et le facteur de  $dT$  dans  $dS$  doit être  $\frac{c(w, H_2)}{T}$ , d'où les relations

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U_0}{\partial T} = T \frac{\partial S_0}{\partial T} = c, & \quad \text{chaleur spécifique initiale à volume constant,} \\ \frac{\partial \varpi_u}{\partial T} = T \frac{\partial q}{\partial T}, \quad \frac{\partial \kappa_u}{\partial T} = T \frac{\partial K}{\partial T}, \quad \frac{\partial \mu_u}{\partial T} = T \frac{\partial m}{\partial T}. \end{aligned} \right.$$

Les forces extérieures agissant sur un élément de volume du solide peuvent être caractérisées de diverses façons, suivant qu'on emploie les composantes  $\mathcal{A}_{ij}$  tensorielles (tensions élastiques) ou le système des composantes  $\mathcal{B}_{ik}$  de Boussinesq. J'ai précisé ces définitions

---

(1) On consultera utilement sur ce sujet le *Cours de Mécanique de l'École Polytechnique*, par JOULET; feuilles polycopiées de 1936, p. 92, 215, 259, et annexe XIII, p. 90.



(*Tenseurs*, chap. X) qui aboutissent aux expressions suivantes, pour le travail  $d\mathfrak{E}_e$  des forces extérieures agissant sur un volume choisi égal à l'unité dans l'état initial V (*Tenseurs*, p. 249),

$$(37) \quad d\mathfrak{E}_e = \sum_{ij} \alpha_{ij} de_{ij} = \sum_{ik} \beta_{ik} d\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right).$$

Telles sont les formules qui doivent remplacer l'expression simple  $-p dV$  dans le cas où les forces extérieures ne se réduisent pas à une pression uniforme.

Nous avons vu (§ 4, (14)) qu'il était intéressant de considérer l'énergie E comme fonction de S et des variables de configuration ( $\omega, H_2$ ); étudions donc maintenant la variation  $dE_S$  de la densité d'énergie totale E à S constant, dans une transformation adiabatique. Nous poserons donc

$$(38) \quad dS = \frac{1}{T} c(\omega, H_2) dT_S + [-q + K(\omega - 1)] d\omega_S + \frac{m}{12} dH_{2S} = 0,$$

ce qui exprime  $dT_S$  en fonction de  $d\omega_S$  et  $dH_{2S}$  *adiabatiques*, et nous portons cette valeur  $dT_S$  dans  $dE$ ; nous trouvons

$$(39) \quad dE_S = [-p_0 + \kappa_T(\omega - 1)] d\omega_S + \frac{1}{12} \mu_T dH_{2S}$$

et nous voyons réapparaître les mêmes coefficients  $p_0 (= 0)$ ,  $\kappa_T$  et  $\mu_T$  que dans l'expression de l'énergie libre F (32).

La pression  $p(\omega, H_2)$  est donc donnée par la même formule, qu'on utilise (39) ou (32)

$$(40) \quad p(\omega, H_2) = -\frac{dF_T}{d\omega} = -\frac{dE_S}{d\omega} = p_0 - \kappa_T(\omega - 1),$$

et de même pour le coefficient  $\mu$ ; or c'est ici la *rigidité*  $\mu_S$  *adiabatique* que nous tirons de (39)

$$(41) \quad \text{isotherme } \mu_T = 12 \frac{\partial F_T}{\partial H_2} = 12 \frac{dE_S}{dH_2} = \mu_S \text{ adiabatique.}$$

Ainsi donc, *égalité des modules de rigidité isotherme et adiabatique*; c'est un fait intéressant, et bien connu, dont nous expliquerons plus loin l'origine.

Passons au calcul du module  $\kappa_S$  de *compressibilité adiabatique*;

nous devons recommencer un processus analogue à (38) (39) en utilisant la relation (38) explicitement; dans tous ces calculs nous nous rappellerons que les coefficients  $\varpi$ ,  $\alpha$ ,  $\mu_a$  de l'énergie élastique purement potentielle (31) ne dépendent pas explicitement de la température T.

La pression  $p$  d'après (33) et (40) se présente comme une fonction de la température T et du volume  $\varpi$  qu'occupe une portion solide dont le volume initial était 1. Explicitons  $p$  et sa différentielle totale  $dp$

$$(42) \quad \begin{cases} p = p_0 - \alpha_T(\varpi - 1) \\ \quad = \varpi + \varpi_u(T) - T q(T) - [\alpha + \alpha_u(T) - T K(T)](\varpi - 1), \\ dp = [-q + K(\varpi - 1)] dT + [-\alpha - \alpha_u + TK] d\varpi, \end{cases}$$

dans la formation de  $dp$  nous avons tenu compte de diverses compensations de termes basées sur les relations (36). Pour une transformation adiabatique, les variations  $dT$  et  $d\varpi$  sont liées par (38) où l'on prendra  $dH_2 = 0$ ; portons ces valeurs dans  $dp$  et nous obtenons

$$(43) \quad dp_s = - \left[ \alpha + \alpha_u - TK + \frac{T}{c(\varpi, H_2)} \{ q - K(\varpi - 1) \}^2 \right] d\varpi,$$

ce qui nous fournit le module  $\alpha_s$  de compressibilité adiabatique

$$(44) \quad \alpha_s = - \frac{dp_s}{d\varpi} = \alpha_T + \frac{T}{c(\varpi, H_2)} \{ q - K(\varpi - 1) \}^2 \quad (\varpi, H_2).$$

Si nous partons de l'état initial sous pression extérieure nulle il suffit de remplacer  $c(\varpi, H_2)$  par la chaleur spécifique  $c$  à volume constant et de prendre  $\varpi = 1$

$$(45) \quad \alpha_s = \alpha_T + \frac{T q^2}{c_\nu} \quad (\varpi = 1, H_2 = 0).$$

Cette formule se raccorde correctement avec celles que nous avons obtenues pour les fluides (§ 4); nous écrivions en effet les formules (10) et (13)

$$(46) \quad \begin{cases} \frac{\alpha_s}{\alpha_T} = \frac{C_p}{c_\nu} = 1 + \frac{C_p - c_\nu}{c_\nu} = 1 + \frac{\alpha V l}{c_\nu}, \\ \text{d'où} \\ \alpha_s = \alpha_T + \frac{V l}{c_\nu} \frac{dp_\nu}{dT} \quad \text{d'après (12),} \end{cases}$$

$l$  représentait [éq. (6)] la quantité

$$(47) \quad l = T \frac{dS_T}{dV}.$$

Revenons alors à l'expression (35) de  $dS$ , et reprenons nos conventions

$$V = 1, \quad dV = d\omega,$$

nous trouvons

$$(48) \quad l = T[-q + K(\omega - 1)],$$

d'autre part nous tirons de (42)

$$(49) \quad \frac{dp_v}{dT} = -q + K(\omega - 1),$$

de sorte que la formule (46) se réduit bien à (44); l'identité de forme de (48) et (49) redonne la première formule de Clapeyron (8).

**8. Égalité des rigidités isothermes et adiabatiques.** — Revenons maintenant à la relation (41), fort importante à considérer, puisqu'elle nous garantit l'identité des modules de rigidité isothermes et adiabatiques. Ce point mérite un examen minutieux qui en révèle le sens physique intime. L'invariant  $H_2$  étant du second degré par rapport aux déformations, on peut se demander si la formule (39) suffit à l'examen du problème, et si un calcul détaillé avec double dérivation [comme le calcul (42) à (44) où l'on prend  $p = -\frac{dE_s}{d\omega}$ , puis  $\kappa_s = -\frac{dp_s}{d\omega}$ ] n'apprendrait rien de plus; c'est ce que nous allons regarder en détail sur un exemple simple.

Supposons un glissement homogène très petit, avec les déplacements

$$(50) \quad u_1 = b x_2, \quad u_2 = u_3 = 0, \quad e_{21} = e_{12} = b, \quad H_2 = 6b^2,$$

la variation de volume est nulle; les efforts de Boussinesq, conformes à la formule de définition (37), se réduisent à

$$(51) \quad \mathcal{B}_{12} = \frac{\partial F_T}{\partial b} = \frac{\partial E_s}{\partial b} = \mu_T b = (\mu_a + \mu_u - Tm)b;$$

il suffit de prendre  $F$  dans la formule (32) ou  $dE_s$  dans (39) pour retrouver ce résultat. Nous obtenons ainsi  $\mathcal{B}_{12}$  comme fonction

de  $T$  et  $b$ ; sa différentielle totale s'écrit

$$(52) \quad d\beta_{12} = \left( \frac{\partial \mu_u}{\partial T} - T \frac{\partial m}{\partial T} - m \right) dT + (\mu_a + \mu_u - Tm) db \\ = -m dT + \mu_T db,$$

en tenant compte des relations (36); nous obtenons ainsi directement le coefficient isotherme

$$\mu_T = \left( \frac{d\beta_{12}}{db} \right)_T.$$

Considérons maintenant une déformation adiabatique; la condition (38) nous donnera

$$c(\omega, H_2) dT_S + T \frac{m}{I_2} dH_{2S} = c_v dT_S + T m b db_S = 0.$$

Portons cette relation dans (52) et nous obtenons

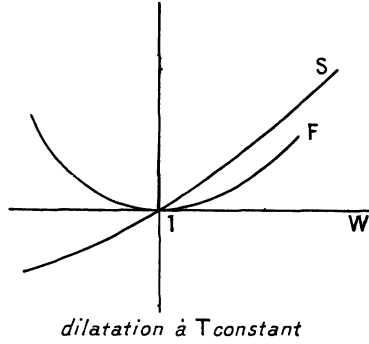
$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\beta_{12,S} = \left( \mu_T + \frac{T}{c_v} m^2 b \right) db, \\ \mu_S = \frac{d\beta_{12,S}}{db} = \mu_T + \frac{T}{c_v} m^2 b = \mu_T \quad \text{pour } b = 0. \end{array} \right.$$

Les coefficients  $\mu_S$  et  $\mu_T$  pris pour une déformation très petite à partir de l'état isotrope sont égaux. Si l'on mesure la rigidité non pas à partir de l'état isotrope, mais en partant d'un état déjà déformé par un glissement  $b$ , on observe une différence  $\mu_S - \mu_T$  proportionnelle à  $b$ . Le terme de correction ainsi calculé correspond à un écart à la loi de proportionnalité de Hooke; pour calculer des termes de ce genre d'une manière complète, il faudrait partir d'expressions de  $E$ ,  $S$ ,  $F$  développées jusqu'aux termes du 3<sup>e</sup> degré, avec des coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  comme ceux de la formule (28); je n'ai pas voulu garder tous ces termes qui auraient trop alourdi les formules.

Ces résultats s'interprètent aisément; considérons une variation de volume à température  $T$  constante (*fig. 5*); elle s'accompagne de variations des grandeurs caractéristiques du corps; la variation d'entropie  $S$  présente une tangente inclinée, au voisinage de l'état initial  $\omega = 1$ ; si une dilatation  $\omega > 1$  absorbe de la chaleur ( $S > 0$ ), une compression  $\omega < 1$  en dégage ( $S < 0$ ); la courbe représentant l'énergie libre  $F$  passe au contraire par un minimum à tangente horizontale, si l'état initial  $\omega = 1$  est choisi sous pression extérieure nulle. Dans ces conditions, une transformation adiabatique provoquera

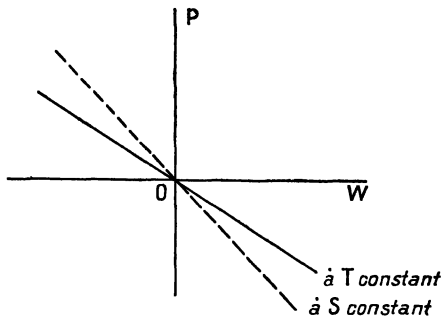
une élévation de température par compression et un abaissement par dilatation; les courbes de variation de la pression  $p$  en fonction de  $\omega$

Fig. 5.



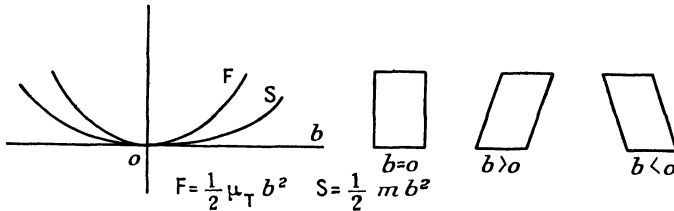
seront donc différentes à température constante ou à entropie constante (fig. 6).

Fig. 6.



Considérons maintenant un glissement  $b$  du type étudié en (50); les valeurs positives ou négatives de  $b$ , à température constante,

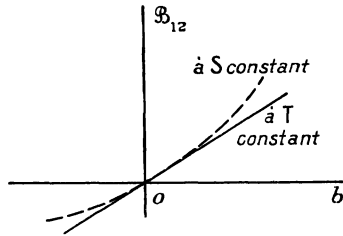
Fig. 7.



provoquent par symétrie des variations égales de l'entropie  $S$ ; celle-ci

se représente donc par une courbe à tangente horizontale (*fig. 7*), de sorte qu'une transformation isotherme est aussi, au premier ordre, adiabatique. Les modules de rigidité  $\mu_T$  et  $\mu_s$  devront donc être égaux,

Fig. 8.



et les différences entre eux n'apparaîtront qu'au second ordre, comme le montre la formule (53) (*fig. 8*).

**9. Propagation des ondes dans diverses gammes de fréquences. —**

Revenons maintenant au problème de la propagation des ondes pour discuter de plus près les questions soulevées au paragraphe 3. Supposons que nous formions des ondes de fréquence extrêmement basse (*infrasons*), la conductibilité calorifique aura le temps de jouer pour égaliser les températures, et nous aurons des chances de trouver les *vitesse de propagation isothermes*, où figureront les coefficients d'élasticité  $\lambda_T$  et  $\mu_T$  de l'énergie libre F (32); les vitesses  $W_l$  et  $W_{tr}$  des ondes longitudinales et transversales seront données par

$$(54) \quad \begin{cases} \rho W_l^2 = \lambda_T + 2\mu_T = \alpha_T + \frac{4}{3}\mu_T, & \rho W_{tr}^2 = \mu_T, \\ \lambda_T = \alpha_T - \frac{2}{3}\mu_T, \end{cases}$$

ce cas sera assez rarement réalisé; dès que nous prendrons des fréquences plus élevées (*sons et ultrasons*), les déformations seront adiabatiques et nous verrons apparaître les *coefficients adiabatiques*  $\lambda_s, \mu_s, \alpha_s$

$$(55) \quad \rho W_l^2 = \lambda_s + 2\mu_s = \alpha_s + \frac{4}{3}\mu_T, \quad \rho W_{tr}^2 = \mu_s = \mu_T,$$

cela conduira donc à une variation dans la propagation des ondes longitudinales, mais sans changement pour les ondes transversales.

Ces conditions se maintiendront tant que nous n'atteindrons pas des fréquences extrêmement élevées, de l'ordre de  $10^{10}$ . Au delà, pour les *hypersons* ( $\nu > 10^{10}$ ) tous les termes dépendant de l'agitation thermique (U et S) n'ont plus le temps de jouer; l'expression  $U - TS$  n'intervient plus qu'en moyenne, pour équilibrer le terme linéaire  $-\varpi(\varpi - 1)$  dans l'énergie élastique potentielle  $\mathcal{E}$  de (31) et les ondes se propagent avec les vitesses correspondant aux *coefficients d'élasticité purement potentiels*

$$(56) \quad \rho W_l^2 = \lambda + 2\mu - \varpi = \alpha + \frac{4}{3}\mu_a, \quad \rho W_{tr}^2 = \mu - \varpi = \mu_a.$$

Tel est le cas pour les ondes de l'agitation thermique elle-même. L'énergie  $U - TS$  thermique joue ici le rôle de l'énergie auxiliaire H que j'avais introduite dans un exposé antérieur (*Tenseurs*, p. 230 et 244), et l'apparition des termes de correction  $\varpi$  dans les formules (56) correspond exactement au terme  $p$  des formules [*Tenseurs*, p. 255, (èq. XI. 16)] donnant la propagation des ondes dans un solide sous pression constante.

**10. Renseignements fournis par la théorie de la dilatation thermique.** — L'étude de l'agitation thermique a été poursuivie, d'une manière très complète, dans le cadre indiqué par Debye, c'est-à-dire pour un corps initialement isotrope. On part d'une expression (28) de l'énergie potentielle élastique; on calcule les vitesses  $W_l$  et  $W_{tr}$  des ondes longitudinales et transversales (56) en y faisant figurer seulement les  $\lambda$ ,  $\mu$  instantanés fournis par (28). Il faut alors tenir compte de la limitation des ondes, par suite de la structure discontinue du solide; si celui-ci est cristallisé, c'est la « première zone » qui intervient ici pour arrêter, du côté des courtes longueurs d'onde, les possibilités d'existence d'ondes élastiques; l'hypothèse de Debye consiste à admettre, pour un solide isotrope, une *première zone sphérique* (*Tenseurs*, p. 325) correspondant à une longueur d'onde minima  $\Lambda_m$

$$(57) \quad \Lambda_m^{-3} = \left( \frac{3N}{4\pi V} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (N; \text{nombre d'atomes dans le volume } V).$$

La comparaison avec le cas de cristaux oblige à prendre une même longueur d'onde limite  $\Lambda_m$  pour les ondes longitudinales et transversales, donc deux fréquences limites  $\nu_{l,m}$  et  $\nu_{tr,m}$  pour ces deux types

d'ondes, et deux températures caractéristiques  $\Theta_l$  et  $\Theta_{lr}$

$$(57 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{aligned} \Theta_l &= \frac{h}{k} \nu_{l,m} = \frac{h}{k} W_l \left( \frac{3N}{4\pi V} \right)^{\frac{1}{3}}, \\ \Theta_{lr} &= \frac{h}{k} \nu_{lr,m} = \frac{h}{k} W_{lr} \left( \frac{3N}{4\pi V} \right)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned} \right.$$

La méthode initiale de Debye, avec une seule température critique  $\Theta_D$  est nettement inférieure à celle-ci et conduit à des difficultés (*Tenseurs*, p. 326 et 343).

Ayant ainsi limité les longueurs d'onde des radiations élastiques thermiques, on calcule alors, par intégration, l'énergie totale d'agitation thermique U et l'entropie S correspondante (*Tenseurs*, p. 328 et 342).

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned} U &= NkT \left\{ D \left( \frac{\Theta_l}{T} \right) + {}_2D \left( \frac{\Theta_{lr}}{T} \right) \right\} = U_l + {}_2U_{lr}, \\ S &= S_l + {}_2S_{lr}, \end{aligned} \right.$$

$$S_l = 3Nk \left( \frac{T}{\Theta_l} \right)^3 \int_0^{\frac{\Theta_l}{T}} \left\{ \frac{\xi e^\xi}{e^\xi - 1} - \log(e^\xi - 1) \right\} \xi^2 d\xi,$$

D est la fonction de Debye;  $U_l$ ,  $S_l$  énergie et entropie des ondes longitudinales;  $U_{lr}$ ,  $S_{lr}$  mêmes expressions pour chacune des deux ondes transversales; le facteur 2 provient des deux polarisations transversales. Toutes ces expressions représentent des fonctions du volume spécifique V et de la température T; U et S dépendent du volume par l'intermédiaire des  $\Theta$  (57 bis).

Ces formules suffisent pour trouver la condition d'équilibre, sous pression extérieure nulle, à la température T. L'énergie potentielle statique fournit une pression  $\varpi$  (31) fonction de V seulement; les termes d'agitation thermique vont donner une pression

$$(59) \quad \varpi_u - Tq = - \frac{\partial}{\partial V} (U - TS)$$

$$= - Nk \left[ D_l \frac{\partial \Theta_l}{\partial V} + {}_2D_{lr} \frac{\partial \Theta_{lr}}{\partial V} \right] + T \left( \frac{\partial S_l}{\partial V} + {}_2 \frac{\partial S_{lr}}{\partial V} \right)$$

en écrivant  $D_l$  pour  $D \left( \frac{\Theta_l}{T} \right)$ ; mais on a (*Tenseurs*, p. 341, éq. XII. 63)

$$T \frac{\partial S_l}{\partial V} = T \frac{\partial S_l}{\partial \Theta_l} \frac{\partial \Theta_l}{\partial V} = Nk \left[ D_l' - D_l \frac{T}{\Theta_l} \right] \frac{\partial \Theta_l}{\partial V}.$$



de sorte qu'on trouve

$$(60) \quad \begin{aligned} \varpi_u - Tq &= -NkT \left[ D_l \frac{\partial \log \Theta_l}{\partial V} + 2 D_{lr} \frac{\partial \log \Theta_{lr}}{\partial V} \right] \\ &= -U_l \frac{\partial \log \Theta_l}{\partial V} - 2 U_{lr} \frac{\partial \log \Theta_{lr}}{\partial V}. \end{aligned}$$

L'équilibre sous pression extérieure nulle exige la condition

$$(33) \quad p_0 = \varpi + \varpi_u - Tq = 0$$

déjà rencontrée antérieurement. L'expression (60) de la pression interne due à l'agitation thermique peut être calculée par une méthode purement mécanique et représente la *pression de radiation des ondes élastiques thermiques*; cette concordance ne peut être obtenue que par l'emploi des deux températures  $\Theta_l$  et  $\Theta_{lr}$  distinctes; on en trouve la complète discussion dans mon exposé antérieur (*Tenseurs*, XII).

En *première approximation*, la pression statique  $\varpi$  (29) est représentée par  $-(3\lambda_0 + 2\mu_0)\alpha$  où  $\alpha$  représente la *dilatation linéaire*, de sorte que les formules (33) et (60) donnent

$$(61) \quad 3\alpha = -\frac{3}{3\lambda_0 + 2\mu_0} \left[ U_l \frac{\partial \log \Theta_l}{\partial V} + 2 U_{lr} \frac{\partial \log \Theta_{lr}}{\partial V} \right]$$

comme expression approchée de la *dilatation thermique cubique* ( $3\alpha$ ) entre les températures O et T; le facteur  $\frac{3}{3\lambda_0 + 2\mu_0}$  est la compressibilité  $\chi_0$  au zéro absolu :

$$(62) \quad \chi_0 = \frac{1}{\alpha_0} = \frac{3}{3\lambda_0 + 2\mu_0}.$$

Ces formules sont en accord complet avec celles déjà indiquées (*Tenseurs*, p. 336, 338).

Les formules obtenues dans ce paragraphe permettent de faire un pas de plus, et de calculer la *compressibilité* comme fonction de la température. Il faudra faire attention ici à écrire des formules plus rigoureuses que (61), et à pousser un peu plus loin les approximations; les formules générales établies par voie thermodynamique aux paragraphes (6) et (7) s'appliquent aussitôt au schéma précédent. La compressibilité isotherme a pour module une expression  $\alpha_T$  donnée par (33)

$$(33) \quad \alpha_T = \alpha + \alpha'_u - TK,$$

où  $\alpha$  est la contribution purement potentielle (31)

$$(31) \quad \alpha = \lambda + \frac{2}{3} \mu + \frac{\varpi}{3}.$$

D'autre part, en partant de (60), on forme les termes d'agitation thermique

$$(62) \quad \alpha_u - TK = -V \frac{\partial}{\partial V} (\varpi_u - Tq),$$

$$(63) \quad \alpha_u - TK = V \left[ U_l \frac{\partial^2 \log \Theta_l}{\partial V^2} + \frac{\partial U_l}{\partial V} \frac{\partial \log \Theta_l}{\partial V} + 2 U_{lr} \frac{\partial^2 \log \Theta_{lr}}{\partial V^2} + 2 \frac{\partial U_{lr}}{\partial V} \frac{\partial \log \Theta_{lr}}{\partial V} \right].$$

La réunion des expressions (31) et (63) dans la formule (33) fournit le module de compressibilité macroscopique isotherme du solide.

A haute température les énergies  $U_l$  et  $U_{lr}$  ne dépendent plus du volume, et sont toutes deux égales à  $NkT$ , car la fonction  $D$  de Debye se réduit à l'unité. On obtient donc (1)

$$(64) \quad \alpha_T = \alpha + NkTV \left[ \frac{\partial^2 \log \Theta_l}{\partial V^2} + 2 \frac{\partial^2 \log \Theta_{lr}}{\partial V^2} \right].$$

Des formules analogues et très voisines de celle-ci ont été signalées par divers auteurs, en particulier par Grüneisen, mais en général ces formules étaient écrites avec une température caractéristique unique  $\Theta_D$  suivant le schéma de Debye, et cela constituait un sérieux inconvénient puisque l'emploi de deux températures est indispensable pour obtenir correctement les pressions  $\varpi_u - Tq$  d'agitation thermique (60). Le module de compressibilité global  $\alpha_T$  de (64) varie, en fonction de la température, par deux mécanismes distincts :

1° Le module statique de compressibilité  $\alpha$  est pris sous le volume  $V$  qu'occupe le solide à température  $T$ ; au contraire le module  $\alpha_0$  au zéro absolu correspond au volume  $V_0$ ; les formules (29) et (31) permettent

(1) L'exposé de Mott et Jones (*Theory of properties of metals and alloys*, Oxford, 1937) comporte (p. 21) des approximations discutables et une erreur de signe que j'ai reproduite dans mon livre (*Tenseurs*, p. 344).

d'évaluer la différence

$$(65) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = \frac{3\lambda_0 + 2\mu_0}{3}, \\ \alpha = \frac{3\lambda + 2\mu + \varpi}{3} = \alpha_0 + 16\alpha(3A_0 + 9B_0 + C_0) + \dots, \end{array} \right.$$

$\alpha$  étant la dilatation thermique linéaire (28 ou 61);

2° L'agitation thermique fournit une contribution (63) qui dépend essentiellement de la variation de  $\Theta_l$  et  $\Theta_{lr}$  en fonction du volume et cette variation des  $\Theta$  se ramène par (57) et (56) aux variations des  $\lambda$  et  $\mu$  statiques en fonction du volume; les deux contributions seront donc, *a priori*, du même ordre de grandeur et devront être comparées sur des exemples numériques. Je remets à plus tard les discussions pratiques à ce sujet.

De toutes façons l'expression (33) (63) du module de compressibilité  $\alpha_T$  isotherme nous fournit une relation

$$(66) \quad \alpha_T = \frac{3\lambda_T + 2\mu_T}{3}.$$

entre les coefficients d'élasticité macroscopiques isothermes  $\lambda_T \mu_T$  que nous avons introduits au paragraphe 6 (33) et que nous cherchons à déterminer. C'est d'ailleurs tout ce qu'on peut tirer des expressions classiques (58), puisqu'elles supposent essentiellement un solide à l'état isotrope; elles ne peuvent donc s'appliquer qu'au solide dilaté uniformément en tous sens, sous un volume  $V$  arbitraire, mais ne sont plus valables pour un solide soumis à une déformation de glissement.

**11. Solide soumis à une dilatation unilatérale.** — Pour déterminer les deux coefficients d'élasticité  $\lambda_T \mu_T$  isothermes macroscopiques, il faut étudier, en plus de la dilatation uniforme, une autre déformation d'ensemble du solide, et nous choisirons pour cela une dilatation unilatérale  $\alpha_1$  suivant la direction  $x_1$ , de sorte qu'un point du solide placé en  $x_1 x_2 x_3$  initialement vienne occuper la position  $z_1 z_2 z_3$

$$(67) \quad z_1 = (1 + \alpha_1)x_1, \quad z_2 = x_2, \quad z_3 = x_3.$$

Le solide, initialement, occupait le volume spécifique  $V$ , à la tempé-

rature  $T$ ; il était isotrope, dans son état naturel sous pression extérieure  $p_0$  nulle. Après la déformation (67), le solide est devenu anisotrope (uniaxe); ses propriétés élastiques, pour de petites déformations autour de la configuration (67) devront être étudiées; nous pourrons alors rechercher les lois de propagation des ondes élastiques dans ce milieu (67), calculer leurs vitesses de propagation, et analyser l'agitation thermique du solide ainsi déformé. Cette étude nous permettra de former l'expression de l'énergie  $U$  d'agitation thermique et de l'entropie  $S$ , comme fonctions du paramètre  $\alpha_1$  de (67), qui règle la dilatation unilatérale choisie.

Munis de ces résultats, nous pourrons calculer la contribution de l'agitation thermique  $U - TS$  aux forces exercées par le solide, et cela nous permettra d'atteindre la combinaison

$$\lambda_T + 2\mu_T$$

des coefficients d'élasticité macroscopiques isothermes. Reportons-nous en effet à l'expression (32) prévue pour l'énergie libre  $F$ , rapportée à l'unité de volume  $V$  prise dans l'état initial à température  $T$ ; nous avons comme nouveau volume

$$(68) \quad w = 1 + \alpha_1,$$

l'invariant  $H_2$  se forme facilement, car les axes  $x_1, x_2, x_3$  sont les axes principaux de la déformation (19 à 24)

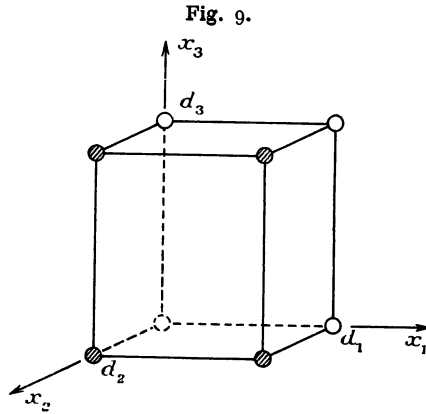
$$(69) \quad \begin{cases} \epsilon_{11} = 2\alpha_1 + \alpha_1^2, & \epsilon_{22} = 0, & \epsilon_{33} = 0, \\ H_2 = \epsilon_{11}^2 = 4\alpha_1^2 + \dots, \end{cases}$$

de sorte que la formule (32) donne ( $p_0 = 0$ )

$$(70) \quad F(\alpha_1) = F_0 + \left(\frac{1}{2}\lambda_T + \frac{1}{3}\mu_T\right)\alpha_1^2, \quad F(\alpha_1) = F_0 + \frac{1}{2}(\lambda_T + 2\mu_T)\alpha_1^2.$$

Pour obtenir les résultats intéressants, il faudra évaluer  $U$  et  $S$  (ou  $F$ ) jusqu'aux termes du second degré en  $\alpha_1$ ; nous devons donc pousser l'étude des lois de propagation des ondes dans le milieu déformé (67), jusqu'aux termes en  $\alpha_1^2$ , car tous les termes du premier degré en  $\alpha_1$  se compensent automatiquement. Cette étude est assez laborieuse mais indispensable; elle n'a pas été faite jusqu'ici, faute de quoi l'on n'a pu donner aucun résultat valable.

**12. Longueurs d'onde limites dans le solide déformé, aplatissement de la « première zone ».** — La structure atomique du corps solide impose une limitation des ondes élastiques du côté des courtes longueurs d'onde; dans une file de particules équidistantes (écart  $d$ ) formant une structure régulière à une dimension, la plus courte longueur d'onde réalisable  $\Lambda$  est égale à  $2d$ ; ces questions ont été discutées dans bien des Traités classiques, on les trouvera présentées dans mon livre sur les *Tenseurs* (Chap. XII, p. 312-326). Passons



au réseau cristallin à trois dimensions, et supposons une maille rectangulaire de côtés  $d_1, d_2, d_3$  (fig. 9), de sorte que chaque atome occupe un volume atomique

$$(71) \quad v = d_1 d_2 d_3.$$

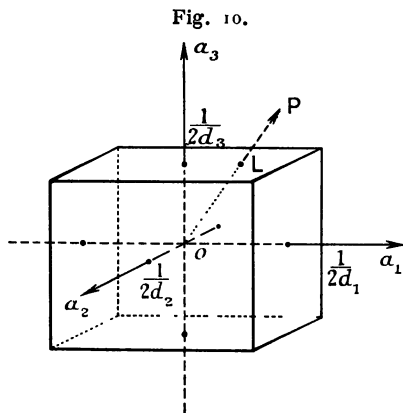
Une onde élastique se caractérise par des déplacements

$$(72) \quad u_k = \Lambda_k e^{2\pi i(\nu t - a_1 x_1 - a_2 x_2 - a_3 x_3)}, \quad \frac{1}{\Lambda^2} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,$$

où  $a_1 a_2 a_3$  sont les composantes d'un vecteur de longueur  $\frac{1}{\Lambda}$  dirigé suivant le « rayon » normal à l'onde plane. Chaque onde correspond ainsi à un point dans l'espace  $a_1 a_2 a_3$ , et ce point représentatif est assujéti à rester à l'intérieur d'un parallélépipède rectangle (fig. 10)

$$(73) \quad -\frac{1}{2d_1} \leq a_1 \leq \frac{1}{2d_1}, \quad -\frac{1}{2d_2} \leq a_2 \leq \frac{1}{2d_2}, \quad -\frac{1}{2d_3} \leq a_3 \leq \frac{1}{2d_3}$$

que l'on appelle la « première zone » dans l'espace  $\alpha$ . Cette dénomination tient au fait que, dans d'autres problèmes de propagation



d'ondes, cette surface n'est pas la seule à jouer un rôle; on découvre toute une série de surfaces parallélépipédiques, emboîtées les unes dans les autres, et qui définissent une suite de régions, dans l'espace  $\alpha$ , auxquelles j'ai donné les noms de première, deuxième, ... zones. Cette multiplicité des zones apparaît pour les ondes dont la propagation peut être repérée entre les atomes : les ondes électromagnétiques (lumière, rayons X) qui se manifestent par des champs électriques ou magnétiques, ou les ondes électroniques  $\Psi$ , dont l'existence se traduit par des densités d'électrons entre les atomes. Toutes ces ondes se propagent dans un espace continu, où les atomes représentent des accidents régulièrement distribués; on trouve alors une série illimitée de zones dans l'espace  $\alpha$ ; chacune de ces zones concentriques possède un volume

$$(74) \quad u = \frac{1}{v} = \frac{1}{d_1 d_2 d_3},$$

comme cela se produit déjà pour la première zone (73).

Les ondes élastiques sont d'un type particulier, en ce sens que le déplacement  $u_k$  n'est observable qu'aux endroits où se trouvent des atomes; nous avons écrit une expression continue (72) comme fonction des coordonnées  $x_1 x_2 x_3$ , mais c'est une fiction; on ne peut parler du déplacement  $u_k$  en un point arbitraire de l'espace, entre les atomes; le déplacement  $u_k$  n'est visible qu'aux endroits où se trouvent des

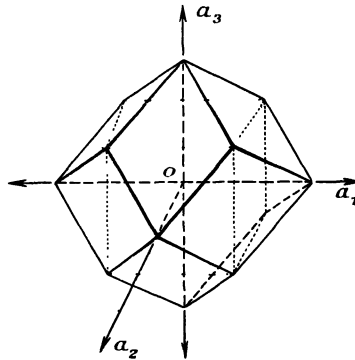
atomes du réseau

$$(75) \quad x_1 = n_1 d_1, \quad x_2 = n_2 d_2, \quad x_3 = n_3 d_3 \quad (n_1, n_2, n_3 \text{ entiers}).$$

Cette condition très particulière est la raison pour laquelle la première zone est seule à intervenir dans l'étude des ondes élastiques.

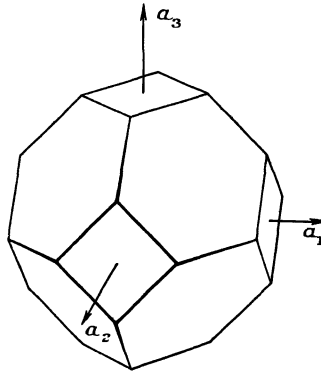
Le réseau rectangulaire est le plus simple à étudier, mais les

Fig. 11.



mêmes résultats se retrouvent pour des structures plus compliquées; pour un réseau cubique centré, la première zone a la forme repré-

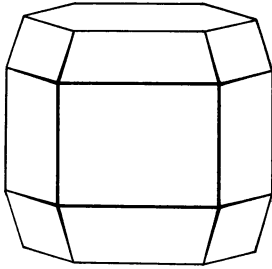
Fig. 12.



sentée sur la figure 11, tandis que la figure 12 se rapporte au réseau cubique à faces centrées, et la figure 13 au réseau hexagonal compact.

Mott et Jones ont donné (1) toute une série d'exemples de ces structures de zones, même pour des réseaux très compliqués; diverses

Fig. 13.



Première zone pour réseau hexagonal compact.

règles apparaissent nettement, et se démontrent théoriquement sans peine :

1° La règle (74) : le volume de la zone est égal à l'inverse du volume atomique;

2° La règle visible sur (73) : si dans une direction  $x_1$  les atomes sont plus écartés les uns des autres que dans les directions  $x_2 x_3$ , alors la zone est aplatie suivant  $a_1$ ; cet énoncé correspond à l'hypothèse  $d_1 > d_2 = d_3$ , qui entraîne  $a_1 < a_2 = a_3$ .

Tous ces résultats s'appliquent aux structures cristallines les plus diverses; comment passerons-nous au cas d'un solide *isotrope*? Nous ferons, suivons l'idée de Voigt, une moyenne pour un cristal orienté en tous sens; les détails de forme de la première zone disparaîtront, avec les points anguleux, et nous garderons une zone sphérique, (*fig.* 14) de rayon  $r_m$

$$(76) \quad \frac{1}{\Lambda_m} = r_m, \quad \frac{4}{3} \pi r_m^3 = u = \frac{1}{\nu} = \frac{N}{V};$$

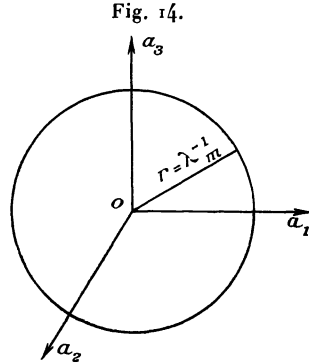
ce rayon est choisi de manière à respecter la condition (74) sur le volume  $u$  de la première zone;  $N$  est le nombre d'atomes dans un volume global  $V$ ; la règle (76) redonne bien la condition (57) que nous avons déjà utilisée au paragraphe 10; la longueur d'onde

---

(1) *The Theory of the properties of metals and alloys*, Oxford, 1937, p. 153-174.  
3.



limite  $\Lambda_m$  est nécessairement la même pour toutes les ondes élastiques quel que soit leur mode de vibration, longitudinal ou transversal, de sorte que nous avons dû introduire deux températures caractéristiques  $\Theta_l$  et  $\Theta_{tr}$  (57 bis) pour définir le corps isotrope.



Étudions maintenant le cas du corps initialement isotrope, mais qui a été soumis à une dilatation unilatérale (67); nous remarquons deux points à noter :

1° Le volume atomique est augmenté par la dilatation  $\alpha_1$ ; il devient

$$v_1 = v(1 + \alpha_1);$$

il faut donc que le volume  $u$  intérieur à la première zone prenne la valeur

$$u_1 = \frac{1}{v_1} = \frac{u}{1 + \alpha_1};$$

2° La règle (73) nous impose un aplatissement de la première zone, suivant l'axe n° 1; pour le solide isotrope notre première zone était sphérique; pour le solide dilaté suivant  $Ox_1$ , nous trouverons une première zone en forme d'ellipsoïde aplati de révolution autour de  $Oa_1$  (fig. 15).

Voyons comment ces deux points se précisent.

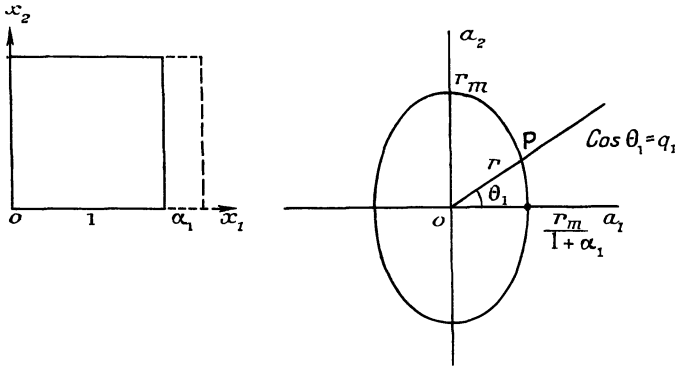
Nous prendrons un ellipsoïde aplati suivant  $Oa_1$ , avec un petit axe  $\frac{r_m}{1 + \alpha_1}$  et deux grands axes  $r_m$  suivant  $Oa_2$  et  $Oa_3$ ; l'équation de

l'ellipsoïde sera donc la suivante :

$$(77) \quad \alpha_1^2(1 + \alpha_1)^2 + a_2^2 + a_3^2 = r_m^2.$$

Choisissons une direction de propagation OP faisant un angle  $\theta_1$ ,

Fig. 15.



avec l'axe 1; cette direction coupe l'ellipsoïde en un point P situé à la distance  $r$ ; nous poserons

$$(78) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta_1 = q_1, \quad r q_1 = a_1, \quad r^2(1 - q_1^2) = a_2^2 + a_3^2, \\ r^2 = \frac{r_m^2}{1 + q_1^2(2\alpha_1 + \alpha_1^2)}; \end{array} \right.$$

d'où le développement approché

$$(79) \quad r = r_m \left[ 1 - \frac{q_1^2}{2} (2\alpha_1 + \alpha_1^2) + \frac{3}{2} q_1^4 \alpha_1^2 \dots \right]$$

Telle sera l'expression de  $r$  (inverse  $\Lambda_m^{-1}$  de la longueur d'onde minima) en fonction de  $q_1$ , pour le solide dilaté suivant la direction 1.

Le volume intérieur à l'ellipsoïde est  $\frac{4}{3} \pi$  fois le produit des trois axes

$$(80) \quad u_1 = \frac{4}{3} \pi \frac{r_m^3}{1 + \alpha_1} = \frac{1}{\nu(1 + \alpha_1)} = \frac{1}{\nu_1}.$$

Les conditions 1° et 2° sont donc correctement remplies.

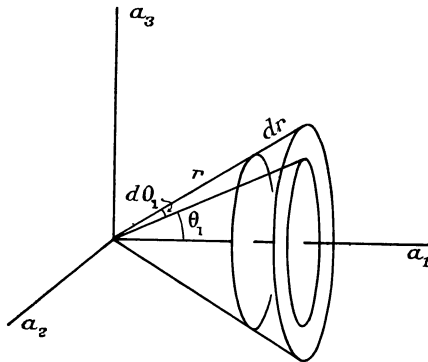
### 13. Dénombrement des degrés de liberté de vibration, et calcul de

**l'énergie libre F.** — Lorsque nous aurons fixé l'angle  $\theta_1$  que fait la direction de propagation d'une onde, avec l'axe 1, nous pourrons calculer les vitesses  $W_k$  ( $W_\alpha$ ,  $W_\beta$  et  $W_\gamma$ ) des trois types  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  d'ondes élastiques capables de se propager sans déformation dans cette direction. Ces trois vitesses correspondront à trois directions de vibration  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , perpendiculaires entre elles, et dont l'une ( $k = \gamma$ ) sera presque longitudinale suivant  $\theta_1$ , tandis que les deux autres ( $k = \alpha, \beta$ ) seront presque transversales.

Considérons alors un volume  $V_1 = V(1 + \alpha_1)$  qui contient  $N$  atomes, et cherchons combien de types d'ondes propres nous trouverons, dans un intervalle  $r$ ,  $r + dr$  et dans des directions comprises entre  $\theta_1$  et  $\theta_1 + d\theta_1$  (*fig. 16*) c'est-à-dire entre

$$\cos \theta_1 = q_1 \quad \text{et} \quad q_1 + dq_1, \quad dq_1 = -\sin \theta_1 d\theta_1.$$

Fig. 16.



Des raisonnements classiques donnent la réponse (*Tenseurs*, p. 267, 326).

$$(81) \quad d\mathcal{N} = V_1 r^2 dr d\Omega = 2\pi V_1 r^2 dr \sin \theta_1 d\theta_1 = -2\pi V_1 r^2 dr dq_1.$$

L'intégration à l'intérieur de tout l'ellipsoïde de la première zone redonne  $N$ ; chaque type d'onde ( $k = \alpha, \beta, \gamma$ ) fournit donc le même nombre  $N$  de vibrations propres, soit au total  $3N$  degrés de liberté pour le volume  $V_1$ , comme il se doit.

Lorsque  $r$  et  $q_1$  sont donnés, les vitesses  $W_k$  des ondes sont déterminées par  $q_1$  et la longueur d'onde  $\Lambda$  est égale à  $r^{-1}$ , de sorte que

les  $d\mathcal{U}$  vibrations (80) correspondent à des fréquences  $\nu_k$

$$(82) \quad \nu_k = W_k r \quad (k = 1, 2, 3)$$

et prennent à température  $T$  une énergie  $u(\nu_k)$ , une entropie  $S(\nu_k)$  et une énergie libre  $\varphi(\nu_k)$ , représentées par les formules quantiques bien connues. relatives à l'oscillateur harmonique,

$$(83) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(\nu) = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} + \frac{1}{2} h\nu = \xi kT \left( \frac{1}{e^{\xi} - 1} + \frac{1}{2} \right), \\ s(\nu) = k \left[ \frac{\xi}{e^{\xi} - 1} - \log(1 - e^{-\xi}) \right], \\ u - Ts = \varphi(\nu) = kT \left\{ \log[1 - e^{-\xi}] + \frac{1}{2} \xi \right\} \quad \left( \xi = \frac{h\nu}{kT} = \frac{hW}{kT} r \right). \end{array} \right.$$

Ce qui nous intéressera particulièrement, c'est l'intégrale de l'énergie libre  $\Phi_k$  pour un type  $k$  ( $= \alpha, \beta$  ou  $\gamma$ ) de vibration des ondes élastiques; nous l'obtiendrons en faisant la somme

$$\begin{aligned} \Phi_k(\alpha_1) &= kT \int \left\{ \log(1 - e^{-\xi}) + \frac{1}{2} \xi \right\} d\mathcal{U} \\ &= 2\pi V(1 + \alpha_1) kT \int_{-1}^{+1} dq_1 \int_0^r \left\{ \frac{1}{2} \xi + \log(1 - e^{-\xi}) \right\} r^2 dr, \end{aligned}$$

car l'angle  $\theta_1$  varie de 0 et  $\pi$ , ce qui fait courir  $q_1$  de  $-1$  à  $+1$ ; la valeur maxima  $r$  d'intégration sera tirée de (79).

$$(84) \quad \Phi_k(\alpha_1) = 2\pi V(1 + \alpha_1) \frac{(kT)^4}{h^3} \times \int_{-1}^{+1} \frac{dq_1}{W_k^3} \int_0^{\xi = \frac{hW_k}{kT} r} \left\{ \frac{1}{2} \xi + \log(1 - e^{-\xi}) \right\} \xi^2 d\xi.$$

La vitesse  $W_k$  des ondes dépend de  $\alpha_1$  et  $q_1$ , de sorte qu'on doit la garder sous le signe d'intégration. Nous obtiendrons alors la densité d'énergie libre du solide déformé (rapportée à l'unité de volume initial  $V$ ) en tenant compte des trois types de polarisations des ondes ( $k = \alpha, \beta, \gamma$ ) correspondant aux ondes presque longitudinales et presque transversales, puis en ajoutant la densité d'énergie élastique statique  $\mathcal{E}(\alpha_1)$

du corps déformé

$$(85) \quad F(\alpha_1) = \mathcal{E}(\alpha_1) + U - TS = \mathcal{E}(\alpha_1) + \frac{1}{V} [\Phi_\alpha(\alpha_1) + \Phi_\beta(\alpha_1) + \Phi_\gamma(\alpha_1)].$$

Cette expression devra être identifiée à la forme (70); nous prévoyons donc qu'il faudra pousser tous les développements jusqu'aux termes en  $\alpha_1^2$  car les termes linéaires en  $\alpha_1$  se compenseront.

On pourrait calculer de même l'expression de l'énergie  $U$  d'agitation thermique pour chaque type d'ondes, par une intégrale analogue à (84); il suffirait d'y remplacer  $\log(1 - e^{-\xi})$  par  $\frac{\xi}{e^{\xi} - 1}$ ; nous ne ferons pas ce calcul qui ne présenterait d'intérêt que si l'on voulait évaluer directement les coefficients d'élasticité adiabatiques  $\lambda_s, \mu_s$ ; ce dernier calcul est inutile; on sait en effet d'avance que le coefficient  $\mu_s$  est identique à  $\mu_T$  isotherme (41), et l'on a la relation générale (10) entre  $\kappa_s$  et  $\kappa_T$ , qui suffit alors à déterminer  $\lambda_s$ .

**14. Énergie élastique statique, pour un solide initialement dilaté suivant  $Ox_1$  (état  $\alpha_1$ ).** — Le calcul à faire ici a déjà été indiqué dans un travail antérieur (1), mais je ne l'avais poursuivi qu'au premier ordre en  $\alpha_1$ , alors que l'étude actuelle exige que les calculs soient poussés jusqu'aux termes en  $\alpha_1^2$ , comme nous venons de le voir.

Nous partons donc d'un solide à température  $T$ , sous pression extérieure nulle, avec une énergie potentielle dont la densité s'exprime par le développement (28), poussé jusqu'au 3<sup>e</sup> ordre. Nous effectuons ensuite une dilatation  $\alpha_1$  unilatérale (67), et nous partons de cet état initial nouveau, dans lequel le solide n'est plus isotrope, mais présente le caractère uniaxe.

A partir de cet état initial uniaxe intermédiaire, nous effectuons un petit déplacement arbitraire  $w_1, w_2, w_3$ , de sorte que le point  $z_1, z_2, z_3$  vienne en  $z_1 + w_1, z_2 + w_2, z_3 + w_3$ ; au total, pour passer de l'état isotrope à température  $T$ , à l'état final déformé, les déplacements sont

$$(86) \quad u_1 = \alpha_1 x_1 + w_1, \quad u_2 = w_2, \quad u_3 = w_3.$$

---

(1) *Ann. de Physique*, t. 4, 1925, p. 574-577; *Tenseurs*, p. 242.

Nous appellerons  $e_{ik}$  les déformations (16) comptées depuis l'état isotrope à température  $T$  et  $f_{ik}$  les déformations calculées à partir de l'état intermédiaire uniaxe

$$(87) \quad f_{ik} = \frac{\partial w_i}{\partial z_k} + \frac{\partial w_k}{\partial z_i} + \sum_r \frac{\partial w_r}{\partial z_i} \frac{\partial w_r}{\partial z_k}.$$

On passe des unes aux autres par les relations, faciles à vérifier,

$$(88) \quad \left\{ \begin{array}{l} e_{11} = 2\alpha_1 + \alpha_1^2 + (1 + \alpha_1)^2 f_{11} = f_{11} + (2\alpha_1 + \alpha_1^2)(1 + f_{11}), \\ e_{22} = f_{22}, \\ e_{33} = f_{33}, \\ e_{12} = (1 + \alpha_1) f_{12}, \\ e_{23} = f_{23}, \\ e_{31} = (1 + \alpha_1) f_{31}. \end{array} \right.$$

Le calcul à faire est le suivant : prendre les expressions (88), et les porter dans l'expression (28) qui donne l'énergie potentielle  $\mathcal{E}$  pour un volume qui était 1 dans l'état isotrope à température  $T$ . Ce volume est devenu  $1 + \alpha_1$  dans l'état intermédiaire uniaxe; la densité d'énergie  $\mathcal{E}'$ , comptée à partir de cet état intermédiaire uniaxe, sera donc

$$(89) \quad \mathcal{E}' = \frac{\mathcal{E}}{1 + \alpha_1}.$$

Pour ne garder que les termes utiles, jusqu'au 2° ordre en  $\alpha_1$ , on peut procéder ainsi : les expressions (88) montrent que la dilatation anisotrope  $\alpha_1$  provoque les variations de déformation suivantes :

$$(90) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta e_{11} = f_{11} - e_{11} = (2\alpha_1 + \alpha_1^2)(1 + f_{11}), \\ \delta e_{22} = \delta e_{33} = \delta e_{23} = 0, \\ \delta e_{12} = f_{12} - e_{12} = \alpha_1 f_{12}, \quad \delta e_{13} = \alpha_1 f_{13}. \end{array} \right.$$

Nous pourrions alors développer l'expression de  $\mathcal{E}$  en série de Taylor par rapport aux accroissements  $\delta e_{ik}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(e_{ik}) &= (1 + \alpha_1) \mathcal{E}' = \mathcal{E}(f_{ik}) + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial e_{11}} \delta e_{11} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial e_{12}} \delta e_{12} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial e_{13}} \delta e_{13} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial e_{11}^2} (\delta e_{11})^2 \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial e_{12}^2} (\delta e_{12})^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial e_{13}^2} (\delta e_{13})^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial e_{11} \partial e_{12}} \delta e_{11} \delta e_{12} \\ &+ \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial e_{11} \partial e_{13}} \delta e_{11} \delta e_{13} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial e_{12} \partial e_{13}} \delta e_{12} \delta e_{13} + \dots \end{aligned}$$

le tableau suivant indique les valeurs des dérivées partielles des divers invariants  $I_1, I_2, I_3, I_1^2, I_1^3, I_2 I_3$  qui figurent dans l'expression (28) et s'y trouvent dotés des coefficients respectifs indiqués ci-après; on se reporte aux formules (17) pour calculer les dérivées.

Invariants....	$I_1.$	$I_1^2.$	$I_2.$	$I_1 I_2.$	$I_1^3.$	$I_3.$
Coefficients...	$-\frac{\sigma}{2}.$	$\frac{\lambda}{8}.$	$\frac{\mu}{4}.$	A.	B.	C.
$\frac{\partial}{\partial e_{11}}$	1	$2 I_1$	$2 e_{11}$	$I_2 + 2 e_{11} I_1$	$3 I_1^2$	$3(e_{11}^2 + e_{12}^2 + e_{13}^2)$
$\frac{\partial}{\partial e_{12}}$	0	0	$4 e_{12}$	$4 e_{12} I_1$	0	$6(e_{11} e_{12} + e_{12} e_{22} + e_{13} e_{32})$
$\frac{\partial}{\partial e_{13}}$	0	0	$4 e_{13}$	$4 e_{13} I_1$	0	$6(e_{11} e_{13} + e_{12} e_{23} + e_{13} e_{33})$
$\frac{\partial^2}{\partial e_{11}^2}$	0	2	2	$4 e_{11} + 2 I_1$	$6 I_1$	$6 e_{11}$
$\frac{\partial^2}{\partial e_{12}^2}$	0	0	4	$4 I_1$	0	$6(e_{11} + e_{22})$
$\frac{\partial^2}{\partial e_{13}^2}$	0	0	4	$4 I_1$	0	$6(e_{11} + e_{33})$
$\frac{\partial^2}{\partial e_{11} \partial e_{12}}$	0	0	0	$4 e_{12}$	0	$6 e_{12}$
$\frac{\partial^2}{\partial e_{11} \partial e_{13}}$	0	0	0	$4 e_{13}$	0	$6 e_{13}$
$\frac{\partial^2}{\partial e_{12} \partial e_{13}}$	0	0	0	0	0	$6 e_{23}$

Il faut alors prendre les valeurs des dérivées dans le tableau, les multiplier par les coefficients de la deuxième ligne du tableau, utiliser les  $\delta e_{ik}$  de (90) et l'on forme l'expression (91) désirée; nous y remplacerons les  $e_{ik}$  par les  $f_{ik}$ , comme l'indique la formule (91); de même, les  $I$  seront remplacés par des expressions  $J$  qui représentent les mêmes groupes de termes (17), mais où l'on aurait écrit les  $f_{ik}$  au lieu des  $e_{ik}$ ; dans tout cet ensemble de termes nous effacerons ceux qui sont :

- 1° d'ordre supérieur à 2 par rapport à  $\alpha_1$ ,
- 2° d'ordre supérieur à 2 par rapport aux  $f_{ik}$ .

Voici ce qui reste, après un premier triage de termes,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(e_{ik}) &= (1 + \alpha_1) \mathcal{E}'(f_{ik}) \\
 &= \mathcal{E}(f_{ik}) + \left[ -\frac{\varpi}{2} + \frac{\lambda}{4} J_1 + \frac{\mu}{2} f_{11} \right. \\
 &\quad \left. + A (J_2 + 2f_{11} J_1) + 3B J_1^2 + 3C (f_{11}^2 + f_{12}^2 + f_{13}^2) \right] \\
 &\quad \times (2\alpha_1 + \alpha_1^2) (1 + f_{11}) \\
 &\quad + \mu f_{12}^2 \alpha_1 + \mu f_{13}^2 \alpha_1 \\
 &\quad + \left[ \frac{\lambda}{4} + \frac{\mu}{2} + A (4f_{11} + 2J_1) + 6B J_1 + 6C f_{11} \right] \\
 &\quad \times 2\alpha_1^2 (1 + 2f_{11} + f_{11}^2) \\
 &\quad + \frac{\mu}{2} f_{12}^2 \alpha_1^2 + \frac{\mu}{2} f_{13}^2 \alpha_1^2 \\
 &\quad + [4A + 6C] 2\alpha_1^2 (f_{12}^2 + f_{13}^2).
 \end{aligned}$$

Continuons le groupement de termes :

$$\begin{aligned}
 (93) \quad \mathcal{E}(e_{ik}) &= \mathcal{E}(f_{ik}) - \varpi \alpha_1 + \left( \frac{\lambda}{2} + \mu - \frac{\varpi}{2} \right) \alpha_1^2 \\
 &\quad + J_1 \left[ \frac{\lambda}{4} (2\alpha_1 + \alpha_1^2) + 4A \alpha_1^2 + 12B \alpha_1^2 \right] \\
 &\quad + f_{11} \left\{ \frac{\mu - \varpi}{2} (2\alpha_1 + \alpha_1^2) + \left( \frac{\lambda}{2} + \mu \right) 2\alpha_1^2 + 8A \alpha_1^2 + 12C \alpha_1^2 \right\} \\
 &\quad + J_1^2 3B (2\alpha_1 + \alpha_1^2) \\
 &\quad + J_2 A (2\alpha_1 + \alpha_1^2) \\
 &\quad + f_{11} J_1 \left[ \left( 2A + \frac{\lambda}{4} \right) (2\alpha_1 + \alpha_1^2) + 8A \alpha_1^2 + 24B \alpha_1^2 \right] \\
 &\quad + f_{11}^2 \left[ 3C + \frac{\mu}{2} \right] (2\alpha_1 + \alpha_1^2) + \left( \frac{\lambda}{2} + \mu \right) \alpha_1^2 + 16A \alpha_1^2 + 24C \alpha_1^2 \\
 &\quad + f_{12}^2 \left[ 3C (2\alpha_1 + \alpha_1^2) + \mu \alpha_1 + \frac{\mu}{2} \alpha_1^2 + 2\alpha_1^2 (4A + 6C) \right] \\
 &\quad + f_{13}^2 \left[ 3C (2\alpha_1 + \alpha_1^2) + \mu \alpha_1 + \frac{\mu}{2} \alpha_1^2 + 2\alpha_1^2 (4A + 6C) \right]
 \end{aligned}$$

Telle est l'expression de l'énergie potentielle élastique du solide qui a été soumis, à partir de l'état isotrope, à température T :

1° à une dilatation anisotrope  $\alpha_1$  (état intermédiaire uniaxe);

2° à une déformation arbitraire, à partir de l'état intermédiaire uniaxe; cette déformation étant caractérisée par les  $f_{ik}$  et les combinaisons  $J_1 J_2$  de ces  $f_{ik}$ .

La formule (93) contient des termes indépendants des  $f_{ik}$ , qui sont  $\left[ -\varpi \alpha_1 + \left( \frac{\lambda}{2} + \mu - \frac{\varpi}{2} \right) \alpha_1^2 \right]$  et représentent le travail des forces qu'il



a fallu appliquer pour réaliser la dilatation anisotrope  $\alpha_1$ . Il y a en outre des termes linéaires par rapport aux  $f_{ik}$  [termes en  $J_1$  et  $f_{11}$ ]; cela ne peut pas nous surprendre, car les forces extérieures appliquées pour réaliser la dilatation  $\alpha_1$  sont toujours présentes, ainsi que la pression initiale  $\varpi$ ; ces diverses forces extérieures effectuent des travaux qui sont positifs ou négatifs suivant que le déplacement  $\varpi$  a l'un ou l'autre signe; en outre ces forces peuvent introduire des termes d'ordre supérieur. De toutes façons nous sommes certains que l'effet des forces extérieures sera de compenser tout ce qui, dans les termes linéaires en  $f_{11}$  ou  $J_1$ , est du premier ordre vis-à-vis des dérivées  $\frac{\partial \omega_i}{\partial z_k}$ ; mais cette compensation ne joue pas sur les termes du second ordre, et nous savons que  $f_{11}$  et  $J_1$  contiennent des termes du second ordre en  $\frac{\partial \omega_i}{\partial z_k}$ , parce que les expressions (87) appliquées aux  $f_{ik}$  renferment des doubles produits  $\sum_r \frac{\partial \omega_r}{\partial z_i} \frac{\partial \omega_r}{\partial z_k}$ .

15. **Ondes élastiques.** — La première question à régler est celle du rôle des forces extérieures : pression  $\varpi$  et efforts réalisant la dilatation  $\alpha_1$ . Nous procéderons suivant la méthode générale indiquée (*Tenseurs*, p. 230) antérieurement, en introduisant une certaine fonction  $\mathcal{H}$  qui représente l'énergie potentielle du système des forces extérieures, rapportée à l'unité de volume du solide.

Une *première hypothèse* consistera à affirmer que les forces extérieures restant constantes, leur énergie  $\mathcal{H}$  est simplement linéaire par rapport aux dérivées partielles  $\frac{\partial \omega_i}{\partial z_k}$  et compense exactement les termes linéaires de  $\mathcal{E}$  (93), cette hypothèse s'exprime ainsi :

$$(94, I) \quad (1 + \alpha_1) \mathcal{H}_1 = -2 \left( \frac{\partial \omega_1}{\partial z_1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial z_2} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z_3} \right) \\ \times \left[ -\frac{\varpi}{2} + \frac{\lambda}{4} (2\alpha_1 + \alpha_1^2) + 4A\alpha_1^2 + 12B\alpha_1^2 \right] \\ - 2 \frac{\partial \omega_1}{\partial z_1} \left\{ \frac{\mu - \varpi}{2} (2\alpha_1 + \alpha_1^2) \right. \\ \left. + (\lambda + 2\mu)\alpha_1^2 + 8A\alpha_1^2 + 12C\alpha_1^2 \right\}.$$

Dans la première parenthèse, le terme en  $-\frac{\varpi}{2}$  provient de  $\mathcal{E}(f_{ik})$ ; ayant introduit cette énergie potentielle  $\mathcal{H}_1$  supplémentaire, on

obtiendra une énergie potentielle totale

$$\mathcal{E}'_2 = \mathcal{E}' + \mathcal{H}_1$$

qui sera simplement formée par l'ensemble des termes, du second degré en  $\frac{\partial w_i}{\partial z_k}$ , que l'on tire de l'expression (93).

Ces termes du second degré de  $\mathcal{E}'_2$  régiront la propagation des ondes élastiques dans le solide, et voici leur expression :

$$(95, I) \quad (1 + \alpha_1) \mathcal{E}'_2 = \sum_{i,k} \left( \frac{\partial w_i}{\partial z_k} \right)^2 \left[ -\frac{\varpi}{2} + \frac{\lambda}{4} (2\alpha_1 + \alpha_1^2) + 4A\alpha_1^2 + 12B\alpha_1^2 \right] \\ + \sum_k \left( \frac{\partial w_k}{\partial z_1} \right)^2 \left\{ \frac{\mu - \varpi}{2} (2\alpha_1 + \alpha_1^2) \right. \\ \left. + \left( \frac{\lambda}{2} + \mu \right) 2\alpha_1^2 + 8A\alpha_1^2 + 12C\alpha_1^2 \right\} \\ + GJ_1^2 + HJ_2 + 2K \frac{\partial w_1}{\partial z_1} J_1 + 4M \left( \frac{\partial w_1}{\partial z_1} \right)^2 \\ + N \left[ \left( \frac{\partial w_1}{\partial z_2} + \frac{\partial w_2}{\partial z_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_1}{\partial z_3} + \frac{\partial w_3}{\partial z_1} \right)^2 \right]$$

avec

$$G = \frac{\lambda}{8} + 3B(2\alpha_1 + \alpha_1^2),$$

$$H = \frac{\mu}{4} + A(2\alpha_1 + \alpha_1^2),$$

$$K = \left( 2A + \frac{\lambda}{4} \right) (2\alpha_1 + \alpha_1^2) + 8A\alpha_1^2 + 24B\alpha_1^2,$$

$$M = \left( 3C + \frac{\mu}{2} \right) (2\alpha_1 + \alpha_1^2) + \left( \frac{\lambda}{2} + \mu \right) \alpha_1^2 + 16A\alpha_1^2 + 24C\alpha_1^2,$$

$$N = \left( 3C + \frac{\mu}{2} \right) (2\alpha_1 + \alpha_1^2) + 2\alpha_1^2(4A + 6C).$$

Quelques explications sont ici nécessaires : nous avons tout d'abord, dans (93) les termes linéaires vis-à-vis des déformations, qui comprennent  $-\frac{\varpi}{2} J_1$  [provenant de  $\mathcal{E}(f_{ik})$  d'après (28)] et des termes en  $J_1[\dots] + f_{i1}\{\dots\}$  écrits explicitement; là nous ne gardons que les termes de  $J_1$  et  $f_{i1}$  du 2° ordre en  $\frac{\partial w_i}{\partial z_k}$ ; cela nous donne les deux premières lignes de (95). Ensuite viennent des termes du second degré vis-à-vis des  $f_{ik}$ ; ce sont  $\frac{\lambda}{8} J_1^2 + \frac{\mu}{4} J_2$  provenant de  $\mathcal{E}(f_{ik})$  et tous les termes explicites de (93); dans ces termes il suffit de garder les

expressions du premier degré en  $\frac{\partial w_i}{\partial z_k}$ , et de poser :

$$(96) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{ik} = \frac{\partial w_i}{\partial z_k} + \frac{\partial w_k}{\partial z_i}, \\ J_1 = 2 \left[ \frac{\partial w_1}{\partial z_1} + \frac{\partial w_2}{\partial z_2} + \frac{\partial w_3}{\partial z_3} \right], \\ J_2 = 4 \left( \frac{\partial w_1}{\partial z_1} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial w_2}{\partial z_2} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial w_3}{\partial z_3} \right)^2 \\ \quad + 2 \left( \frac{\partial w_1}{\partial z_2} + \frac{\partial w_2}{\partial z_1} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial w_1}{\partial z_3} + \frac{\partial w_3}{\partial z_1} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial w_2}{\partial z_3} + \frac{\partial w_3}{\partial z_2} \right)^2 \end{array} \right.$$

Une *seconde hypothèse* est possible. Elle consiste à admettre que la pression  $\varpi$  fournit une énergie potentielle rigoureusement égale à  $\varpi \delta V$  et à tenir compte de l'expression complète de la variation de volume  $\delta V$  (23) qui n'est pas linéaire par rapport aux dérivées partielles du déplacement  $w$ . Cette hypothèse diffère de la précédente, où l'on n'a inscrit dans  $\mathcal{J}\mathcal{C}_1$  (94, I) que des termes linéaires vis-à-vis des dérivées de  $w$ . Il est heureusement inutile de refaire les calculs complets dans cette seconde hypothèse, car elle a déjà fait l'objet d'une discussion minutieuse (*Tenseurs*, p. 231 et 244). L'introduction d'une pression uniforme  $\varpi$  a pour effet de supprimer, dans l'expression (28) de l'énergie élastique, le terme en  $-\frac{\varpi}{2} I_1$  et de remplacer les coefficients d'élasticité  $\lambda$  et  $\mu$  par des *coefficients apparents*

$$\lambda_a = \lambda + \varpi, \quad \mu_a = \mu - \varpi.$$

Quant aux efforts qui provoquent la dilatation unilatérale  $\alpha_1$ , nous supposons qu'ils ne donnent dans l'énergie potentielle que des termes strictement linéaires.

Cette seconde hypothèse nous conduit à récrire les formules (94) et (95) avec les modifications suivantes :

(94, II) (95, II) mêmes formules que (94, I) et (95, I) mais où l'on posera  $\varpi = 0$  et remplacera  $\lambda, \mu$  par  $\lambda_a, \mu_a$ .

Dans l'une ou l'autre de ces hypothèses, la formule (95) donne l'énergie potentielle élastique qui, dans le milieu uniaxe  $\alpha_1$ , régit la propagation des ondes élastiques. Prenons alors des déplacements  $w_i$  capables de représenter une onde plane :

$$(97) \quad w_i = D_i \varphi \left[ t - \frac{q_1 z_1 + q_2 z_2 + q_3 z_3}{W} \right],$$

où  $q_1, q_2, q_3$  sont les cosinus directeurs du rayon et  $W$  la vitesse de propagation. Nous suivrons la marche indiquée en détail dans *Tenseurs* (p. 252 et suiv.); nous aurons

$$\frac{\partial w_i}{\partial z_k} = - \frac{q_k}{W} D_i \varphi$$

et nous formerons (*Tenseurs*, XI. 7) l'expression  $T - \mathcal{E}'_2$  différence de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, par unité de volume; il ne s'agit plus ici que de calculs un peu fastidieux mais sans difficultés, dont voici le résultat :

$$(1 + \alpha_1) T = \frac{1}{2} \rho D^2 \varphi'^2,$$

$\rho$ , densité dans l'état isotrope à température  $T$

$$(98) \quad -\mathcal{F} = (1 + \alpha_1) (T - \mathcal{E}'_2) \\ = \frac{-\varphi'^2}{W^2} \left[ D^2 \left[ -\frac{\rho}{2} W^2 + [\dots] + 2H + q_1^2 \{\dots\} + q_1^2 N \right] \right. \\ \left. + L^2 (4G + 2H) + D_1^2 (N + 4q_1^2 (M - N)) \right. \\ \left. + 2D_1 q_1 L (2K + N) \right]$$

avec

$$D^2 = D_1^2 + D_2^2 + D_3^2, \quad L = D_1 q_1 + D_2 q_2 + D_3 q_3$$

composante longitudinale.

Les parenthèses  $[\dots]$  et  $\{\dots\}$  sont celles de la formule (95). L'expression (98) est une forme quadratique en  $D_1, D_2, D_3$ , et pour suivre la discussion classique (*Tenseurs*, p. 253) il faut chercher les axes de l'ellipsoïde correspondant; les directions de ces axes sont trois directions perpendiculaires, que nous appellerons  $\alpha, \beta, \gamma$ , et qui donnent les directions que doit posséder la vibration  $\vec{D}(D_1, D_2, D_3)$  pour fournir une onde (97) qui se propage sans déformation. Les longueurs des axes de l'ellipsoïde

$$(99) \quad T - \mathcal{E}'_2 = 0, \quad \mathcal{F} = 0$$

définissent les vitesses de propagation  $W_\alpha, W_\beta, W_\gamma$  de ces trois ondes polarisées privilégiées.

**16. Polarisation principales des ondes élastiques, dans le milieu déformé  $\alpha_1$ ; vitesses de propagation.** — Examinons l'expression (98);

elle dépend de la direction de vibration  $\vec{D}$  par l'intermédiaire de

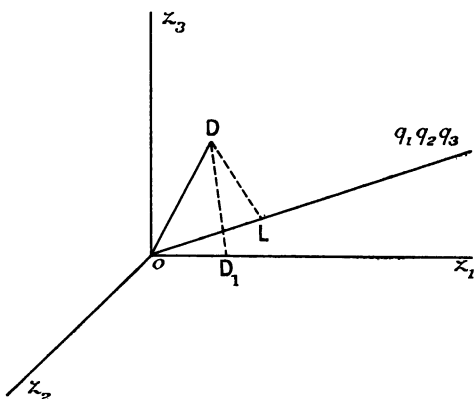
$D^2$ , carré de la longueur du vecteur  $\vec{D}$ ,

$L$ , composante de  $\vec{D}$  suivant la direction de propagation  $q_1 q_2 q_3$ ,

$D_1$ , composante de  $\vec{D}$  suivant l'axe  $z_1$ .

La figure 17 illustre ce fait, d'où résulte que le plan  $O z_1 q$  est un

Fig. 17.



plan de symétrie de l'ellipsoïde; nous aurons donc un premier axe, perpendiculaire à ce plan  $z_1 q$  et les deux autres axes dans le plan  $z_1 q$ :  
 premier axe  $\alpha$ , exactement transversal perpendiculaire au plan  $z_1 q$ ;  
 second axe  $\beta$ , presque transversal dans le plan  $z_1 q$ ;  
 troisième axe  $\gamma$  presque longitudinal dans le plan  $z_1 q$ .

*Axe transversal  $\alpha$ ;  $L = 0$   $D_1 = 0$ .*

La formule (99) donne alors

$$(100) \quad -\frac{\rho}{2} W_\alpha^2 + [\dots] + 2H + q_1^2 [\{\dots\} + N] = 0,$$

ce qui nous fournit la vitesse de propagation  $W_\alpha$ .

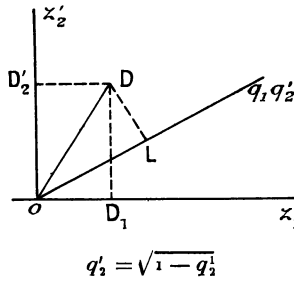
Il nous faut maintenant chercher les axes  $\beta$  et  $\gamma$  situés dans le

(1) On ne confondra pas la direction  $\alpha\beta\gamma$  avec les dilatations  $\alpha$  ou  $\alpha_1$  antérieurement utilisées dans d'autres paragraphes.

plan  $z_1 q$ ; prenons deux axes  $z_1 z'_2$  dans ce plan (*fig.* 18). La forme quadratique  $\mathcal{F}$  s'écrira

$$(101) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F} = a_{11} D_1^2 + 2 a_{12} D_1 D'_2 + a_{22} D_2'^2 - \frac{\rho}{2} W^2 (D_1^2 + D_2'^2), \\ a_{11} = + [\dots] + 2H + N + q_1^2 [\{\dots\} + 4G + 2H + 4K + 4M - N], \\ a_{12} = q_1 q_2' (4G + 2H + 2K + N), \\ a_{22} = + [\dots] + 4G + 4H + q_2'^2 [\{\dots\} - 4G - 2H + N], \\ q_2' = \sqrt{1 - q_1^2}. \end{array} \right.$$

Fig. 18.



Les axes sont donnés par les conditions  $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial D_1} = 0$  et  $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial D_2'} = 0$  qui ne sont compatibles que lorsqu'on a

$$(102) \quad \left( a_{11} - \frac{\rho}{2} W^2 \right) \left( a_{22} - \frac{\rho}{2} W^2 \right) - a_{12}^2 = 0,$$

d'où

$$(103) \quad \rho W^2 = a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 + 4 a_{12}^2}.$$

Les deux solutions ainsi définies sont  $W_\beta$  et  $W_\gamma$ , et correspondent à une vibration  $\beta$  presque transversale, et à une vibration  $\gamma$  presque longitudinale (<sup>1</sup>); nous ne déterminerons pas ces directions de vibration qui ne nous intéressent guère, car nous n'avons besoin que des vitesses  $W_\beta$ ,  $W_\gamma$  de propagation des ondes.

Indiquons alors les calculs numériques, en remontant par (103),

(<sup>1</sup>) Dans un travail antérieur (*Ann. de Physique*, t. 4, 1925, p. 580) j'avais fait les calculs d'une manière peu rigoureuse et indiqué (à tort) une vibration exactement longitudinale, ce qui ne pouvait être exact, cette vibration devant être nécessairement perpendiculaire aux deux autres.

(101) et (95)

$$(104) \quad a_{11} + a_{22} = \frac{\lambda + 3\mu - 2\varpi}{2} + \alpha_1 [\lambda + \mu + 12A + 24B + 6C] \\
+ \alpha_1 q_1^2 [2\lambda + 6\mu - 2\varpi + 16A + 24C] \\
+ \alpha_1^2 \left[ \frac{\lambda + \mu}{2} + 22A + 36B + 15C \right] \\
+ \alpha_1^2 q_1^2 [5\lambda + 11\mu - \varpi + 120A + 96B + 132C].$$

On doit procéder de même pour les termes sous le radical, et regrouper les termes en  $\alpha_1$ ,  $\alpha_1^2$  de façon à extraire la racine carrée, en tenant compte de la petitesse de  $\alpha_1$ ; il est essentiel de garder tous les termes en  $\alpha_1^2$  au complet. Les calculs sont assez pénibles et aboutissent à ceci

$$(105) \quad \rho.W^2 = \frac{\lambda + 3\mu - 2\varpi}{2} \pm \frac{\lambda + \mu}{2} \\
+ \alpha_1 \left\{ \begin{array}{l} \lambda + \mu + 12A + 24B + 6C \quad \pm (-\mu + 4A + 24B - 6C) \\ + q_1^2 [-2\varpi + 2\lambda + 6\mu + 16A + 24C \pm (2\lambda + 4\mu + 16A + 24C)] \end{array} \right\} \\
+ \alpha_1^2 \left[ \begin{array}{l} \frac{\lambda + \mu}{2} + 22A + 36B + 15C \quad \pm \left( -\frac{\mu}{2} - 6A + 12B - 15C \right) \\ + q_1^2 [-\varpi + 5\lambda + 11\mu + 120A + 96B + 132C] \\ \quad \pm q_1^2 [3\lambda + 10\mu + 104A + 96B + 108C] \\ \quad \mp q_1^2 4\mu \end{array} \right] \\
\pm \alpha^2 4(q_1^2 - q_1) \frac{(\mu + 8A + 12C)^2}{\lambda + \mu}.$$

En examinant les termes de la première ligne, on reconnaît immédiatement que

le signe — donne l'onde presque transversale ( $\beta$ ),  
le signe + donne l'onde presque longitudinale ( $\gamma$ ).

Nous obtenons donc, en regroupant les formules (100) et (105) pour les polarisations  $k = \alpha, \beta$  et  $\gamma$ , des expressions du type général suivant

$$(106) \quad W_k^2 = W_{k0}^2 + p\alpha_1 + g\alpha_1^2 + r\alpha_1 q_1^2 + s\alpha_1^2 q_1^2 + t\alpha_1^2 q_1^4,$$

et les coefficients des ondes  $\alpha, \beta, \gamma$  sont inscrits au tableau suivant :

(107). — Types d'ondes élastiques.

Coefficients.	Onde transversale $\alpha$ .	Onde presque transversale (signe -) $\beta$ .	Onde presque longitudinale (signe +) $\gamma$ .
$\rho W_0^2 \dots\dots$	$\mu - \varpi$	$\mu - \varpi$	$\lambda + 2\mu - \varpi$
$\rho p \dots\dots$	$\lambda + 8A$	$\lambda + 2\mu + 8A + 12C$	$\lambda + 16A + 48B$
$\rho g \dots\dots$	$\frac{\lambda}{2} + 12A + 24B$	$\frac{\lambda}{2} + \mu + 28A + 24B + 30C$	$\frac{\lambda}{2} + 16A + 48B$
$\rho r \dots\dots$	$-2\varpi + 4\mu + 12C$	$-2\varpi + 2\mu$	$-2\varpi + 4\lambda + 10\mu + 32A + 48C$
$\rho s \dots\dots$	$-\varpi + 2\lambda + 6\mu + 32A + 54C$	$-\varpi + 2\lambda + \mu + 16A + 24C - \frac{4(\mu + 8A + 12C)^2}{\lambda + \mu}$	$-\varpi + 8\lambda + 21\mu + 224A + 192B + 240C + \frac{4(\mu + 8A + 12C)^2}{\lambda + \mu}$
$\rho t \dots\dots$	0	$+4\mu + \frac{4(\mu + 8A + 12C)^2}{\lambda + \mu}$	$-4\mu - 4 \frac{(\mu + 8A + 12C)^2}{\lambda + \mu}$

Ce groupe de formules résume tout ce dont nous avons besoin, au sujet de la propagation des ondes dans un milieu soumis à une dilatation unilatérale  $\alpha_1$ ; rappelons que  $q_1$  est le cosinus de l'angle fait par la direction de propagation avec l'axe  $Ox_1$  de dilatation.

Rappelons les deux hypothèses signalées au paragraphe 15, (95) et qui se traduisent ainsi

*Hypothèse I*, formules ci-dessus;

*Hypothèse II*,  $\varpi = 0$ , coefficients apparents,  $\lambda_a = \lambda + \varpi$  et  $\mu_a = \mu - \varpi$ .

17. Intégrales d'énergie libre. — Avec les données obtenues, nous devons revenir au calcul essentiel, celui des intégrales  $\Phi_k$  de (84), nécessaires pour former l'énergie libre (85)

$$(84) \quad \frac{1}{V} \Phi_k = 4\pi(1 + \alpha_1) \frac{(kT)^3}{h^3} \int_0^1 \frac{dq_1}{W_k^3} \int_0^{\xi_k} \varphi(\xi) \xi^2 d\xi$$





avec

$$(83) \quad \frac{1}{kT} \varphi(\xi) = \frac{1}{2} \xi + \log(1 - e^{-\xi}),$$

$$(79) \quad \xi_k = \frac{hW_k}{kT} r = \frac{hW_k}{kT} r_m \left( 1 - \frac{1}{2} q_i^2 (2\alpha_1 + \alpha_i^2) + \frac{3}{2} q_i^4 \alpha_i^2 \dots \right),$$

la limite d'intégration  $r$  est en effet définie par (78) et (79). l'indice  $k$  représente le type d'onde  $\alpha$ ,  $\beta$  ou  $\gamma$  du paragraphe précédent. La première opération consiste à prendre  $W_k$  dans la formule générale (106), et à développer  $\xi_k$  par rapport aux puissances de  $\alpha_1$  en allant jusqu'à  $\alpha_1^2$ , suivant notre règle

$$(108) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_k = \xi_{k0} \left[ 1 + \alpha_1 \frac{\gamma_1}{2W_{k0}^2} + \alpha_1^2 \frac{\gamma_2}{2W_{k0}^2} \right] \quad \left( \xi_{k0} = \frac{hW_{k0}}{kT} r_m \right), \\ \gamma_1 = p + q_i^2 (r - 2W_{k0}^2), \\ \gamma_2 = g - \frac{p^2}{4W_{k0}^2} + q_i^2 \left[ -p + s - W_{k0}^2 - \frac{pr}{2W_{k0}^2} \right] \\ \quad + q_i^4 \left[ -r + t + 3W_{k0}^2 - \frac{r^2}{4W_{k0}^2} \right]. \end{array} \right.$$

Les termes en  $\alpha_1$  et  $\alpha_1^2$  étant petits, on peut alors développer en série de Taylor l'intégrale en  $\xi$  de (84)

$$(109) \quad \int_0^{\xi_k} \varphi \xi^2 d\xi = \int_0^{\xi_{k0}} \varphi \xi^2 d\xi + \alpha_1 \frac{\gamma_1}{2W_{k0}^2} \varphi_{k0} \xi_{k0}^3 \\ + \alpha_1^2 \frac{\xi_{k0}^3}{2W_{k0}^2} \left[ \varphi_{k0} \left( \gamma_2 + \frac{\gamma_1^2}{2W_{k0}^2} \right) + \gamma_1^2 \frac{\xi_{k0} \varphi'_{k0}}{4W_{k0}^2} \right]$$

Meltons partout en facteur  $\xi_{k0}^3$  et notons d'après (76) (108) la relation

$$4\pi V \left( \frac{kT}{hW_{k0}} \right)^3 = \frac{3N}{\xi_{k0}^3}.$$

Posons

$$(110) \quad \Psi_{k0} = \frac{1}{\xi_{k0}^3} \int_0^{\xi_{k0}} \varphi \xi^2 d\xi = \frac{1}{3N} \Phi_{k0},$$

où  $\Phi_{k0}$  est l'énergie libre du solide non déformé; nous pouvons alors

transcrire ainsi nos formules (84) (109)

$$(111) \quad \Phi_k = 3N(1 + \alpha_1) \int_0^1 \left( \frac{W_{k0}}{W_k} \right)^3 dq_1 \\ \times \left\{ \Psi_{k0} + \alpha_1 \frac{\gamma_1 \varphi_{k0}}{2W_{k0}^2} + \alpha_1^2 \frac{\varphi_{k0}(2\gamma_2 W_{k0}^2 + \gamma_1^2) + \frac{1}{2}\gamma_1^2 \xi_{k0} \varphi'_{k0}}{4W_{k0}^4} \right\}.$$

On introduira ici, d'après (106) l'expression

$$\left( \frac{W_{k0}}{W_k} \right)^3 = 1 - \frac{3}{2} \alpha_1 \frac{p + rq_1^2}{W_0^2} - \frac{3}{2} \alpha_1^2 \frac{g + sq_1^2 + tq_1}{W_0^2} + \frac{15}{8} \alpha_1^3 \left( \frac{p + rq_1^2}{W_0^2} \right)^2,$$

on remplacera  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  par leurs développements (108); on regroupera les termes suivant les puissances de  $q_1$  et l'on intégrera en  $q_1$

$$(112) \quad \Phi_k = 3N(1 + \alpha_1) \left\{ \Psi_0 \left[ 1 - \frac{\alpha_1}{2W_{k0}^2} (3p + r) + \frac{\alpha_1^2}{2W_0^2} \left( -3g - s - \frac{3}{5}t + \frac{15p^2 + 10pr + 3r^2}{4W_{k0}^2} \right) \right] \right. \\ \left. + \varphi_{k0} \frac{\alpha_1}{2W_{k0}^2} \left( p + \frac{r}{3} - \frac{2}{3}W_{k0}^2 \right) \right. \\ \left. + \varphi_{k0} \frac{\alpha_1^2}{2W_{k0}^2} \left( g + \frac{s}{3} + \frac{t}{5} + \frac{2}{3}W_{k0}^2 - \frac{5p^2 + \frac{10}{3}pr + r^2}{4W_{k0}^2} \right) \right. \\ \left. + \varphi'_{k0} \xi_{k0} \frac{\alpha_1^2}{2W_{k0}^2} \left( -\frac{p}{3} - \frac{r}{5} + \frac{1}{5}W_{k0} + \frac{p^2 + \frac{2}{3}pr + \frac{1}{5}r^2}{4W_{k0}^2} \right) \right\}.$$

Il reste encore à regrouper le facteur  $(1 + \alpha_1)$  avec les autres; on note alors diverses coïncidences; tout d'abord, le terme  $\varphi'_{k0} \xi_{k0}$  déjà visible sur la dernière ligne de (112) se transforme ainsi (d'après 83)

$$(113) \quad \varphi' \xi = h\nu \left[ \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} + \frac{1}{2} \right] = u(\nu);$$

nous inscrirons donc  $u(\nu_{k0})$  pour ce terme, qui représente l'énergie d'un oscillateur ayant la fréquence limite.

Nous remarquerons ensuite, après réduction du facteur  $(1 + \alpha_1)$  que les fonctions  $\Phi_{k0} = 3N\Psi_{k0}$  et  $N\varphi_{k0}$  ont les mêmes coefficients, au

signe près, il reste donc (d'après 110)

$$(114) \quad -\Phi_{k_0} + N\varphi_{k_0} = -\frac{3N}{\xi_{k_0}^3} \int_0^{\xi_{k_0}} \varphi \xi^2 d\xi + N\varphi_{k_0} \\ = \frac{N}{\xi_{k_0}^3} \int_0^{\xi_{k_0}} \varphi' \xi^3 d\xi = \frac{N}{\xi_{k_0}^3} \int u \xi^2 d\xi = \frac{1}{3} U_{k_0}.$$

Il suffit d'une intégration par parties, et de l'utilisation de (113), pour faire apparaître ici l'énergie d'agitation thermique  $U_{k_0}$  des ondes  $k$  ( $\alpha, \beta$  ou  $\gamma$ ) dans le solide isotrope à température  $T$ .

On aboutit ainsi au résultat suivant

$$\Phi_k = \Phi_{k_0} + \alpha_1 \Phi_{k_1} + \alpha_1^2 \Phi_{k_2} + \dots \quad (k = \alpha, \beta, \gamma), \\ (115) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{k_1} = \left[ \frac{3p+r}{2W_{k_0}^2} - 1 \right] \frac{U_{k_0}}{3}, \\ \Phi_{k_2} = \frac{U_{k_0}}{3} \left[ \frac{3p+3g+r+s+\frac{3}{5}t}{2W_{k_0}^2} - \frac{15p^2+10pr+3r^2}{8W_{k_0}^4} \right] \\ \quad + \frac{Nu(v_{k_0})}{2W_{k_0}^2} \left[ -p - \frac{3}{5}r + \frac{3}{5}W_{k_0}^2 + \frac{15p^2+10pr+3r^2}{20W_{k_0}^2} \right]. \end{array} \right.$$

Nous avons donc obtenu l'expression que nous cherchions, à savoir l'énergie libre d'un solide qui, à température  $T$ , a subi une dilatation unilatérale  $\alpha_1$ ; reportons-nous à (85); l'énergie libre totale est

$$(85) \quad F(\alpha_1) = \mathcal{E}(\alpha_1) + \frac{1}{V} [\Phi_\alpha + \Phi_\beta + \Phi_\gamma],$$

où les  $\Phi$  sont tirés de (115) et correspondent aux trois polarisations  $\alpha, \beta, \gamma$  des vibrations élastiques.

Ainsi que je l'annonçais en (85) au paragraphe 13, les termes linéaires en  $\alpha_1$  doivent se compenser entre  $\mathcal{E}$  et les  $\Phi$  du fait que nous partons d'un état d'équilibre isotherme sous pression extérieure nulle.

Nous prendrons un volume  $V$  unité, de sorte que  $N$  sera le nombre d'atomes par unité de volume, et  $U_{k_0}$  la densité d'énergie thermique des ondes  $k$ .

**18. Discussion; termes en  $\alpha_1$  dans l'énergie libre.** — La condition de pression extérieure nulle, à température  $T$  s'exprime par les rela-

tions (33) (60)

$$(116) \quad \varpi = -\varpi_0 + Tq = \sum_{\lambda=\alpha, \beta, \gamma} U_{\lambda 0} \frac{\partial \log \Theta_{\lambda}}{\partial V}.$$

D'autre part, en vertu de nos calculs antérieurs, le terme linéaire en  $\alpha_1$ , dans  $\mathcal{E}(\alpha_1)$ , se réduit à  $-\varpi\alpha_1$ . La compensation des termes en  $\alpha_1$  dans l'expression (85) prise pour un volume V unité s'écrirait donc

$$(117) \quad \varpi = \sum_k \Phi_{\lambda k} = \sum_k \frac{1}{3} U_{\lambda 0} \left[ \frac{3p+r}{2W_{k0}^2} - 1 \right]. \quad (?)$$

Nous allons donc reprendre les coefficients de  $U_{\lambda 0}$  dans (116) et (117) pour voir s'ils sont identiques.

Reportons-nous au Traité sur les « *Tenseurs en Mécanique* » ; nous y trouvons d'abord [p. 336, éq. XII 55]

$$\frac{\partial \log \Theta_{\lambda}}{\partial V} = -\frac{1}{3V} + \frac{\partial \log W_{\lambda}}{\partial V} \quad (V = 1).$$

Nous voyons alors, en comparant (116) et (117), que nous devons chercher à prouver les relations suivantes :

$$(118A) \quad \frac{1}{2W_{lr}^2} \left[ \left( p + \frac{r}{3} \right)_{\alpha} + \left( p + \frac{r}{3} \right)_{\beta} \right] = 2 \frac{\partial \log W_{lr}}{\partial V} \quad (?)$$

ceci se rapportant aux deux ondes transversales  $\alpha, \beta$ , qui présentent même vitesse  $W_{lr}$  et même énergie  $U_{lr}$

$$(118B) \quad \frac{1}{2W_l^2} \left( p + \frac{r}{3} \right)_l = \frac{\partial \log W_l}{\partial V} \quad (?)$$

cette seconde formule ayant trait aux ondes longitudinales. D'autre part, la variation  $dV$  est égale à  $d\alpha_1$ , si l'on prend  $V = 1$ , de sorte qu'il faut calculer d'après (106)

$$(119) \quad \frac{\partial \log W_{\lambda}}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{2W_{k0}^2} \frac{\partial (W_k^2)}{\partial \alpha_1} = \frac{p + r q_1^2 + \text{termes en } \alpha_1}{2W_{k0}^2};$$

prenons la moyenne pour toutes les orientations; le carré  $q_1^2$  du cosinus directeur prend la moyenne  $\frac{1}{3}$  d'où les égalités 118A et 118B que nous cherchions.

De cette manière, la vérification est complète; mais nous pouvons procéder autrement, et prendre  $p, r$  dans le tableau (107) du paragraphe 16, ce qui fournit les valeurs

$$(120) \quad \begin{cases} \frac{1}{4W_{tr}^2} \left[ \left( p + \frac{r}{3} \right)_\alpha + \left( p + \frac{r}{3} \right)_\beta \right] = \frac{1}{\mu - \varpi} \left[ \frac{\lambda}{2} + \mu - \frac{\varpi}{3} + 4A + 4C \right], \\ \frac{1}{2W_{tr}^2} \left( p + \frac{r}{3} \right)_\gamma = \frac{1}{\lambda + 2\mu - \varpi} \left[ \frac{7}{6}\lambda + \frac{5}{3}\mu - \frac{\varpi}{3} + \frac{40}{3}A + 24B + 8C \right]. \end{cases}$$

D'autre part, les valeurs de  $\frac{\partial \log W_{li}}{\partial V}$  ont été calculées dans mon livre sur les *Tenseurs* [p. 297, éq. XI 125 et XI 126]

$$(121) \quad \begin{cases} \frac{\partial \log W_{tr}}{\partial V} = \frac{1}{\mu_a} \left[ \frac{\lambda_a}{2} + \mu_a + 4A + 4C \right], \\ \frac{\partial \log W_{li}}{\partial V} = \frac{1}{\lambda_a + 2\mu_a} \left[ \frac{7}{6}\lambda_a + \frac{5}{3}\mu_a + \frac{40}{3}A + 24B + 8C \right]. \end{cases}$$

Les coefficients d'élasticité  $\lambda_a, \mu_a$  qui figurent ici sont les coefficients apparents (*Tenseurs*, p. 254, 255)

$$\lambda_a = \lambda + \varpi, \quad \mu_a = \mu - \varpi.$$

Nous avons à comparer les expressions (120) et (121), et ceci dans les deux hypothèses indiquées au paragraphe 15 et rappelées à la fin du paragraphe 16.

*Hypothèse I.* — On prend les formules (120) telles quelles, et l'on substitue  $\lambda_a, \mu_a$  dans (121); les deux expressions ne sont pas tout à fait semblables, car les termes  $-\frac{\varpi}{3}$  de (120) sont remplacés par  $-\frac{\varpi}{2}$  dans (121); tous les termes en  $\lambda, \mu, A, B, C$  coïncident.

*Hypothèse II.* — Dans les formules (120) on supprime les termes en  $\varpi$  et l'on remplace  $\lambda, \mu$  par  $\lambda_a, \mu_a$ ; il y a alors identité absolue avec (121).

Ainsi donc la concordance est complète, avec l'hypothèse II; et pour l'hypothèse I, la différence est minime, car il ne faut pas oublier que les termes en  $\varpi$  sont pratiquement très petits. J'ai noté les ordres de grandeur (*Tenseurs*, p. 244 et 306); les coefficients  $\lambda, \mu, A, B, C$  sont très élevés, de l'ordre de 10000 à 100000 kg par centimètre carré, tandis que les pressions  $\varpi$  restent beaucoup plus faibles (*Tenseurs*, p. 338).

19. Termes en  $\alpha_1$  dans l'énergie libre. — Les formules (115) donnent la forme détaillée des termes  $\Phi_{k_1}$ , en  $\alpha_1^2$ , pour toutes températures; on expliciterait les résultats en fonction des coefficients d'élasticité  $\lambda\mu ABC$ , en prenant dans le tableau (107) les valeurs des  $pgrst$ ; il me paraît inutile de faire ici ce calcul pour température basse, dans l'incertitude de nos connaissances à ce sujet. Je me limiterai aux *hautes températures*, où l'on aura

$$(122) \quad U_{k_0} = NkT = Nu(\nu_{k_0}),$$

ce qui permet de regrouper tous les termes de  $\Phi_{k_2}$ ; j'appellerai  $D_k$  le coefficient suivant *positif* :

$$(123) \quad D_k = \frac{15p' + 10pr + 3r'}{2W_{k_0}'} = \frac{10p' + (5p + 3r)'}{6W_{k_0}^2}$$

et j'obtiens ainsi

$$\Phi_{k_2} = NkT \left[ \frac{3}{10} + \frac{g - \frac{4}{15}r + \frac{1}{3}s + \frac{1}{5}t}{2W_{k_0}^2} - \frac{1}{15} \frac{D_k}{2W_{k_0}^2} \right].$$

Tous calculs faits, le résultat brutal est le suivant :

$$(124) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ondes transversales } \alpha \text{ et } \beta : \\ \Phi_{\alpha'} + \Phi_{\beta'} = \frac{NkT}{2(\mu - \varpi)} \left[ -\frac{4}{3}\varpi + \frac{7}{3}\lambda + \frac{56}{15}\mu + 56A + 48B + 52,8C \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. - \frac{8}{15} \frac{(\mu + 8A + 12C)'}{\lambda + \mu} - \frac{D_{\alpha} + D_{\beta}}{15} \right], \\ \text{ondes longitudinales } \gamma : \\ \Phi_{\gamma'} = \frac{NkT}{2(\lambda + 2\mu - \varpi)} \left[ -\frac{2}{5}\varpi - 2,7\lambda + \frac{71}{15}\mu + \left(82 + \frac{2}{15}\right)A + 112B + 67,2C \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{8}{15} \frac{(\mu + 8A + 12C)'}{\lambda + \mu} - \frac{D_{\gamma}}{15} \right] \end{array} \right.$$

Rappelons le rôle que jouent ces termes; nous avons étudié un corps isotrope dilaté  $\alpha_1$  suivant une direction, afin d'aboutir à la valeur du coefficient  $\lambda_T + 2\mu_T$ , ainsi que le montrait la formule (70) de l'énergie libre

$$(70) \quad F(\alpha_1) = F_0 + \frac{1}{2}(\lambda_T + 2\mu_T)\alpha_1^2.$$

D'autre part, l'énergie libre  $F$  se compose de l'énergie potentielle  $\mathcal{E}$

et des énergies libres  $\Phi_k$  d'agitation thermique rapportées à un volume  $V$  unité

$$(85) \quad F(\alpha_1) = \mathcal{E}(\alpha_1) + \sum_k \Phi_k(\alpha_1).$$

Nous avons vu qu'entre  $\mathcal{E}$  et les  $\Phi_k$ , il y a compensation des termes linéaires en  $\alpha_1$ , ceci tenant à ce que nous partons d'un état d'équilibre à température  $T$  sous pression extérieure nulle; la pression interne  $\varpi$  d'agitation thermique est donc équilibrée par la dilatation thermique du solide. Nous avons donc finalement, d'après (85), en utilisant la formule (115) et le développement (28),

$$(125) \quad F(\alpha_1) = F_0 + \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)\alpha_1^2 + \alpha_1^2(\Phi_{\alpha,2} + \Phi_{\beta,2} + \Phi_{\gamma,2}),$$

les  $\Phi_{\alpha,2}$ ,  $\Phi_{\beta,2}$ ,  $\Phi_{\gamma,2}$  sont les expressions (124), et  $\lambda$ ,  $\mu$  représentent les coefficients élastiques potentiels purs, à température  $T$ , sous le volume spécifique correspondant à la dilatation thermique normale (pression extérieure nulle).

Nous obtenons donc, en comparant (70) et (125),

$$(126) \quad \lambda_T + 2\mu_T = \lambda + 2\mu + 2(\Phi_{\alpha,2} + \Phi_{\beta,2} + \Phi_{\gamma,2}).$$

Cette formule est à rapprocher de celle obtenue en (64) (haute température) pour le module de compressibilité,

$$(64) \quad \alpha_T = \lambda_T + \frac{2}{3}\mu_T = \lambda + \frac{2}{3}\mu + NkT \sum_{k=\alpha,\beta,\gamma} \frac{\partial^2 \log \Theta_k}{\partial V^2} \quad (V=1).$$

On voit apparaître ici, en bonne évidence, les dérivées  $\frac{\partial}{\partial T}$ , à volume constant, prises sur les coefficients macroscopiques :

$$(127) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial T} (\lambda_T + 2\mu_T)_{,V} = \frac{2}{T} (\Phi_{\alpha,2} + \Phi_{\beta,2} + \Phi_{\gamma,2}), \\ \frac{\partial}{\partial T} (\alpha_T)_{,V} = Nk \sum_{k=\alpha,\beta,\gamma} \frac{\partial^2 \log \Theta_k}{\partial V^2}. \end{array} \right.$$

Nous voudrions évaluer les variations de  $\lambda_T$  et  $\mu_T$  à *pression constante*, comme cela se produit lorsqu'on fait les mesures sur un solide qui se dilate naturellement; nous devons alors tenir compte de la dilatation thermique  $\alpha$  naturelle et nous servir de formules du

type (29), prises à partir de l'état à température T,

$$(128) \quad \frac{\partial \lambda_T}{\partial T, p} = \frac{\partial \lambda_T}{\partial T, v} + \frac{\partial \lambda_T}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial T, p} = \frac{\partial \lambda_T}{\partial T, v} + [\lambda_T + 16(2A + 9B)] \frac{\partial \alpha}{\partial T, p}.$$

et, de même,

$$(129) \quad \frac{\partial \mu_T}{\partial T, p} = \frac{\partial \mu_T}{\partial T, v} + [\mu_T + 24(A + C)] \frac{\partial \alpha}{\partial T, p};$$

les dérivées à volume constant sont à prendre dans (127), et le  $\frac{\partial \alpha}{\partial T, p}$  résulte de l'équation de dilatation thermique (61).

En fait, les coefficients d'élasticité seront mesurés à pression constante, le corps subissant à chaque température sa dilatation thermique naturelle. Résumons alors les résultats relatifs aux divers coefficients d'élasticité :

1° *Coefficients purement tirés de l'énergie potentielle*  $\lambda, \mu$ . — En vertu de la discussion du paragraphe 9, ces coefficients sont ceux qui régissent la propagation des *ondes d'agitation thermique* (hypersons); ces coefficients dépendent de la température uniquement par l'influence de la dilatation thermique  $\alpha$  et s'obtiennent par des formules du type (29), calculées à partir de l'état naturel à température T

$$(128) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \lambda}{\partial T, p} = [\lambda + 16(2A + 9B)] \frac{\partial \alpha}{\partial T, p}, \\ \frac{\partial \mu}{\partial T, p} = [\mu + 24(A + C)] \frac{\partial \alpha}{\partial T, p}. \end{array} \right.$$

2° *Coefficients macroscopiques isothermes*  $\lambda_T, \mu_T$ . — Les variations, à pression constante, des coefficients isothermes s'obtiennent par addition des contributions tirées de (128) et de (127); résolvons (127) pour séparer ce qui concerne  $\lambda$  et  $\mu$ , nous trouvons

$$(129) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \lambda_T}{\partial T, p} = \frac{\partial \lambda}{\partial T, p} - \frac{\sum_k \Phi_k}{T} + \frac{3}{2} R \sum_k \frac{\partial^2 \log \Theta_k}{\partial V^2}, \\ \frac{\partial \mu_T}{\partial T, p} = \frac{\partial \mu}{\partial T, p} + \frac{3}{2} \frac{\sum_k \Phi_k}{T} - \frac{3}{4} R \sum_k \frac{\partial^2 \log \Theta_k}{\partial V^2}. \end{array} \right.$$



Quant aux *coefficients adiabatiques*  $\lambda_s, \mu_s$ , valables pour ondes sonores et ultrasonores, on les obtient par la condition  $\mu_T = \mu_s$  et par la relation (10) entre les compressibilités.

**20. Variation des coefficients d'élasticité  $\lambda$  et  $\mu$  en fonction de la température.** — Toutes ces formules une fois établies, que peut-on en tirer? A vrai dire, on ne sait rien de sûr, expérimentalement sur les coefficients d'élasticité A, B, C du troisième ordre; la situation est donc peu engageante, et il semblerait qu'on puisse tout au plus conclure ainsi : les mesures de dilatation thermique et de  $\frac{\partial \lambda}{\partial T}, \frac{\partial \mu}{\partial T}$  donnent trois nombres qui permettent de fixer les trois coefficients inconnus A, B, C.

En fait, les mesures de  $\frac{\partial \lambda}{\partial T}$  et  $\frac{\partial \mu}{\partial T}$  sont assez médiocres, car les déterminations statiques d'élasticité ont toujours été faites avec de trop grosses déformations et sur des corps isotropes constitués par un enchevêtrement mal défini de microcristaux. Je crois qu'on peut affirmer que les mesures d'élasticité seraient à reprendre entièrement, si l'on voulait en tirer des renseignements utilisables pour la théorie physique, au lieu d'y chercher des données empiriques valables pour les applications techniques. On dispose actuellement des mesures de Voigt sur des monocristaux, et de quelques déterminations récentes par la méthode des vibrations ultrasonores (1); ces dernières expériences me paraissent les plus sûres et devraient être généralisées; elles permettraient certainement d'atteindre aussi les coefficients du troisième ordre A, B, C.

Devant cette pénurie de données expérimentales, j'ai cherché (*Tenseurs*, p. 339), à évaluer, au moins grossièrement, les ordres de grandeur des A, B, C en utilisant la dilatation thermique et quelques hypothèses accessoires (assez arbitraires). Je prenais  $B = 0$  et je constatais que l'on pouvait choisir les jeux de valeurs suivants :

$$(130) \quad \mu \approx \frac{1}{2} \lambda \left\{ \begin{array}{lll} A \approx -0,2\lambda, & B = 0, & C \approx -0,2\lambda, \\ A \approx -0,4\lambda, & B = 0, & C = 0, \\ A = 0, & B = 0, & C \approx -0,45\lambda. \end{array} \right.$$

---

(1) Voir à ce sujet la discussion donnée dans L. BRILLOUIN, *La structure des corps solides dans la Physique moderne* (A. S. Ind., n° 549. Herman, Paris, 1936).

Je ferai les calculs numériques avec les valeurs indiquées sur la première ligne; donc

$$(131) \quad \mu = \frac{1}{2}\lambda, \quad A = C = -\frac{1}{5}\lambda, \quad B = 0$$

et j'omettrai les termes en  $\varpi$  dont l'importance pratique est négligeable.

Portons alors ces valeurs dans (124), nous obtiendrons les coefficients  $\Phi_{\alpha 2}$ ,  $\Phi_{\beta 2}$ ,  $\Phi_{\gamma 2}$  qui régissent les variations de  $\lambda_T + 2\mu_T$  à volume constant (127). Sans même faire le calcul, il saute aux yeux que ces expressions sont négatives, car les coefficients A et C y sont affectés de coefficients élevés, et nous avons mis en évidence des carrés ou des coefficients D (positifs) tous précédés du signe —

En utilisant les valeurs (131), on trouve (1)

$$(132) \quad \sum_k \Phi_k \approx -33 \frac{RT}{V} \quad (R = Nk).$$

Sur les  $\frac{\partial^2 \log \theta_k}{\partial V^2}$ , il est très difficile de faire une évaluation, car les dérivées premières  $\frac{\partial \log \theta_k}{\partial V}$  sont déjà des expressions contenant les  $\lambda$ ,  $\mu$ , A, B, C, et leurs dérivées secondes feront intervenir expressément les variations des A, B, C avec le volume; or, j'ai omis ces variations dans mes calculs. Voici, d'après (117) à (121), les dérivées premières

$$(133) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ondes transversales } \alpha, \beta : \\ \frac{\partial \log \theta_{lr}}{\partial V} = \frac{1}{\mu_a} \left[ \frac{\lambda_a}{2} + \frac{2}{3}\mu_a + 4A + 4C \right], \\ \text{ondes longitudinales } \gamma : \\ \frac{\partial \log \theta_l}{\partial V} = \frac{1}{\lambda_a + 2\mu_a} \left[ \frac{5}{6}\lambda_a + \mu_a + \frac{40}{3}A + 24B + 8C \right]. \end{array} \right.$$

Les dérivées secondes sont donc difficiles à évaluer; Mott et Jones pensent (*Theory of metals and alloys*, p. 21) qu'elles sont positives et font d'ailleurs une faute de signe dans leur formule (40), comme je l'ai signalé plus haut § 10, éq. (64).

Les coefficients  $\lambda$ ,  $\mu$ , purement potentiels décroissent sûrement

---

(1) Les calculs précédents avaient été faits en prenant un volume V égal à l'unité; pour l'homogénéité des formules, il vaut mieux faire réapparaître ici ce volume V explicitement.

lorsque la température augmente, car  $\frac{\partial \alpha}{\partial T, p}$  est positif, et les valeurs (131) donnent

$$(134) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \lambda}{\partial T, p} = -5,4 \frac{\partial \alpha}{\partial T, p}, \\ \frac{\partial \mu}{\partial T, p} = -9,1 \frac{\partial \alpha}{\partial T, p}. \end{array} \right.$$

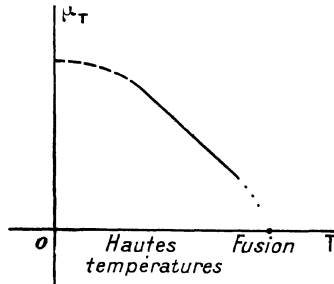
Les valeurs numériques sont naturellement très aléatoires, mais l'ordre de grandeur des A et C, tous deux négatifs, rend le signe évident.

Pour les coefficients  $\lambda_T$ ,  $\mu_T$  macroscopiques isothermes, nous avons vu qu'il y a incertitude sur les  $\frac{\partial^2 \log \Theta_k}{\partial V^2}$ ; mais nous devons aussi noter la valeur énorme du terme (132), c'est lui qui va tout dominer pour donner

$$(135) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \lambda_T}{\partial T, p} \approx +28 \frac{R}{V}, \\ \frac{\partial \mu_T}{\partial T} \approx -58 \frac{R}{V}. \end{array} \right.$$

Ce qui frappe, à l'examen de ces chiffres, c'est la grosse différence entre (135) et (134). En particulier, la rigidité macroscopique  $\mu_T$  va diminuer très vite, par élévation de la température, tandis que la rigidité potentielle  $\mu$  ne diminuera que plus lentement.

Fig. 19.



La figure 19 résume les résultats : dans le domaine des hautes températures ( $T \gg \Theta_k$ ),  $\mu_T$  décroît linéairement; aux basses températures, la décroissance sera plus lente, par suite de la faible agitation thermique sur les hautes fréquences (courbe en trait interrompu). Lorsqu'on approchera de la fusion, les termes A, B, C devront augmenter encore et la décroissance s'accroître (courbe en

pointillé). Au total, nous sommes conduit à prévoir une variation très semblable à celle de Sutherland (*fig. 1*).

La fusion serait caractérisée par l'annulation de la rigidité macroscopique  $\mu_T$ ; ce schéma est évidemment un peu sommaire, car il ne laisse pas prévoir la chaleur de fusion, à moins qu'à la fin de sa course la courbe ne tombe verticalement.

Au moment de la fusion, la rigidité macroscopique s'annule sans que la rigidité microscopique  $\mu$  en fasse autant; les ondes d'agitation thermique comprennent encore des ondes transversales, et la chaleur spécifique doit conserver la valeur  $3R$  caractéristique des solides; ce fait est assez bien vérifié expérimentalement (*Tenseurs*, p. 349), car les liquides montrent tous une chaleur spécifique partant de  $3R$  à la fusion pour descendre vers  $2R$  au point critique.

Ainsi, malgré l'incertitude considérable sur les coefficients d'élasticité  $A, B, C$ , certaines conclusions générales importantes peuvent être dégagées.

Terminons par quelques remarques sur le cas des solides obéissant aux *relations de Cauchy*; j'ai discuté, d'autre part (*Actualités Scient. et ind.*, n° 549, Hermann, Paris, 1936), les conditions de validité de ces règles; pour un solide isotrope, les relations de Cauchy donnent

$$\lambda = \mu,$$

et lorsqu'on revoit la démonstration, on s'aperçoit qu'elle est valable à toute température, entre les coefficients  $\lambda; \mu$  tirés de l'énergie potentielle seule. Reportons-nous aux expressions (29), et nous en tirons

$$(136) \quad \begin{cases} \lambda_0 = \mu_0, \\ 8(2A_0 + 9B_0) = 12(A_0 + C_0), \end{cases}$$

donc

$$A_0 + 18B_0 - 3C_0 = 0.$$

Ces relations diminuent l'arbitraire et pourront être fort utiles. Les expériences récentes sur des cristaux montrent d'ailleurs que les relations de Cauchy ne sont jamais rigoureusement satisfaites, même à très basse température; à température élevée, les corrections d'agitation thermique (129) jouant différemment sur les deux coefficients  $\lambda, \mu$  influenceront encore sur la différence entre les coefficients  $\lambda_T, \mu_T$  macroscopiques que l'on mesure.

Dans le cas des *métaux*, on ne devra pas oublier de tenir compte du terme important de pression interne  $\varpi$  donné par les électrons libres; sa contribution devra être comptée dans l'évaluation de l'énergie potentielle.

\* \* \*

Ce travail avait fait l'objet d'une courte Communication au Congrès Van der Waals, à Amsterdam, en novembre 1937; rédigé en août 1938, le fascicule n'a pu être imprimé qu'en août 1939, pour paraître en 1940; deux courtes Notes ont été publiées dans l'intervalle (*Proc. Indian Acad. of Science*, t. 8, 1938, p. 251, et *Physical Rev.*, t. 54, 1938, p. 916), ainsi qu'un exposé à l'American Physical Society, meeting d'avril 1939, à Washington (*Physical Rev.*, t. 55, 1939, p. 1139).

L'idée essentielle était toujours de chercher à évaluer la variation thermique du coefficient d'élasticité d'un corps solide, et de définir ensuite le point de fusion comme la température à laquelle la rigidité du solide s'annule.

Le même point de vue a été repris et développé par M. Born, dans divers travaux récents (Académie Roumaine, 1939, *Journal of Chemical Physics*, t. 7, 1939, p. 591), et cet auteur arrive à des conclusions plus précises que celles obtenues dans l'exposé de ce fascicule; cela tient essentiellement à la différence des méthodes employées pour la mise en œuvre des idées directrices qui sont bien les mêmes dans les deux cas.

J'ai basé tout le calcul sur le schéma du solide idéal de Debye; le solide est traité comme un milieu continu, et la structure atomique ne s'introduit pas explicitement; on en tient seulement compte par la considération des longueurs d'onde limites pour les ondes élastiques d'agitation thermique. Le grand succès de cette méthode dans la théorie des chaleurs spécifiques permet de bien augurer de son application au problème de la fusion: l'approximation obtenue doit pourtant rester assez grossière; l'avantage de cette méthode consiste en ce qu'elle permet l'emploi de la théorie quantique et s'applique ainsi jusqu'aux plus basses températures.

M. Born s'attaque directement au problème du réseau cristallin, composé d'atomes agissant les uns sur les autres par des forces centrales  $\Phi(r)$  données; il prend, comme moi, grand soin d'employer les formules rigoureuses complètes pour définir les déformations et peut alors pousser les calculs jusqu'au bout, mais il se limite aux méthodes de la statistique classique, valables à haute température; les courbes obtenues, pour la variation de la rigidité du cristal en fonction de la température, ressemblent étrangement à la Courbe de Sutherland (*fig. 1*) rappelée dans cet exposé. La méthode que j'ai développée ici ne peut s'appliquer que pour la partie de la courbe relative aux basses températures (*fig. 19*), mais ne permet pas d'approcher du point de fusion,

car, auprès de ce point, les vibrations prennent des amplitudes si grandes que la simple considération des coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ne suffit plus.

La méthode de Born, au contraire, permet de remonter jusqu'aux forces interatomiques élémentaires et peut certainement s'appliquer jusqu'à la fusion, à moins que la non harmonicité des oscillations ne devienne trop importante.

Mes recherches et celles de M. Born se complètent donc heureusement et poursuivent le même but. Un point très intéressant à noter, c'est que M. Born parvient à donner une justification théorique de la formule proposée autrefois par Lindemann pour le point de fusion; cette formule indique que la température de fusion est proportionnelle à la température caractéristique  $\Theta_D$  de Debye, avec un certain coefficient numérique.

Born retrouve une formule du même type, mais munie d'un coefficient un peu différent; il semble donc qu'on soit très près d'une théorie correcte de la fusion, car la formule de Lindemann s'accorde très convenablement avec les faits d'expérience.

FIN



---

## TABLE DES MATIÈRES

---

	Pages.
1. La théorie quantique des solides, d'après Born et Debye.....	1
2. Position du problème.....	2
3. Coefficients d'élasticité isothermes, adiabatiques et instantanés.....	3
4. Rappel de formules thermodynamiques; corps fluide .....	9
5. Déformation d'un solide; solide isotrope initialement; invariants de la déformation .....	12
6. Énergie potentielle, énergie, énergie libre, entropie dans un solide isotrope.	15
7. Thermodynamique du corps solide isotrope; compressibilité et rigidité adiabatiques .....	19
8. Égalité des rigidités isothermes et adiabatiques.....	22
9. Propagation des ondes dans diverses gammes de fréquences.....	25
10. Renseignements fournis par la théorie de la dilatation thermique... ..	26
11. Solide soumis à une dilatation unilatérale.....	30
12. Longueurs d'onde limites dans le solide déformé, aplatissement de la « première zone ».....	32
13. Dénombrement des degrés de liberté de vibration, et calcul de l'énergie libre F .....	38
14. Énergie élastique statique, pour un solide initialement dilaté suivant $Ox_1$ (état $\alpha_1$ ).....	40
15. Ondes élastiques .....	44
16. Polarisations principales des ondes élastiques, dans le milieu déformé $\alpha_1$ ; vitesses de propagation.....	47
17. Intégrales d'énergie libre.....	51
18. Discussion; termes en $\alpha_1$ dans l'énergie libre .....	54
19. Termes en $\alpha_1$ dans l'énergie libre.....	57
20. Variation des coefficients d'élasticité $\lambda$ et $\mu$ en fonction de la température..	60

